МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Методичні вказівки
з курсу «Математика»
для слухачів підготовчого відділення
Частина 1

ЧИСЛОВІ МНОЖИНИ.
ДІЙСНІ ЧИСЛА І ДІЇ НАД НИМИ

Зміст

ПЕРЕДМОВА

Методичні вказівки для самостійної роботи слухачів на підготовчому відділенні з курсу «Математика» для дистанційної форми навчання складаються з шести тем:

- Тема 1. Числа та дії над ними.
- Тема 2. Алгебраїчні вирази та дії над ними.
- Тема 3. Поняття функції. Класифікація, властивості і графіки елементарних функцій.
- Тема 4. Рівняння, нерівності та їх системи: класифікація і методи розв'язання.
- Тема 5. Похідна функції. Невизначений і визначений інтеграли.
- Тема 6. Геометрія: планіметрія та стереометрія.

Кожна тема складається з лекцій, практичних занять, тестів першого рівня та контрольної роботи.

Лекції призначені для того, щоб в максимально короткій і акцентованій формі викласти всю необхідну математичну інформацію з даної теми, обсяг якої регламентується програмою зовнішнього незалежного оцінювання з математики. Крім того, кожна лекція містить велику кількість розв’язаних завдань, які або пояснюють зміст визначення того чи іншого поняття, або ілюструють метод (алгоритм) розв’язання стандартної задачі.

При «роботі» з лекціями варто звернути увагу на слова і словосполучення виділені *курсивом*. Таким чином виділяється або ім'я нового математичного поняття, або те, що важливо для подальшої роботи, або при вирішенні завдань.

Практичні заняття - це умовна назва тієї частини навчальної роботи, в якій слухач виконує всі можливі завдання з теми, що вивчається, використовуючи головним чином приклади з лекції та іншу необхідну інформацію з неї.

Тести першого рівня призначені для оцінки обсягу знання вивчаємої математичної інформації на «понятійному рівні».

Контрольні роботи. По кожній з шести тем, крім четвертої, передбачається по одній контрольній роботі. За четвертою темою, яка містить порівняно великий обсяг інформації – три контрольні роботи.

Контроль знань та вмінь слухачів, що навчаються за заочною формою, здійснюється за допомогою системи контрольних заходів. Вони складаються із заходів *поточного* та *підсумкового* контролю.

Поточний контроль здійснюється протягом усього навчального року (1 листопада – 1 травня) та включає заходи щодо контролю самостійної роботи слухача під час вивчення навчальної дисципліни поза межами університету, а саме, виконання контрольних робіт.

Контроль самостійної роботи слухачів заочної форми навчання полягає у використанні дистанційних методів, які передбачають застосування сучасних інформаційно-комунікаційних засобів організації контролю, а саме:

- ✓ поетапне відправлення слухачем виконаних завдань контрольної роботи та отримання зауважень від викладача в режимі «*оф-лайн*» через мережу Інтернет;
- ✓ виконання завдань самостійної роботи безпосередньо в режимі «*он-лайн*» через мережу Інтернет за допомогою Moodle;
- ✓ спілкування (консультації) викладача зі слухачем в режимах «*оф-лайн*» і «*он-лайн*» через Інтернет у заздалегідь визначені дати та години, яке може передбачати як відповіді на запитання студентів щодо окремих тем, пунктів завдань, так і сумісне обговорення найбільш складних тем теоретичного матеріалу, контрольних або курсових робіт тощо.

У випадку, якщо слухач має накопичену суму балів поточного контролю меншу ніж 60% від максимально можливої суми – 100 балів, він не допускається до підсумкового контролю.

Підсумковий контроль здійснюється під час екзаменаційної сесії та має на меті встановлення рівня знань і вмінь, які опанував слухач після вивчення навчальної дисципліни. Форма підсумкового контролю – іспит.

До іспиту допускаються слухачі, які мають накопичену суму балів поточного контролю не меншу ніж60 балів (тобто не меншу за670% від максимально можливої суми в 100 балів).

Максимальна сума балів, яку може отримати студент на іспиті, становить 100 балів. Кожен білет вміщує 20 тестових питань, кожна правильна відповідь оцінюється п’ятьма балами.

- „**задовільно**” - слухач повинен мати оцінку на іспиті не меншу ніж 60% від максимально можливої суми – 100 балів;

- „**добре**” - слухач повинен мати оцінку на іспиті не меншу ніж 74% від максимально можливої суми – 100 балів;

- „**відмінно**” - слухач повинен мати оцінку на іспиті не меншу ніж 90% від максимально можливої суми – 100 балів.

Для оцінки **роботи** слухача при перевірці СРС заочної форми навчання в міжсесійний період використовуються елементи дистанційної форми контролю виконання етапів контрольних робіт (табл. 1.1).

Таблиця 1.1 – Строки виконання контрольних робіт

№	Перелік тем лекцій	№КР	Строк виконання КР
1	Числа та дії над ними.	КР №1	1 – 15.I
2	Алгебраїчні вирази та дії над ними.	КР №2	16.I – 31.I
3	Поняття функції. Класифікація, властивості та графіки елементарних функцій.	КР №3	1.II – 15.II
4	Рівняння, нерівності та їх системи: класифікація та методи розв’язання.	КР №4	16.II – 28.II
		КР №5	1.III – 15.III
		КР №6	16.III – 31.III
5	Похідна функції. Невизначений і визначений інтеграли.	КР №7	1.IV-15.IV
6	Геометрія: планіметрія і стереометрія.	КР №8	16.IV-30.IV

Приклад оформлення титульного аркуша **контрольної роботи** наведений у **додатку А**.

ЛЕКЦИЯ №1

ЧИСЛОВІ МНОЖИНИ.
ДІЙСНІ ЧИСЛА І ДІЇ НАД НИМИ

ПЕРЕДМОВА

В лекції розглядаються основні математичні поняття – числа, числової безлічі і властивості операції (дії) над числом.

Десятковий і звичайний дроби розглядаються як можливі форми запису чисел в десятковій системі числення. Визначаються основні поняття, пов'язані з десятковим і звичайним дробами.

Виходячи з аналізу структури десяткового дробу, вводяться поняття натурального, цілого, раціонального і дійсного числа. Сукупності тих або інших типів чисел визначаються як числові множини. Так, наприклад, множина всіх можливих десяткових дробів визначається як множина дійсних чисел.

Розглядається питання, пов'язане з геометричною інтерпретацією дійсних чисел. Для цього вводиться поняття числової осі і поняття координати точки на цій осі. Наведені приклади зображення числових множин на числовій осі: проміжки, інтервали, відрізки і дій об'єднання і пересічення цих множин.

Розглянуто визначення поняття прямої і зворотної операції над дійсним числом і основні властивостей операцій, які використовуються в елементарній математиці; ознаки ділення цілих чисел без залишку; поняття найменшого загального кратного і найбільшого загального дільника; алгоритм розкладання цілого числа на прості множники; властивості звичайних дробів і правила виконання дій складання, віднімання, множення і ділення над ними.

Розділ 1. ПОНЯТТЯ ДЕСЯТКОВОГО І ЗВИЧАЙНОГО ДРОБУ

1.1. Система числення. Поняття дробу.

Спосіб запису чисел за допомогою спеціальних знаків *(цифр)* називається *системою числення*, а кількість використовуваних цифр називається *основою* цієї *системи числення*.

Якщо, наприклад, використовувати такі десять знаків:

$$\Phi = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, \tag{1.1.1}$$

то система числення має основу рівну десяти і називається *десятковою системою числення*.

У десятковій системі числення числа записуються у вигляді дробів, які за способом запису поділяються на два типи: *десяткові дроби і звичайні дроби*.

