МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ЗБІРНИК МЕТОДИЧНИХ ВКАЗІВОК ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З ДИСЦИПЛІНИ ”ГІДРОЛОГІЧНІ РОЗРАХУНКИ”

Одеса - 2005

Збірник методичних вказівок до практичних занять з дисципліни “Гідрологічні розрахунки”.
/ проф. Лобода Н.С.– Одеса, ОДЕКУ, 2005. – 56 с.

Методичні вказівки призначені для студентів ІІІ курсу денної форми навчання за спеціальністю “Гідрологія та гідрохімія“.

ЗМІСТ

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Мета та задачі

При вивченні розділу дисципліни „Гідрологічні розрахунки”, у якому розглядаються теоретичні та практичні основи методів математичної статистики та особливості їх застосування до розрахунків стоку, студенти повинні отримати вміння та знання, які стосуються розуміння стохастичної природи стокових величин, імовірнісної оцінки характеристик стоку.

Метою методичних вказівок є закріплення студентами знань, отриманих при вивченні теоретичних розділів „Методи визначення статистичних параметрів стоку” та “Теоретичні закони розподілу випадкових величин і їх застосування у гідрологічних розрахунках”.

Задача методичних вказівок - вироблення практичних навичок визначення імовірнісних характеристик стоку на базі даних спостережень.

У результаті вивчення розділів „Методи визначення статистичних параметрів стоку” та “Теоретичні закони розподілу випадкових величин і їх застосування у гідрологічних розрахунках” студенти повинні:

Знати

- методи оцінки статистичних параметрів стоку та особливості їх застосування у розрахунках стоку;
- вимоги до теоретичних законів розподілу при розрахунках стоку;
- теоретичні закони розподілу випадкових величин, що найбільш поширені у розрахунках стоку;
- основи теорії випадкових процесів.

Вміти

- розраховувати статистичні параметри стоку за методом моментів, найбільшої правдоподібності, графо-аналітичним методом;
- оцінювати точність визначення статистичних параметрів за вибірками;
- будувати емпіричну криву забезпеченостей;
- визначати величини стоку заданої забезпеченості з використанням таких теоретичних законів розподілу випадкових величин як Пірсона III, трипараметричного гама-розподілу, логарифмічно-нормального;
- визначати коефіцієнт автокореляції таураховувати наявність зв’язку між суміжними членами рядів при розрахунках статистичних параметрів.

Згідно з програмою курсу “Гідрологічні розрахунки” на вивчення розділу „Методи визначення статистичних параметрів стоку” та “Теоретичні закони розподілу випадкових величин та їх застосування у гідрологічних розрахунках” відведено 24 години лекційного курсу та 24 години практичних занять. Лекційні часи та практичні роботи утворюють 2 модулі. Після завершення кожного модуля студенти пишуть контрольну роботу. До модульного контролю виконання практичних робіт входять відповіді на контрольні запитання.

Контрольні запитання

1. Як визначити статистичні параметри за методом моментів (записати формули розрахунків)?
2. Як визначити статистичні параметри за методом найбільшої правдоподібності (записати формули розрахунків)?
3. Як визначити статистичні параметри за графо-аналітичним методом (записати формули розрахунків)?
4. Описати властивості та указати межі застосування закону розподілу Пірсона III при гідрологічних розрахунках.
5. Описати властивості та указати межі застосування трипараметричного гама – розподілу при гідрологічних розрахунках.
6. Як побудувати емпіричну криву забезпеченостей?
7. Як розрахувати стік заданої забезпеченості за законом Пірсона III?
8. Як розрахувати стік заданої забезпеченості за трипараметричним законом гама-розподілу?
9. Як визначити коефіцієнт автокореляції?
10. Як виконується уточнення статистичних параметрів за допомогою коефіцієнта автокореляції?

За основу викладених у збірнику методичних вказівок питань взято такі труди як монографія А.В. Рождєственьского “Статистические методы в гидрологии”, підручника В.А. Шелутко “Численные методы в гидрологии”, підручника “Обробка та аналіз гідрометеорологічної інформації”, підготовленого авторами Школьним Є.П., Лоєвою І.Д., Гончаровою Л.Д.