1.2. Поняття десяткового дробу

Десятковий дріб – *це форма (спосіб) запису числа*, який має таку структуру:

$$\pm\, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n , b_1 b_2 b_3 \ldots b_n \ldots; \tag{1.2.1}$$

де a_i і b_i – цифри, тобто: $a_i = 0,1,2,\ldots,9$ и $b_i = 0,1,2,\ldots,9$, $\quad i = 1,2,3,\ldots$.

Зауваження

1. Кома у формулі (1.2.1) розділяє десятковий дріб на дві частини: цифри, розташовані зліва від коми, утворюють *цілу частину* десяткового дробу, а цифри, розташовані праворуч від коми – *дробову частину*. Наприклад, в десятковому дробу*237,67* цілу частину утворюють цифри *237*, а дробову частину – цифри *67*.
2. Десятковий дріб може бути додатним (знак «+» зазвичай не пишуть) і від'ємним, йому відповідає знак « – » у формулі (1.2.1).
3. Три крапки в кінці формули (1.2.1) означають, що кількість цифр в дробовій частині є необмеженою. В цьому випадку *десятковий дріб називається нескінченним.* Якщо ж дробова частина десяткового дробу містить кінцеве число цифр в дробовій частині, то дріб називається *скінченним*. Наприклад, дріб *3,1425926* є скінченним, а дріб 3,1425926… – нескінченним.
4. Якщо десятковий дріб нескінченний, але якась послідовність (група) цифр в дробовій частині, починаючи з деякого місця, періодично повторюється, то дріб називається *періодичним*. Наприклад, безконечний дріб

1,73252525… є періодичним, оскільки послідовність, що складається з двох цифри *2* і *5,* періодично повторюється. Для періодичних дробів визначена спеціальна форма запису. Наприклад: *1,73252525… = 1,73(25).*

1.3. Типи чисел

Залежно від того як влаштована дробова частина десяткового дробу, числу привласнюється відповідне ім'я.

- *Цілі числа.* Якщо дробова частина десяткового дробу дорівнює нулю, тобто всі цифри $b_i = 0$:

$$\pm a_1 a_2 ... a_n, 00 \ldots = + a_1 a_2 ... a_n; \tag{1.3.1}$$

то таке число називається *цілим*. Цілими є, наприклад, наступні числа: *0; -1; 1; -2; 2; -3; 3* і так далі.

- *Натуральні числа.* Додатні цілі числа (1.3.1) називаються натуральними числами, тобто: *1, 2, 3, 4* і так далі. Число «нуль» є цілим, але не є натуральним числом.
- *Раціональні числа.* Числа, які можна записати у вигляді скінченного або нескінченного періодичного дробу, називаються раціональними. Наведемо декілька прикладів раціональних чисел: *17,35; 0,001;-2,3; 3,43575757…=3,43(57).*
- *Дійсні числа.* Будь-яке число, яке можна записати у вигляді десяткового дробу (1.2.1) називається дійсним.

1.4. Звичайні дроби

Число, записане у вигляді:

$$\frac{m}{n}, \tag{1.4.1}$$

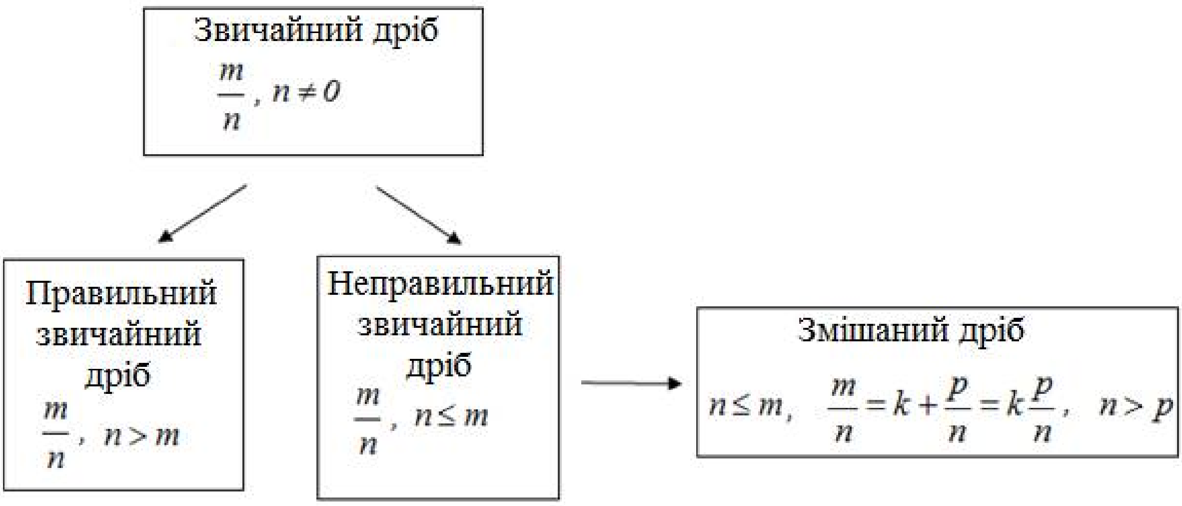
називається *звичайним дробом.* У формулі (1.4.1) горизонтальна риса називається *дробовою рискою*, а m і $n \neq 0$ – цілі числа, причому число *m*, що розташоване вище за дробову риску називається *чисельником дробу*, а число *n*, розташоване нижче за дробову риску, – *знаменником*.

Зауваження.

1.Умова $n \neq 0$ у формулі (1.4.1) означає, що дріб вигляду $\frac{m}{0}$ не має сенсу (не існує).

2. Дріб (1.4.1) називається *правильним*, якщо її знаменник більший від чисельника, тобто $n > m$. В разі, якщо: $n \le m$, дріб називається *неправильним*. Так, наприклад, $\dfrac{4}{17}$ – це правильний дріб (чисельник *4* менший вид знаменника *17*), а $\dfrac{7}{3}$ – неправильний (чисельник *7* більший вид знаменника *3*).

3. Дріб, записаний у вигляді суми цілого числа k і правильного дробу $\dfrac{m}{n}$, тобто: $k + \dfrac{m}{n}$, називається *мішаним дробом* і записується так: $k\dfrac{m}{n}$. Наприклад, число, записане у вигляді: $4\dfrac{2}{3}$, слід сприймати так: $4\dfrac{2}{3} = 4 + \dfrac{2}{3}$.



- Якщо дріб від'ємний, то чисельник і знаменник дробу мають *різні знаки:*

$$\frac{m}{n} < 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m > 0, \\ n < 0, \end{cases} \quad или \quad \begin{cases} m < 0, \\ n > 0. \end{cases} \tag{1.4.2}$$

- Якщо дріб додатний, то чисельник і знаменник дробу мають *однакові знаки*:

$$\frac{m}{n} > 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m > 0, \\ n > 0, \end{cases} \quad или \quad \begin{cases} m < 0, \\ n > 0. \end{cases} \tag{1.4.3}$$

Зауваження

1. Якщо два і більше математичних виразів за сенсом даного завдання «логічно сполучені» один з одним сполучником «і», то їх об'єднують за допомогою *фігурної дужки*. Якщо ж доречний союз «або», то – квадратні дужки.

Наприклад, у формулі (1.4.2) перша фігурна дужка $\begin{cases} m > 0, \\ n < 0, \end{cases}$ сполучає дві нерівності, які логічне зв'язані одна з одною сполучником «і»: $m > 0$ і $n < 0$.

2. Наявність сполучника «або» у формулах (1.4.2) і (1.4.3) означає, що дві фігурні дужки в цих формулах слід було б об'єднати за допомогою *квадратної дужки* таким чином:

$$\frac{m}{n} < 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m > 0, \\ n < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} m < 0, \\ n > 0; \end{cases} \end{array} \right. \frac{m}{n} > 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m > 0, \\ n > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} m < 0, \\ n > 0. \end{cases} \end{array} \right. \tag{1.4.4}$$

Розділ 2. ЧИСЛОВІ МНОЖИНИ І ДІЇ НАД НИМИ

2.1. Числова множини

Термін «*множина*» використовують для позначення сукупності помітних між собою об'єктів довільної природи, які можна розглядати як одне ціле. Ці об'єкти називаються *елементами множини*.

Якщо елементами множини є числа, то вона називається *числовою множиною*. Залежно від того, які види чисел є її елементами, числовій множини привласнюється відповідна назва. Розглянемо деякі з числової множин.

Множина натуральних чисел (позначається буквою N).

Її елементами є всі натуральні числа. Якщо a – натуральне число, то факт *приналежності* цього числа множини натуральних чисел символічно записується так: $a \in N$, ($\in$ – символ *«належати»*). Оскільки кількість елементів цієї множини необмежено велика, то повний список елементів записати неможливо, але декілька перших елементів випишемо:

$$N = \{1,2,3,\ldots\}. \tag{2.1.1}$$

Множина цілих чисел (позначається буквою Z).

Елементами цієї множини є всі цілі числа. Оскільки кожне натуральне число є цілим, то множина натуральних чисел *N* є частиною *(підмножиною)* множини цілих чисел *Z*. Список елементів цієї множини виглядатиме так:

$$Z = \{0,1,-1,2,-2,3,-3,\ldots\}. \qquad (2.1.2)$$

Факт включення множини *N* в множину Z символічно записується так: $N \subset Z$ ($\subset$ – символ «*включення*»).

Множина раціональних чисел (позначається буквою Q).

Елементами множини *Q* є всі раціональні числа, тобто всі можливі скінченні і нескінченні періодичні десяткові дроби. Оскільки будь-яке ціле число можна розглядати як безконечний періодичний десятковий дріб (наприклад $a = 3 = 3{,}00\ldots = 3{,}(0)$), то множина *Z* є підмножиною множини *Q* і тому: $Z \subset Q$ і $N \subset Z \subset Q$.

Теорема 1. Будь-який скінченний або нескінченний періодичний десятковий дріб можна записати у вигляді звичайного дробу (1.4.1).

Пояснення. Наведемо декілька прикладів, що ілюструють теорему 1:

$$0{,}5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}; \quad 0{,}125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}; \quad 1{,}25 = 1 + 0{,}25 = 1 + \frac{25}{100} = 1 + \frac{1}{4} = 1\frac{1}{4}.$$

Дещо складніше перетворити нескінченний періодичний десятковий дріб на звичайний. Алгоритм розв’язання такої задачі буде розглянутий пізнішим, а зараз приведемо лише декілька результатів:

$$0{,}333\ldots = 0{,}(3) = \frac{1}{3}; \qquad 0{,}43535\ldots = 0{,}4(35) = \frac{431}{990}.$$

Зауваження

З теореми 1 випливає твердження, що *елементами множини раціональних чисел є всі можливі звичайні дроби* $\frac{m}{n}$. Отже список цієї множини можна представити такою формулою:

$$Q=\left\{\frac{m}{n}\middle| m\in N, n\in Z\right\}. \tag{2.1.3}$$

Множина дійсних чисел (позначається буквою R).

Елементами множини R є *дійсні числа*, тобто *всі можливі десяткові дроби*: $Q\subset R$, $N\subset Z\subset Q\subset R$.

Зауваження

Множини можна *класифікувати за кількістю елементів* в них:

- Якщо множина містить стільки елементів, що їх кількість може виражатись деяким натуральним числом, то воно називається *скінченною*. Наприклад, множина цифр (1.1.1) скінченна, тому що кількість елементів в ньому рівна десяти.
- Якщо в множині кількість елементів необмежено велика, то воно називається *нескінченною*. Такими є множини N,Z,Q,R.
- Множина називається *порожньою* (позначається символом $\varnothing$ або 0), якщо воно не містить елементів.

2.2. Геометричне зображення дійсних чисел.

Для зображення дійсних чисел використовується *числова вісь* (дивіться Рис.2.1), яка є прямою лінією, з вибраними на ній:

- довільної точки (*початок відліку*);
- позитивним напрямом (стрілка *зліва направо*);
- масштабом (*одиницею виміру довжини*) .

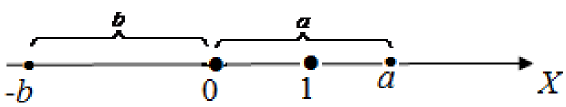


Рис.2.1. $(a>0,\ b>0)$

Між дійсними числами і точками числової осі встановлюється взаємно-однозначна відповідність:

- числу 0 відповідає точка «початок відліку» (дивіться Рис.2.1);
- додатним числам a $(a>0)$ відповідають точки, які розташовані *праворуч* від неї, на відстані a від початку відліку (дивіться Рис.2.1);

- від'ємним числам, $(-b)$, де $(b>0)$, відповідають точки, які розташовані на відстані b від початку відліку, *зліва* від неї (дивіться Рис.2.1).

Зауваження.

1. Геометричним образом дійсного числа b є точка на числовій осі.
2. Кожній числовій осі зазвичай привласнюється ім'я, яке вказується біля «стрілки». Так, наприклад, числова вісь, змальована на рис.2.1, має ім'я «вісь X».
3. Слід розрізняти *«ім'я точки»* на числовій осі (для цього використовуються великі літери латинського алфавіту: $A, B, C, \ldots$) і *значення числа*, яке зображується за допомогою цієї точки. Наприклад запис: $A(12)$ означає, що точки A на числовій осі відповідає число 12 (дивіться Рис. 2.2).
4. Якщо числова вісь позначена буквою X, то числові значення точки на цій осі далі позначатимемо тією ж буквою (лише маленькою), що і вісь. Наприклад, запис $B(x_1)$ означає, що точки B на числовій осі відповідає якесь число x_1. Оскільки величина числа не задана, то змальовувати точку B на числовій осі можна довільно. Наприклад, так, як вказано на рис.2.2.

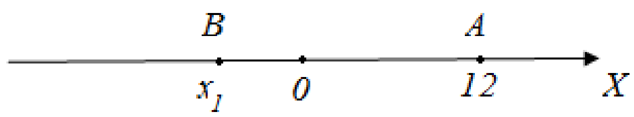


Рис.2.2.

Визначення поняття *координати точки на числовій осі.* Число, яке зображується за допомогою крапки на числовій осі, далі називатимемо *координатою* цієї *точки*.

Пояснення. Запис $A(12)$ можна інтерпретувати тепер так: точка A на числовій осі має координату 12, тобто вона знаходиться на відстані 12 одиниць з правого боку від початку осі. Число x_1 – це координата точки B (дивіться Рис.2.2).

2.3. Проміжок, інтервал, відрізок.

Якщо два дійсні числа a і b задовольняють нерівність $a<b$, то *множина чисел* x, поміщених між цими двома числами, називається *проміжком*, а самі числа a і b називаються *кінцями проміжку*.