1 ОСОБЛИВОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ У ГІДРОЛОГІЧНИХ РОЗРАХУНКАХ

Математична статистика - це прикладна математична дисципліна, що споріднa теорії ймовірностей. Задача математичної статистики полягає у тому, щоб на підставі властивостей деякої підмножини (вибірки) зробити висновки про властивості усієї множини (генеральної сукупності) в цілому.

Теоретичним обґрунтуванням можливості застосування статистичних методів при розрахунках стокових величин є так звані граничні теореми теорії ймовірності. Перша група теорем (закон великих чисел) має такий фізичний зміст: при дуже великій кількості випадкових явищ їх середній результат практично перестає бути випадковим і передбачається з великим ступенем певності, тобто встановлюється факт наближення середніх характеристик великої кількості дослідів до деяких визначених сталих.

Друга група теорем (центральна гранична теорема) стосується законів розподілу випадкової величини. Усі форми центральної граничної теореми присвячуються установленню умов, при котрих виникає нормальний закон розподілу. А виникає він у тих випадках, коли випадкова величина може бути представленою у вигляді суми великої кількості незалежних доданків, кожен з яких досить мало впливає на саму суму.

Дійсно, річковий стік можна розглядати як подію, що є результатом взаємодії великої кількості різних стокоформуючих факторів, але ступінь впливу кожного з них на формування явища, що розглядається, не можна врахувати в повній мірі, окрім того, деякі фактори можуть бути пов'язані одне з одним. У зв'язку з цим ряди стоку мають свої особливості, що відокремлюють їх від більшості сукупностей випадкових гідрометеорологічних величин. Ці особливості можна сформулювати таким чином.

1. У розпорядженні спеціаліста-гідролога найчастіше є обмежена вихідна інформація: тривалість спостережень за стоком, як правило, не перевищує 30-40 років. Тому під час гідрологічних розрахунків практично не використовуються згруповані ряди.
2. Ряди стокових величин характеризуються додатною асиметрією, тобто переважають додатні відхилення від центру розподілу, на відміну від нормально розподіленої випадкової величини, де асиметрія дорівнює нулю. Окрім того, між суміжними членами рядів встановлено зв'язок, який кількісно може бути охарактеризованим коефіцієнтом автокореляції r(1).

3.Значення стоку завжди додатні. Область визначення стоку як випадкової величини знаходиться у границях від нуля до безкінечності: $X \in (0, +\infty)$. Нагадуємо, що випадкова величина з нормальним законом розподілу ймовірностей змінюється від -∞ до +∞.

4. Ряди стокових величин можуть бути неоднорідними за часом, що обумовлюється водогосподарськими перетвореннями на водозборах (будівництво водосховищ, перекид стоку з однієї річки в другу, скидання у поверхневі водотоки підземних вод, інтенсивні забори води на зрошення та інш.).

Перелічені особливості вимагають пошуку вирішення таких задач при первинній статистичній обробці результатів:

- оцінка статистичної однорідності рядів;
- вибір теоретичного закону розподілу випадкової величини, який задовільно узгоджується з емпіричним (у практиці гідрологічних розрахунків найчастіше застосовуються закон Пірсона III-го типу та трипараметричний гама-розподіл С.М. Крицького та М.Ф. Менкеля);
- оцінка статистичних параметрів розподілу по стоковим рядам;
- оцінка точності розрахунку статистичних параметрів по вибірковим даним;
- урахування у розрахунках зв'язку між суміжними членами рядів стоку.

Отже, якщо річний стік - випадкова величина, то він має якийсь розподіл ймовірностей, що може бути описаний тим чи іншим теоретичним законом розподілу. Параметрами розподілу ймовірностей (статистичними параметрами) є числові характеристики, що дозволяють робити висновки про властивості закону розподілу ймовірностей випадкової величини. Оскільки ми маємо у розпорядженні тільки обмежені за часом результати спостережень за стоком (випадкову вибірку з усієї генеральної сукупності), то у подальшому мова може йти тільки про більш чи менш наближені кількісні характеристики розподілу. Тому статистичні параметри, які розраховані по вибіркам, мають назву оцінок статистичних параметрів. До статистичних параметрів висуваються такі вимоги;

1. Оцінки повинні бути незміщеними, тобто математичне сподівання оцінки дорівнює значенню статистичного параметра генеральної сукупності.