Типи проміжків

- Якщо кінці проміжку належать йому, тобто $a \le x \le b$, то проміжок називається *відрізком* і позначається так: $[a;b]$. Тобто

$$a \le x \le b \quad \Leftrightarrow \quad [a;b]. \tag{2.3.1}$$

- Якщо кінці проміжку не належать йому, тобто $a<x<b$, то проміжок називається *інтервалом* і позначається так: $(a;b)$. Тобто

$$a<x<b \quad \Leftrightarrow \quad (a;b). \tag{2.3.2}$$

- Якщо лише один з кінців інтервалу належить йому, тобто $a \le x < b$ або $a < x \le b$, то проміжок називається *напівінтервал* і позначається так: $(a;b)$. Тобто

$$a \le x < b \quad \Leftrightarrow \quad [a;b)\text{або} \quad a < x \le b \quad \Leftrightarrow \quad (a;b]. \tag{2.3.3}$$

- Якщо одне з чисел a або b є *необмежено великим*, то проміжок називається *необмеженим*. Для позначення додатної і від'ємної необмежено великої величини використовується символ: $\pm\infty$. Отже необмежені проміжки позначаються таким чином:

$$x \ge a \quad \Leftrightarrow \quad [a;\infty) \ ; \quad x > a \quad \Leftrightarrow \quad (a;\infty) \ ;$$
$$x \le b \quad \Leftrightarrow \quad (-\infty;b] \ ; \quad x < b \quad \Leftrightarrow \quad (-\infty;b). \tag{2.3.4}$$

Зауваження.

1. Якщо проміжок скінченний, тобто $a,b \in R$, то *довжина проміжку* d у всіх випадках визначається формулою:

$$d = |b-a|. \tag{2.3.5}$$

8. *Порожня множина* $\varnothing$ є проміжком, довжина якого дорівнює *0.*

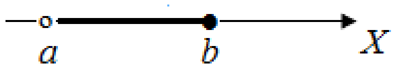
9. Якщо елементами проміжку є натуральні числа i від 1 до m($i = 1,2,...,m.$), то замість запису $i \in [1;m]$ часто використовується запис: $i = \overline{1,m}$.

2.4. Геометричне зображення проміжків.

Геометричним зображенням скінченних проміжків (2.3.1), (2.3.2) або (2.3.3) є *відрізок на числовій осі*, початком якого є точка, що зображує число a; кінцем – точка, що зображує число b. Причому, якщо будь-який з кінців проміжку належить йому, то ця точка на рис. заштриховується (*Рис.2.3a і 2.3c*), якщо ж не належить, то не заштриховується (дивіться *рис.2.3b і 2.3c*).

$x \in [a;b]$ $x \in (a;b)$

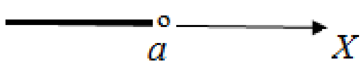
Рис.2.3a *Рис.2.3b*



$x \in (a;b]$

Рис.2.3c

Геометричним зображенням необмежених проміжків (2.3.4) є *напівпряма*, початок (кінець) якої зображується точкою, заштрихованою або не заштрихованою залежно від того належить або не належить вона проміжку (дивіться *рис. 2.4a, 2.4b*).



$x \in (-\infty;a)$ $x \in (a;\infty)$

Рис.2.4a *Рис.2.4b*

Приклад. Змалюйте геометрично напівінтервал $[2;5)$.

Відповідь.

2.5. Об'єднання і пересічення множин.

Визначення поняття *об'єднання числових множин.* *Об'єднанням* двох числових множин A і B називається *операція*, яка позначається символом $\cup$ і породжує нову множину $A \cup B$, *елементами* якої *є всі елементи першої і другої множин.*

Приклад. Задано два інтервали на множини R: $A=(1;4]$ и $B=[3;7]$. Визначте множину, яка є об'єднанням цих множин.

Розв'язання. Штрихування над числовою віссю відповідає множині A, штрихування знизу – множині B. Згідно з визначенням поняття *об'єднання числових множин* результатом є множина $(1;7]$, виділена на рис. «жирною» лінією.

$$A \cup B = (1;7]$$

Рис.2.5

Визначення поняття *пересічення числової множин.* Пересіченням двох числових множин A і B називається операція, яка позначається символом $\cap$ і породжує нову множину $A \cap B$, елементами якої є *загальні* елементи першої і другої множин.

Приклад. Задано два інтервали на множини R : $A=(1;4]$ і $B=(3;7]$. Визначте множину, яка є пересіченням цих множин.

Розв'язання. Згідно з визначенням поняття «*пересічення числової множин»* результатом операції пересічення є множина, яка складається із *загальних елементів* множин A і B На *рис.2.5* ці загальні елементи розташовані на тій частині числової осі, де «штрихування перетинаються». Ця область осі відповідає множині $(3;4]$:
$(1;4]\cap(3;7]=(3;4]$.

Розділ 3. ПОНЯТТЯ І ВЛАСТИВОСТІ ОПЕРАЦІЇ (ДІЇ) НАД ДІЙСНИМИ ЧИСЛАМИ

3.1. Поняття операції.

Термін *операція* застосовується до *арифметичних* (складання, віднімання, множення, ділення, піднесення до степеня, потенціювання, добування кореня, логарифмування) і *тригонометричних* (синус, косинус, тангенс, котангенс, арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс) дій над числами.

Таблиця 1.

№	Назва операції	Символічне позначення операції
1	складання	$+$
2	множення	$\times$
3	піднесення до степеня	*exp*
4	потенціювання	*exp*
5	синус	*sin*
6	косинус	*cos*
7	тангенс	*tan* або *tg*

8	котангенс	cot або ctg
9	віднімання	$-$
10	ділення	$:$ або $-$
11	добування кореня	$\sqrt{\ }$
12	логарифмування	log
13	арксинус	$arcsin$ або $asin$
14	арккосинус	$arccos$ або $acos$
15	арктангенс	$arctg$ або $atan$
16	арккотангенс	$arcctg$ або $acot$

Кожна з перерахованих вище операцій (дій) є деяким *правилом*, згідно з якім число a, над яким виконується ця операція, «перетворюється» на число c.

$a \xrightarrow{операция} c$.

Якщо позначити це правило (операцію) буквою L, то символічно факт такого «перетворення» будемо записати так:

$$L(a) = c \quad \text{або} \quad a \xrightarrow{L} c. \tag{3.1.1}$$

Наведемо декілька прикладів таких «перетворень» одного числа на інше за допомогою тригонометричних операцій:

$cos\,0 = 1$; $sin\,3,14159 = 0$; $arctg1 = 0,785398$;(3.1.2)

$0 \xrightarrow{cos} 1$; $3,14159 \xrightarrow{sin} 0$; $1 \xrightarrow{arctg} 0,785395.$

Зауваження.

1. Як конкретно операція L «перетворює» число a на число c, то окрема тема для розмови і зараз не найважливіша. Тим паче, що за допомогою калькуляторів це питання вирішується дуже просто, швидко і безпомилково. Важливішим для подальшого є питання, пов'язане з властивостями кожної з перерахованих вище операцій.

2. Відзначимо, що для виконання арифметичних операцій, наприклад складання, крім числа a, над яким виконується дія, треба задати ще одне число b, за

допомогою якого реалізується «перетворення» числа а на нове число c. Число b далі будемо називати «*допоміжним*» і використовувати таку символіку (більш детальніше дивіться підрозділ 3.5): $L(a;b)=c$ або $a \xrightarrow{L,b} c$.

3.2. Поняття операції складання і множення. Властивість комутативності

Для *операцій складання:*

$$L_1(a,b)=a+b=c \tag{3.2.1}$$

і множення:

$$L_2(a,b)=a\cdot b=c \tag{3.2.2}$$

має місце рівність:

$$a+b=b+a \tag{3.2.3}$$

$$a\cdot b=b\cdot a \tag{3.2.4}$$

тобто, результат c не залежить від того, яке з чисел a або b вважати «допоміжним», а яке – числом, над яким виконується операція. Така властивість цих операцій називається *комутативністю* і в загальному випадку вона може виражатись у вигляді такої наступної символічної формули:

$$L(a;b)=L(b;a). \tag{3.2.5}$$

Питання як «технічно» виконувати дії складання і множення над дійсними числами, записаними або у вигляді десяткового дробу, або у вигляді звичайного дробу, буде розглянуто далі .

Зауваження.

При складанні (множенні) декількох чисел мають місце такі формули:

$$a+b_1+b_2=(a+b_1)+b_2=(a+b_2)+b_1, \tag{3.2.6}$$

$$a\cdot b_1\cdot b_2=(a\cdot b_1)\cdot b_2=(a\cdot b_2)\cdot b_1, \tag{3.2.7}$$

які визначають *асоціативну* властивість операцій складання (3.2.6) і множення (3.2.7). Сенс цих формул полягає в наступному. Якщо над числом a виконується дві операції складання (множення) за допомогою двох «допоміжних» чисел b_1 і

b_2, то асоціативність операції означає, що результат не залежить від того, в якому порядку виконувати ці дії.

3.3. Поняття операції піднесення до степені і потенціювання

Не всі бінарні операції мають властивість комутативності. Зокрема, операція *піднесення до степеня числа а* для запису якої далі користуватимемося такою символікою:

$$a^b \text{ або } exp_a b, \tag{3.3.1}$$

де b – називається *показником степеня* («допоміжне» число); *а – основою*, вона не є комутативною, тобто для неї не має місця формула (3.2.5):

$$a^b \neq b^a \quad \text{або} \quad exp_a b \neq exp_b a. \tag{3.3.2}$$

Аналогічним чином відбувається і з операцією *потенціювання числа а*, для запису якої використовуються формули, подібні до формул (3.3.1):

$$b^a \quad \text{або} \quad exp_b a, \tag{3.3.3}$$

де «допоміжне» число b тепер є основою.

У формулі (3.3.1) число *а*, над яким виконується операція піднесення до ступеня, є основою, а у формулі (3.3.3) – показником ступеня.

Пояснення. Розглянемо формулу 3^4. Якщо не вказано число, над яким виконується дія в цій формулі, то можливі дві інтерпретації цієї формули. Перша – це піднесення числа *3*до степеня*4*; друга – це потенціювання числа *4* по підставі *3*. У першому випадку операція виконується над числом *3*, а число *4*відіграє роль «допоміжного» числа. У другому випадку, операція виконується над числом *4*, а «допоміжним» є число *3*.

Зауваження.

1. Не дивлячись на можливість двох інтерпретацій формули 3^4, результат в обох випадках буде одним і тим же, і його можна визначати за наступною формулою:

$$a^b = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{b}; \quad b \in N, \tag{3.3.4}$$

тобто $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$. Відзначимо ще раз, що формула (3.3.4) «працює», лише за умови, що показник степеня є натуральним числом.

2. Хоча при $b \notin N$ формула (3.3.4) не має місця, операції піднесення до степеня і потенціювання визначені, тобто можуть виконуватись за будь-якого значення степеня.

Властивості операції піднесення до ступеня

Для операції піднесення до степеня мають місце наступні формули:

$$0^m = 0; \tag{3.3.5}$$

$$1^m = 1; \tag{3.3.6}$$

$$0^0 \quad \text{не существует;} \tag{3.3.7}$$

$$0^{-m} \quad (m > 0) \text{ не существует;} \tag{3.3.8}$$

$$a^0 = 1; \tag{3.3.9}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \tag{3.3.10}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \tag{3.3.11}$$

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}; \tag{3.3.12}$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n} \tag{3.3.13}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \tag{3.3.14}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \tag{3.3.15}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n \tag{3.3.16}$$

Наведемо приклади, що ілюструють можливості вживання деяких з наведених вище властивостей операції піднесення до степеня (потенціювання).

Приклад. Обчисліть: $\left(6-4\left(\frac{5}{16}\right)^{0}\right)^{-2}+\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$.

Розв'язання.

$$\left(\frac{5}{16}\right)^{0}\overset{(14)}{=}1;\quad \left(6-4\left(\frac{5}{16}\right)^{0}\right)^{-2}=(6-4\cdot 1)^{-2}=(2)^{-2}\overset{(17)}{=}\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4};$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}\overset{(17)}{=}\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{3}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{3}\overset{(15)}{=}\left(\frac{3}{2}\right)^{-2+3}=\left(\frac{3}{2}\right)^{1};$$

$$\left(6-4\left(\frac{5}{16}\right)^{0}\right)^{-2}+\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}=\frac{1}{4}+\frac{3}{2}=\frac{7}{4}.$$

3.4. Тригонометричні операції синус, косинус, тангенс, котангенс.

Перше знайомство з математичними термінами синус, косинус, тангенс, котангенс пов'язано з геометрією. Так, наприклад, якщо в прямокутному трикутнику (дивіться *Рис.3.1*) позначити через α величину

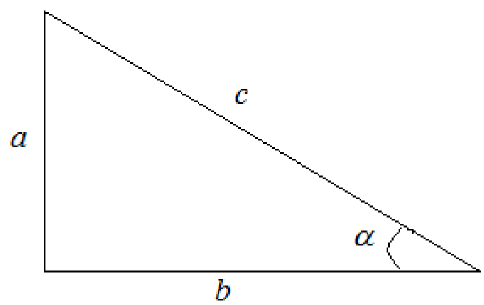


Рис.3.1.

кута, утвореного катетом, довжиною b і гіпотенузою, довжиною c, то відношення довжини цього катета до довжини гіпотенузи визначалось як «косинус кута α»:

$$cos\alpha = \frac{b}{c}. \quad (3.4.1)$$

Відношення другого катета, довжиною a до довжини гіпотенузи визначалось як «синус кута α »:

$$sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad (3.4.2)$$

а відношення довжин катетів один до одного, визначали «тангенс і котангенс кута α »:

$$tg\alpha = \frac{a}{b}, \; ctg\alpha = \frac{b}{a}. \quad (3.4.3)$$

Така *геометрична інтерпретація цих математичних понять* проста і корисна, але неправильно було б обмежуватися лише нею.

Синус, косинус, тангенс, котангенс можна розглядати як деякі нові *математичні операції*, не додаючи їм якогось конкретного геометричного сенсу і залишаючи осторонь питання про те, як ці операції виконувати. Ці операції *виконуються над дійсними числами і мають певні властивості.*

Деякі властивості тригонометричних операцій

- Операції $sin\,a$ і $cos\,a$ можуть виконуватись над будь-яким дійсним числом a: $a \in R$.
- Результат виконання операцій $sin\,a$ і $cos\,a$ знаходиться на відрізку $\left[-1;\,1\right]$, тобто

$$\begin{aligned} &-1 \le sin\,a \le 1, \quad або \quad sin\,a \in \left[-1;1\right]; \\ &-1 \le cos\,a \le 1 \quad або \quad cos\,a \in \left[-1;1\right]; \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

- Результатом виконання операцій tga і $ctga$ може бути будь-яке дійсне число, тобто:

$$tga \in \left(-\infty;\,\infty\right), \qquad ctga \in \left(-\infty;\,\infty\right). \quad (3.4.5)$$

- При деяких значеннях a результат операції tga *не існує*:

$$a = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot m, \quad m = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots. \quad (3.4.6)$$

Зокрема

$$m=0;\quad a=\frac{\pi}{2},\ \ m=1;\quad a=\frac{\pi}{2}+\pi=\frac{3\pi}{2},\quad m=-1;\quad a=\frac{\pi}{2}-\pi=-\frac{\pi}{2}.$$

Факт «не існування» значення tga зручно позначати за допомогою символу ∞. Наприклад,

$$tg\frac{\pi}{2}=\infty,\quad tg\frac{3\pi}{2}=\infty,\quad tg\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\infty. \tag{3.4.7}$$

- Результат $ctga$ не існує, якщо:

$$a=\pi+\pi\cdot m,\quad m=0;\pm 1;\pm 2;\dots\ , \tag{3.4.8}$$

тобто, можна записати, що:

$$ctg0=\infty,\quad ctg\pi=\infty,\quad ctg\left(-\pi\right)=\infty \tag{3.4.9}$$

- Хоча питання про те, як проводити обчислення, пов'язані з тригонометричними операціями не розглядається в курсі елементарної математики, результати виконання цих операцій над деякими числами, що часто зустрічаються, слід знати (дивіться *таблицю 3.2*).