2. Оцінки мають бути ефективними: їх розсіяння відносно значення параметру генеральної сукупності щонайменше з усіх можливих.

3. Оцінки повинні бути умотивованими, тобто сходитися по ймовірності до параметру генеральної сукупності.

1.1 Розрахунки статистичних параметрів за методом моментів

В основі цього методу лежить визначення статистичних параметрів кривих розподілу через статистичні моменти. Поняття моментів прийшло в статистику а механіки, де воно використовується для опису розподілу мас. У статистиці значення дискретної випадкової величини представляється у вигляді матеріальної точки з масою пропорційною ймовірності з'явлення цієї випадкової величини.

Тоді сума добутків усіх можливих значень випадкової величини x_i на Імовірність цих значень p_i являє собою абсцису центру тяжіння усієї системи N матеріальних точок (математичне сподівання):

$$m_x = \sum_{i=1}^{N} p_i x_i \tag{1.1}$$

або середньозважене із значень x_i, причому кожне із значень під час осереднення враховується з вагою, пропорційною імовірності появи цього значення

$$m_x = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n}{p_1 + p_2 + ... + p_n} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i p_i}{\sum_{i=1}^{N} p_i}; \tag{1.2}$$

де $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$

При описуванні властивостей статистичних сукупностей використовуються моменти двох видів: початкові α та центральні μ

$$\alpha_s = \sum_{i=1}^{N} x_i^s p_i ; \tag{1.3}$$

$$\mu_s = \sum_{i=1}^{N} (x_i - m_x)^s p_i ; \tag{1.4}$$

де S - порядок моменту.

Перший початковий момент α_1 дорівнює математичному сподіванню m_X. Другий центральний момент називають дисперсією і позначають σ_x^2. З них найбільше застосування у статистиці знайшли статистичні моменти α_1, μ_2, μ_3, μ_4 та їх безрозмірні характеристики (нормовані моменти). Останні мають такий вигляд:

- коефіцієнт варіації

$$C_V = \frac{\sqrt{\mu_2}}{m_X}, \quad \text{або} \quad C_V = \frac{\sigma_X}{m_X}, \tag{1.5}$$

- коефіцієнт асиметрії

$$C_S = \frac{\mu_3}{\sigma_X^3}, \tag{1.6}$$

- ексцес

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma_X^4} - 3 \tag{1.7}$$

Кожен з цих моментів містить у собі певну інформацію про характер розподілу випадкової величини. Перший початковий момент α_1 або ***математичне сподівання*** m_X, є центром розподілу випадкової величини.

Другий центральний момент μ_2 або дисперсія σ_x^2 характеризує розсіювання значень випадкової величини відносно математичного сподівання. Дисперсія випадкової величини має розмірність квадрату випадкової величини. Але для більш наочної характеристики розсіювання зручно користуватися величиною, розмірність якої співпадає з розмірністю випадкової величини. Для цього з дисперсії добувають квадратний корінь. Отримана величина називається ***середнім квадратичним відхиленням*** (стандартом) випадкової величини і позначується символом σ_X. Стандарт представлений у безрозмірному вигляді (1.5) називається ***коефіцієнтом варіації***.

Третій центральний момент μ_3 служить характеристикою асиметрії розподілу. Якщо розподіл випадкової величини симетричний відносно m_X, то μ_3 дорівнює нулю. Безрозмірна характеристика асиметрії (1.6) називається ***коефіцієнтом асиметрії***.

Четвертий центральний момент μ_4 використовується для характеристики так званої "крутості", тобто гостровершинності, кривої розподілу. Ця властивість розподілу описується за допомогою так званого ексцесу (1.7). Число 3 віднімається від співвідношення тому, що для нормального закону розподілу $\mu_4/\sigma_x^4 = 3$. Отже ексцес нормального закону розподілу E дорівнює 0. Додатній ексцес означає, що крива більш гостровершинна у порівнянні з нормальною. Більш плоскі відносно нормальної криві мають від'ємний ексцес.