Таблиця 3.2

№	$\alpha \Rightarrow$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
1	$sin\alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
2	cosα	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0	1
3	tgα	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
4	ctgα	∞	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	∞	0	∞

Деякі властивості тригонометричної операції до іншої.

$$sin^2\alpha+cos^2\alpha=1; \tag{3.4.10}$$

$$1+tg^2\alpha=\frac{1}{cos^2\alpha}; \tag{3.4.11}$$

$$1+ctg^2\alpha=\frac{1}{sin^2\alpha};\tag{3.4.12}$$

$$tg\alpha\cdot ctg\alpha=1;\tag{3.4.13}$$

$$tg\alpha=\frac{sin\alpha}{cos\alpha};\tag{3.4.14}$$

$$ctg\alpha=\frac{cos\alpha}{sin\alpha}.\tag{3.4.15}$$

3.5. Унарні і бінарні операції.

Для виконання будь-якої тригонометричної операції *треба задати лише* ***одне*** *число* – число, над яким ця дія виконується. З цієї причини тригонометричні операції називаються *унарними* (від латинського *uno* – один).

Виконання ж арифметичних операцій потребує завдання ***двох*** *чисел* – не лише числа a, над яким виконується операція L, але і другого «допоміжного» числа b. Так, наприклад, для того, щоб виконати операцію складання над числом a, треба задати ще одне число b, за допомогою якого реалізується «перетворення» числа a на нове число c. З цієї причини операція складання і все інші арифметичні операцій називаються *бінарними* (приставка *бі* означає подвоєння, від латинського *bis* – двічі). Для їх запису будемо використовувати наступну символіку:

$$L(a;b)=c \text{ або } \quad a\xrightarrow{L,b}c,\tag{3.5.1}$$

де a – число, над яким виконується операція L; b– «допоміжне» число; c – число, на яке «перетворюється» число a.

3.6. Поняття прямої і зворотної операції над дійсним числом.

Передбачимо, що над числом a виконується якась арифметична або тригонометрична операція L, результатом чого є число a_1:

$$L(a;b)=a_1,\tag{3.6.1}$$

а потім над числом a_1 виконується інша операція K, так що в результаті виходить число a_2:

$$K(a_1;b) \overset{(41)}{=} K(L(a;b);b) = a_2. \tag{3.6.2}$$

Якщо число a_2 виявиться рівним вихідному числу a, то операції K і L називаються зворотними по відношенню одна до одної. Символічно цю ситуацію можна записати так:

$$K(L(a;b);b) = a. \tag{3.6.3}$$

Визначення поняття зворотної операції. Якщо над числом *a* виконується операція *L*, а потім над результатом $L(a)$ виконується операція L^{-1}, так що в результаті виходить вихідне число *a*, тобто:

$$L^{-1}(L(a)) = a, \tag{3.6.4}$$

для унарної операції і

$$L^{-1}(L(a;b);b) = a \tag{3.6.5}$$

для бінарної операції, то операції L і L^{-1} є *зворотними операціями по відношенню одна до одної.*

Зауваження.

1. Відзначимо, що (-1) у формулах (3.6.4), (3.6.5) це не показник степені *L*, а лише символ «оборотності». Для *кожної* математичної операції *L* існує зворотна по відношенню до неї операція, яку прийнято позначати як L^{-1}.

2. Якщо операція L^{-1} є зворотною по відношенню до операції *L*, то і *L* є зворотною до операції L^{-1}, тобто мають місце такі формули:

$$L^{-1}(L(a;b);b) = L(L^{-1}(a;b);b) = a, \tag{3.6.6}$$

для бінарної операції і:

$$L^{-1}(L(a)) = L(L^{-1}(a)) = a, \tag{3.6.7}$$

для унарної операції.

3.Всі математичні операції, наведені в *таблиці 3.1*, можна розбити на пари взаімообратних операцій. Причому, операцію L з цієї пари називатимемо *прямою операцією*, а L^{-1} – зворотною. У таблиці 3.3 приведений список таких пар операцій.

Таблиця 3.3.

	Прямі операції		*Зворотні операції*
1	складання	1*	віднімання
2	множення	2*	ділення
3	піднесення до степеня	3*	добування кореня
4	потенціювання	4*	логарифмування
5	синус	5*	арксинус
6	косинус	6*	арккосинус
7	тангенс	7*	арктангенс
8	котангенс	8*	арккотангенс

3.7. Поняття області визначення операції (або області допустимих значень операції).

Результат операцій «*tg*» і «*ctg*» над деякими числами не існує (дивіться підрозділ 3.4, формули (3.4.5) – (3.4.9)). Така ситуація має місце і для інших операцій, які будуть розглянуті далі (дивіться таблицю 3.3). У зв'язку з цим, при розгляді тієї або іншої операції слід, перш за все, треба визначитися з тим, над якими числами ця операція може бути виконана, а над якими – ні, тобто результат її виконання не існує.

Далі для позначення *факту існування результату* виконання операції L над числом a будемо використовувати термін – *операція* L *визначена для числа а,* якщо ж результат $L(a)$ не існує, то операція L над числом *а невизначена*.

Пояснення. Слід розрізняти дві ситуації. Перша, коли результат не можна отримати «з технічних причин», але в принципі він існує, і друга, коли результат не існує в принципі. Лише для другого випадку використовується термін – операція невизначена.

Розглянемо приклад, коли результат існує, але його не можна бути записати з технічних причин. Піднесення числа $a = 217005$ до степеня $b = 3308705$: $L(217005;3308705) = 217005^{3308705}$. Отримати результат цієї дії з *технічної точки зору* непросто, але результат в принципі існує! Тобто, *операція піднесення числа* $a = 217005$ *до степеня* $b = 3308705$ *визначена.*

Інший приклад. Операція ділення числа $a = 35$ на $b = 0$. Результат операції $\frac{a}{b} = \frac{35}{0}$ не існує, тобто, операція $\frac{a}{b}$ невизначена, якщо $b = 0$. В цьому випадку доречне позначення, яке використовувалося у формулах (3.4.5) - (3.39) і $\frac{a}{0} = \infty$.

Визначення поняття *область визначення (область допустимих значень) операції.* Множина чисел D, над якими виконується операція L і результат виконання цієї операції $L(a)$ при $a \in D$ існує, називається *областю визначення операції (ОВО) або її областю допустимих значень (ОДЗ).*

Пояснення. Для операції ділення $\frac{a}{b}$ *область визначення або область допустимих значень* D можна записати так:

$$D = \begin{cases} a \in R, \quad \text{будь} - \text{яке дійсне число;} \\ b \in R, b \neq 0, \quad \text{будь} - \text{яке дійсне число окрім нуля.} \end{cases}$$

або

$$D = \{ a \mid a \in R, a \neq 0 \} \text{ .(3.7.1)}$$

3.8. Віднімання як операція зворотна до операції складання

Операція віднімання дійсного числа b з числа a символічно записується у вигляді формули: $a-b$, і може бути виконана за будь-яких числових значеннях a і b.
Тут передбачається розглянути операцію віднімання з точки зору її «обернена» по відношенню до операції складання. Для цього розглянемо приклад, який ілюстрував би визначення зворотної операції (формули (3.6.5), (3.6.6)) стосовно операції віднімання.

Нехай дія складання виконується, наприклад, над числом $a=3$, а роль «допоміжного» числа відіграватиме число $b=7.$ Запишемо, символічну формулу для цієї ситуації:

$$3 \xrightarrow{L:\ \textit{операция сложения с числом 7}} 3+7=10;$$

$$L(3;7)=3+7=10\,.(3.8.1)$$

З порівняння формул (3.6.1) і (3.6.2) випливає, що число 10 – це a_1. Тепер над цим числом виконаємо операцію L^{-1}, зворотну по відношенню до операції $L(3;7)$. Ця операція називається операцією віднімання. Формула (3.6.6) тут матиме такий вигляд:

$$10 \xrightarrow{L^{-1}:\ \textit{операция вычитания числа 7}} 10-7=3;$$

$$L^{-1}\left(\overbrace{L(3;7)}^{3+7};7\right)=(3+7)-7=3.$$

В результаті послідовного виконання двох операцій складання і віднімання над числом 3, вийшло теж число. Можна сказати, що операції складання і віднімання як би «знищують» одна одну, залишаючи незмінним число (у розглянутому прикладі – це число 3), над яким ці операції виконуються.

3.9. Ділення як операція зворотна до операції множення

Розглянемо операцію ділення як дію зворотну по відношенню до операції множення на конкретному прикладі.

Виконаємо спочатку над числом $a = 3$ операцію множення, використовуючи як допоміжне число $b = 4$, тобто:

$$3 \xrightarrow{L:\ \text{операция умножения на число } 4} 3 \cdot 4 = 12,$$

або $$L(3;4) = 3 \cdot 4 = 12.$$

Операція, зворотна по відношенню до операції множення називається діленням. Виконаємо її над результатом множення, тобто над числом *12:*

$$L^{-1}\left(\overbrace{L(3;4)}^{3\cdot 4};4\right) = (3 \cdot 4) : 4 = 3.$$

Операція ділення «знищила» операцію множення, так що у результаті вийшло вихідне число *3*.

3.10. Добуття кореня як операція зворотна до операції піднесення до степеня

Нехай над числом *5* виконується дія піднесення до ступеня *3* (це число є «допоміжним»):

$$5 \xrightarrow{L:\ \text{возведение в степень } 3} 5^3,$$

або $$L(5;3) = 5^3 = 125.$$

Виконаємо тепер над отриманим числом $L(5;3)$ операцію, зворотну дії піднесення до степеня. Ця операція називається *операцією здобуття кореня.* У нашому прикладі – це буде корінь третього степеня або корінь кубічний:

$$5^3 \xrightarrow{L^{-1}:\ \text{извлечение корня степени } 3} \sqrt[3]{5^3} = 5, \quad (3.10.1)$$

$$L^{-1}\left(\overbrace{L(5;3)}^{5^3};3\right)=\sqrt[3]{5^3}=5. \qquad (3.10.2)$$

Для позначення операції зворотної до дії піднесення до ступеня може бути використано й інше позначення. Річ у тому, що «нейтралізувати» операцію піднесення до ступеня можна таким чином (дивіться формулу (3.3.13)):

$$5^3 \xrightarrow{L^{-1}:\ \text{возведение в степень}\ \frac{1}{3}} \left(5^3\right)^{\frac{1}{3}} \overset{(18)}{=} 5^{3\cdot\frac{1}{3}}=5^1=5. \qquad (3.10.3)$$

Порівнюючи формули (3.10.2) і (3.10.3), можна записати, що:

$$\sqrt[3]{5^3}=\left(5^3\right)^{\frac{1}{3}}. \qquad (3.10.4)$$

Узагальнюючи результат (3.10.4), отримаємо:

$$\sqrt[n]{a}=(a)^{\frac{1}{n}}. \qquad (3.10.5)$$

Зауваження

1. Якщо над числом a виконується операція записана у вигляді формули $a^{\frac{m}{n}}$, то враховуючи що:

- по-перше, дріб $\frac{m}{n}$ можна записати у вигляді добутку таким чином:

$$\frac{m}{n}=\left[\begin{array}{l} m\cdot\frac{1}{n}; \\ \frac{1}{n}\cdot m; \end{array}\right. \qquad (3.10.6)$$

- по-друге, властивість операції піднесення до степеня (3.3.13) дію $a^{\frac{m}{n}}$ можна записати у вигляді:

$$a^{\frac{m}{n}}=\left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} \overset{(46)}{=} \sqrt[n]{a^m}, \qquad (3.10.7)$$

або

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{m} \overset{(46)}{=} \left(\sqrt[n]{a}\right)^{m}. \qquad (3.10.8)$$

2. Операцію здобуття кореня парного степеня з числа a не завжди може виконати.

3.Область визначення (дивитеся 3.7*) операції* $\sqrt[n]{a}$ має такий вигляд:

$$D\left(\sqrt[n]{a}\right) = \left[\begin{array}{ll} a \geq 0, & якщо \quad n - парне; \\ a \in R, & якщо \quad n - непарне. \end{array}\right.$$ або

$$D\left(\sqrt[n]{a}\right) = \{\, a \mid a \in R, a \geq 0 \,\} . \qquad (3.10.9)$$

3.11. Логарифмування як операція зворотна до операції потенціювання

Дія логарифмування (символ *log*) може виконуватись лише над *додатним числом a* за допомогою «допоміжного *додатного числа b*» *не рівного одиниці:*

$$log_b\, a = c. \qquad (3.11.1)$$

$$a > 0, \quad b > 0, \quad b \neq 1, \quad c \in R. \qquad (3.11.2)$$

Результат c може бути будь-яким дійсним числом, якщо він існує.

Пояснення. У формулі (3.11.2) міститься інформація про область визначення D операції логарифмування, яку, дотримуючись прийнятих позначень (дивіться підрозділ 3.7), слід написати так:

$$D\left(log_b\, a\right) = \begin{cases} a > 0, \\ b > 0, \\ b \neq 1. \end{cases} \text{або} \quad D\left(log_b\, a\right) = \left\{ a \mid a, b \in R, a > 0, b > 0, b \neq 1 \right\} \qquad (3.11.3)$$

Дія логарифмування є дією зворотною до дії потенціювання. Це означає, що, якщо, наприклад, над числом $a = 4$ виконати операцію потенціювання з основою $b = 3$ (число 3 «відіграє роль допоміжного числа»):

$$4 \xrightarrow[\text{по основанию } 3]{L\text{: потенцирование}} 3^4,$$

$$L(4;3) = 3^4,$$

а потім над результатом 3^4 виконати операцію логарифмування за той же основою $b = 3$:

$$3^4 \xrightarrow[\text{по основанию } 3]{L^{-1}\text{: логарифмирование}} log_3 3^4,$$

$$L^{-1}\left(L(4;3),3\right) = log_3\left(3^4\right),$$

то в результаті вийде вихідне число 4. Тобто:

$$log_3\left(3^4\right) = 4. \tag{3.11.4}$$

Узагальнюючи результат (3.11.4) на випадок довільного числа a, можна записати таку рівність:

$$log_b\left(b^a\right) = a. \tag{3.11.5}$$

Причому «допоміжне число» $b \in R, b > 0, b \neq 1$.