Розглянемо вибіркові оцінки перелічених моментів

$$\hat{\alpha}_1 = \hat{m}_{x-\bar{x}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \hat{p}_i ; \tag{1.8}$$

$$\hat{\beta}_2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \hat{m}_x)^2 \hat{p}_i ; \tag{1.9}$$

$$\hat{\beta}_3 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \hat{m}_x)^3 \hat{p}_i ; \tag{1.10}$$

$$\hat{\beta}_4 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \hat{m}_x)^4 \hat{p}_i ; \tag{1.11}$$

де n – довжина вибірки;
α_1, β_2, β_3, β_4 - вибіркові оцінки статистичних моментів;
p_i - відносна частота кожного значення x_i .

Вибіркова оцінка математичного сподівання називається середнім арифметичним значенням і позначається як $\bar{x}$. Якщо вихідний ряд розглядати як такий згрупований ряд, у якому кожному значенню випадкової величини відповідає абсолютна частота, що дорівнює одиниці, тоді відносна частота розраховується за формулою

$$\hat{p}_i = \frac{1}{n} \; . \tag{1.12}$$

формули для розрахунків статистичних моментів набувають такого вигляду

$$\hat{\alpha} = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} , \tag{1.13}$$

$$\hat{\beta}_2 = \hat{\sigma}_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}, \tag{1.14}$$

$$\hat{\beta}_3 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3}{n}, \tag{1.15}$$

$$\hat{\beta}_4 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^4}{n}. \tag{1.16}$$

Нормовані статистичні моменти C_V та C_S можна виразити через модульні коефіцієнти κ_i .

$$C_v = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(k_i - 1)^2}{n}}, \tag{1.17}$$

$$C_s = \frac{\sum_{i=1}^{n}(k_i - 1)^3}{nC_v^3}, \tag{1.18}$$

де $$k_i = \frac{x_i}{\bar{x}}. \tag{1.19}$$

Оцінки центральних статистичних моментів другого, третього та більш вищих порядків не відповідають вимогам незміщеності. Отже при використанні розрахункових формул, наведених вище, ми будемо обчислювати моменти з систематичною похибкою. Для уникнення цього у формули (1.14), (1.15) та (1.17), (1.18) вводяться поправочні коефіцієнти:

для другого центрального моменту

$$\frac{n}{n-1}, \tag{1.20}$$

для третього

$$\frac{n^2}{(n-1)(n-2)}. \tag{1.21}$$

В результаті розрахункові формули мають такий вигляд

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}, \tag{1.22}$$

або

$$\hat{C}_v = \frac{\hat{\sigma}_x}{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(k_i - 1)^2}{n-1}}\;, \tag{1.23}$$

$$\hat{C}_s = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3}{\hat{\sigma}_x^3}\frac{n}{(n-1)(n-2)}, \tag{1.24}$$

або

$$\hat{C}_s = \frac{\sum_{i=1}^{n}(k_i - 1)^3}{\hat{C}_v^3}\frac{n}{(n-1)(n-2)}\;. \tag{1.25}$$

Що стосується ексцесу, то ця характеристика розподілу не використовується у гідрологічних розрахунках, тому що навіть при відносно довгих рядах стоку вона є недостовірною.

Слід відзначити, що введення поправочних множників (1.20) та (I.21) допомагає усунути зміщеність параметрів стокових рядів лише при $C_V \leq 0.5$. При $C_V > 0.5$ застосування методу моментів у гідрологічних розрахунках не рекомендується.

2 РОЗРАХУНКИ СТАТИСТИЧНИХ ПАРАМЕТРІВ СТОКУ ЗА МЕТОДОМ НАЙБІЛЬШОЇ ПРАВДОПОДІБНОСТІ

Походження назви цього методу пов'язане з застосуванням функції правдоподібності до визначення статистичних параметрів трьох параметричного гама-розподілу С.М. Крицького та М.Ф.Менкеля.

З одного боку, функція функція правдоподібності – це ймовірність сумісної появи вибірки в цілому. З другого, ймовірність сумісної появи події - це добуток ймовірностей появи кожної з подій. Отже, це добуток щільностей ймовірності усіх елементів вибірки, що містять у собі невідомий параметр, який треба оцінити.