Пояснення. Формула (3.11.5) допускає таке тлумачення: будь-яке число a можна *«записати у вигляді логарифма»* з довільно вибраною основою b. Так, наприклад, на вираз (3.11.4) можна поглянути як на рівність, в якій *«число 4 записане у вигляді логарифма»* з основою *3*.

При записі числа «у вигляді логарифма» вибирати основу можна довільним чином, маючи на увазі обмеження (3.11.3). Число *4* тоді можна записати так (дивіться формулу (3.11.4)):

$$4 = log_3\left(3^4\right) = log_{25}\left(25^4\right) = log_{0,3}\left(0,3^4\right). \tag{3.11.6}$$

Властивості операції логарифмування

$$log_b 1 = 0; \tag{3.11.7}$$

$$log_a a = 1. \qquad (3.11.8)$$

$$log_b(a \cdot c) = log_b a + log_b c. \qquad (3.11.9)$$

$$log_b\left(\frac{a}{c}\right) = log_b a - log_b c. \qquad (3.11.10)$$

$$log_b a^p = p \cdot log_b a. \qquad (3.11.11)$$

$$log_{b^p} a = \frac{1}{p} log_b a. \qquad (3.11.12)$$

$$log_b a = \frac{log_c a}{log_c b}. \qquad (3.11.13)$$

$$log_b a = \frac{1}{log_a b}. \qquad (3.11.14)$$

Зауваження.

Формулу (3.11.8) називають *логарифмічною одиницею*. З її допомогою зручно записувати числа «у вигляді логарифма».

Приклад. Запишіть, число *25* у вигляді логарифма з основою *3*.

Розв'язання. Основу b можна вибирати будь-яке. Тут величина основи нав'язана: $b = 3$, тому результат виглядатиме так: $25 = log_3 3^{25}$.

3.12. Зворотні тригонометричні операції

Якщо над числом $a = 4$ виконати операцію синус:

$$4 \xrightarrow{L:\ "sin"} sin 4,$$

то, виконавши над отриманим результатом операцію, зворотну до синуса, яка називається *арксинус («arcsin»)*, в результаті повинно вийти число *4*:

$$sin\,4 \xrightarrow{L^{-1}:\ \ "arc\,sin"} arc\,sin\left(sin\,4\right),$$

$$arc\,sin\left(sin\,4\right) = 4\,. \qquad (3.12.1)$$

Для довільного числа *a* формулу (3.73) можна записати так:

$$arc\,sin\left(sin\,a\right) = a\,. \qquad (3.12.2)$$

Формула (3.12.2) визначає операцію *«arcsin»* як операцію, зворотну по відношенню до дії *«sin»*.

Зауваження.

1. Якщо операція *«arcsin»* виконується над деяким числом a_1 і результатом її виконання є число b, тобто:

$$arc\,sin\,a_1 = b\,,$$

то має місце таке твердження.

Число a_1, над яким виконується операція *«arcsin»*, може набувати значень, що належать лише відрізку $\left[-1;\,1\right]$. Іншими словами, область визначення *D* операції *«arcsin»* має такий вигляд:

$$D = \left\{a_1 \middle| a_1 \in R, -1 \le a_1 \le 1\right\} \qquad (3.12.3)$$

2. Якщо $a_1 \notin \left[-1;\,1\right]$, то операція *«arcsin»* не може бути виконана, тобто вона *невизначена* при цих числових значеннях a_1. Наприклад, операція $arc\,sin\,1,25$ невизначена, оскільки число, над яким виконується дія $(1,25)$ більше одиниці.

Операції $"arccos"$, $"arctg"$, $"arcctg"$ зворотні для операцій $"cos"$, $"tg"$, $"ctg"$ визначаються формулами, аналогічними формулі (3.12.2):

$$arccos\left(cos\,a\right) = a\,, \qquad (3.12.4)$$

$$arctg\left(tga\right) = a\,, \qquad (3.12.5)$$

$$arcctg\left(ctga\right) = a\,. \qquad (3.12.6)$$

Зауваження.

1. Якщо операція *«arccos»* виконується над числом a_1, то це число може набувати значень, які належать лише відрізку $[-1;\,1]$. Тобто, операція *«arccos»* визначена на відрізку $[-1;\,1]$.

$$D(\arccos a_1) = \{-1 \le a_1 \le 1\}. \tag{3.12.7}$$

2. Операції $\mathrm{arctg}\, a_1$ і $\mathrm{arcctg}\, a_1$ *визначені* при будь-яких значеннях a_1.

$$\begin{aligned} D(\mathrm{arc\,tg}\, a_1) &= \{-\infty \le a_1 \le \infty\}, \\ D(\mathrm{arc\,ctg}\, a_1) &= \{-\infty \le a_1 \le \infty\}. \end{aligned} \tag{3.12.8}$$

Література

1. Кравчук В., Підручна М., Янченко Г. Алгебра. Підручник для 8 класу./За редакцією З.І.Слепкань. - Тернопіль: Підручники і посібники, 2006. - 232 с.
2. Кравчук В., Підручна М., Янченко Г. Алгебра. Підручник для 9 класу./За редакцією З.І.Слепкань. - Тернопіль: Підручники і посібники, 2005. - 256 с.
3. Шкіль М.І., та інші. Алгебра і початки аналізу: Підручник для 10 класу загальноосвіт. навч. закладів - К:, Зодіак - ЕКО, 2006. - 272 с.
4. Шкіль М.І., та інші. Алгебра і початки аналізу: Підручник для 11 класу загальноосвіт. навч. закладів - К:, Зодіак - ЕКО, 2006. - 384 с.
5. Крижанівська Т.В. Методичні вказівки до самостійного вивчення контрольних робіт з дисципліни " Математика" для учнів факультету довузівської підготовки. - Одеса: ОДЕКУ, 2006 - 68 с.
6. Крижанівська Т.В. Методичні вказівки до самостійного вивчення контрольних робіт з дисципліни " Математика" для учнів факультету довузівської підготовки. - Одеса: ОДЕКУ, 2007-51с.
7. Крижанівська Т.В. Методичні вказівки до самостійного вивчення контрольних робіт з дисципліни " Математика" для учнів факультету довузівської підготовки. - Одеса: "Екологія", 2005 - 50 с.
8. Дворецька Л.П., Захарійченко Ю.Ю., Мерзляк А.Г. та інші, Зовнішнє оцінювання. Математика. Навч. посібн. Із підготов, до зовніш. Оцінювання учнів загальноосвітн. навч. закл.: Укр. Центр оцінювання якості освіти. - К., 2007. - 64 с.
9. Захарійченко Ю.О. Школьнийо.В. Математика: 36. тест, завдань для підготовки до зовнішньогонезалежного. оцінювання. - К.: Генеза, 2009. - 104 с.

ДОДАТОК А

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Підготовче відділення

Контрольна робота № ______

з ____ варіант ________
(назва дисципліни)

____
(прізвище, ім’я, по батькові)

Електрона адреса____

«___» _________ 20__ р.

<table>
<tr><td rowspan="2">П.І.Б. слухача</td><td>Дата отримання завдання СРС</td><td colspan="8">Дати виконання етапів КР по РП</td><td rowspan="2">П.І.Б.
Підпис викладача</td></tr>
<tr><td>ПВ/кафедра/викладач/
мережа Internet</td><td colspan="8">Дати фактичного виконання</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1. Петров В.С.</td><td>25.11.20__ р.</td><td>15.01</td><td>31.01</td><td>15.02</td><td>28.02</td><td>1.03</td><td>31.03</td><td>15.04</td><td>30.04</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>Підготовче відділення</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Дата реєстрування контрольної роботи на
Підготовчому відділенні _______ печать
Дата реєстрування контрольної роботи на
кафедрі довузівської підготовки ___________