Метод найбільшої правдоподібності - метод математичної статистики, у якому за оцінку невідомого значення параметру щільності імовірності береться те його значення, при якому функція правдоподібності досягає свого максимуму для даної вибірки випадкових величин., звідки і пішла назва – метод найбільшої правдоподібності. Математичний вираз для функції правдоподібності з невідомим параметром θ має такий вигляд:

$$L(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \theta)=f(x_1, \theta), f(x_2, \theta),\ldots, f(x_n, \theta) \qquad (2.1)$$

Відповідно до правил диференційного числення для того, щоб знайти оцінку θ, необхідно вирішити рівняння

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 . \qquad (2.2)$$

З ціллю спрощення розрахунків функцій правдоподібності її логарифмують і розглядають рівняння

$$\frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0 . \qquad (2.3)$$

Таким чином, якщо для деякого параметра θ існує його ефективна оцінка, то вона є єдиним в цьому випадку рішенням рівняння (2.3). Метод найбільшої правдоподібності приводить до обґрунтованих оцінок з незначним зміщенням. Але вид розрахункових формул статистичних параметрів залежить від обраного закону розподілу випадкової величини. Є.Г.Блохінов застосував метод найбільшої правдоподібності до трипараметричного гама-розподілу С.М.Крицького та М.Ф.Менкеля. Строге рішення приводить до складних трансцендентних рівнянь. У зв'язку з цим був запропонований спрощений засіб оцінки параметрів. У результаті отримані такі статистики

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}; \tag{2.4}$$

$$\hat{\lambda}_2 = \frac{\sum_{i=1} \lg \frac{x_i}{\bar{x}}}{n}; \tag{2.5}$$

$$\hat{\lambda}_3 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\bar{x}} \lg \frac{x_i}{\bar{x}}}{n}. \tag{2.6}$$

Перша із статистик $\hat{\lambda}_1$, дорівнює середньоарифметичному значенню випадкової величини $\overline{X}$. Дві другі (λ_2, λ_3) функціонально зв'язані з коефіцієнтом варіації C_V та коефіцієнтом асиметрії C_S. Для переходу від λ_2 та λ_3 до C_V та C_S /C_V побудовані спеціальні номограми.

Деяка зміщеність параметрів λ_2 та λ_3 може бути усунена за рахунок поправочного множника $\frac{n}{n-1}$, тоді

$$\hat{\lambda}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lg k_i}{n-1}; \tag{2.7}$$

$$\hat{\lambda}_3 = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i \lg k_i}{n-1}. \tag{2.8}$$

3 ТОЧНІСТЬ ОЦІНОК СТАТИСТИЧНИХ ПАРАМЕТРІВ СТОКУ, РОЗРАХОВАНИХ ЗА МЕТОДОМ МОМЕНТІВ ТА МЕТОДОМ НАЙБІЛЬШОЇ ПРАВДОПОДІБНОСТІ

Як вже відмічалося вище, оцінка параметру може відрізнятися від значення цього ж параметру генеральної сукупності. Якість оцінок визначається їх систематичними та випадковими похибками. Систематичні похибки можна усунути, а випадкові лише оцінити. Вичерпне уявлення про випадкові похибки оцінок параметрів дає знання їх закону розподілу, але оскільки ряди стоку підкоряються розподілу, який відрізняється від нормального, встановити закон розподілу вибіркових оцінок іноді неможливо. У гідрологічних розрахунках встановлюють середньоквадратичну похибку оцінок, яка є основним показником випадкових похибок. Оцінювання середньоквадратичного відхилення вибіркових оцінок параметрів проводилося на основі метода статистичних іспитів (Монте Карло) за таким алгоритмом.

1. Генерація генеральної сукупності стокових величин за обраною функцією розподілу і заданими статистичними параметрами, яка розбивається на вибірки менші за об'ємом.
2. Розрахунки зміщених оцінок параметрів по вибіркам.
3. Усунення зміщеності оцінок.
4. Розрахунки середньоквадратичного відхилення незміщених оцінок від значення параметрів генеральної сукупності.

Саме таким шляхом були розроблені формули середньоквадратичного відхилення параметрів C_S та C_V. Що стосується оцінки математичного сподівання, то його середньоквадратичне відхилення розраховується за формулою розробленою для величин, які підкорюються нормальному закону розподілу, тобто

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}, \tag{3.1}$$

дотримуючись при цьому припущення, що нормальний закон розподілу вибіркових середніх зберігається і для вибірок, які відхиляються від нормального розподілу.

Для рядів, що не мають внутрішньорядного зв'язку (r=0), стандарт вибіркових параметрів, оцінених по методу моментів та найбільшої правдоподібності розраховується за формулами (таблиця 3.1).

Якщо $C_s / C_V \neq 2.0$ стандарт вибіркової оцінки C_V, визначеної методом найбільшої правдоподібності, коректується за допомогою поправочного коефіцієнта виду:

$$K_{C_v} = \frac{\varphi_{C_v}\ (\text{при}\quad C_v = mC_v)}{\varphi_{C_v}\ (\text{при}\quad C_s = 2C_v)},$$

який знімається з графіка залежності K_{C_v} від вибіркових оцінок C_v та C_s / C_v (рис. 3.1).

Таблиця 3.1 – Формули для оцінки випадкових похибок розрахунків статистичних параметрів

Параметр	Середньоквадратичне відхилення параметру	
	Метод моментів	Метод найбільшої правдоподібності
$\overline{X}$	$\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$	$\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$
C_v	$\sigma_{C_V} = \frac{C_v}{n + 4C_v^2}\sqrt{\frac{n(1 + C_v^2)}{2}}$	$\sigma_{C_V} = \frac{C_v}{\sqrt{2n}}\sqrt{\frac{3}{3 + C_v^2}}$ для $C_s / C_v = 2$
C_s	$\sigma_{C_S} = \sqrt{\frac{6}{n}(1 + 6C_v^2 + 5C_v^4)}$	
C_v / C_s	$\sigma_{C_S / C_V} = \frac{1}{C_v}\sqrt{\frac{6}{n}}$	Рисунок 3.2

Стандарт відношення C_s / C_v, встановленого за методом найбільшої правдоподібності, також можна знайти, використовуючи зв'язок σ_{C_s / C_v} та C_v (рис.3.2).

Відношення стандарту вибіркової оцінки до значення самого вибіркового параметру, виражене у відсотках, називається відносним середньоквадратичним відхиленням вибіркового параметру від параметру генеральної сукупності

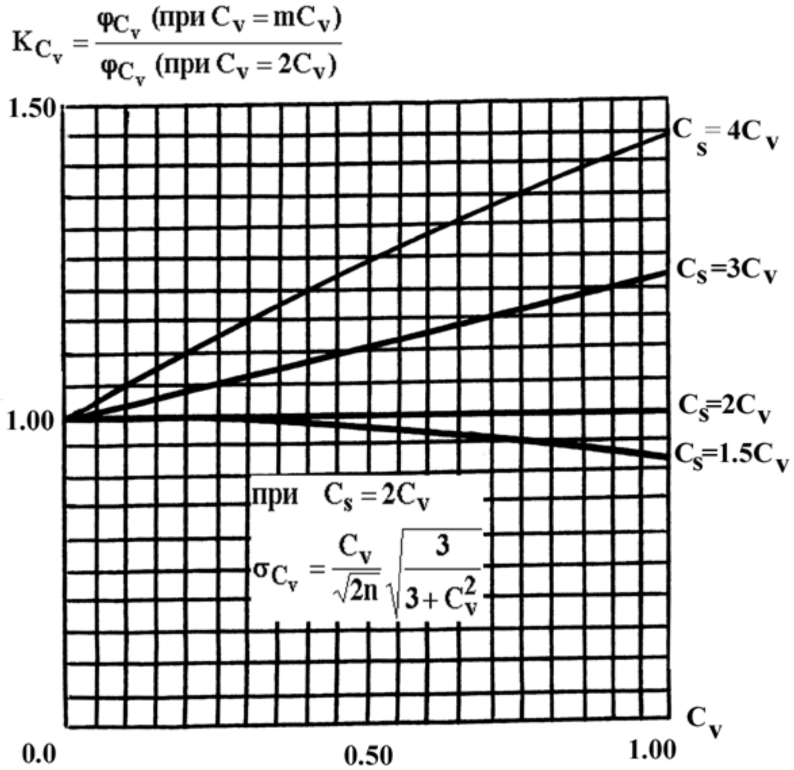

Рисунок 3.1 Графік для обчислення стандарту коефіцієнту варіації при різних C_S / C_V для трипараметричного гама-розподілу

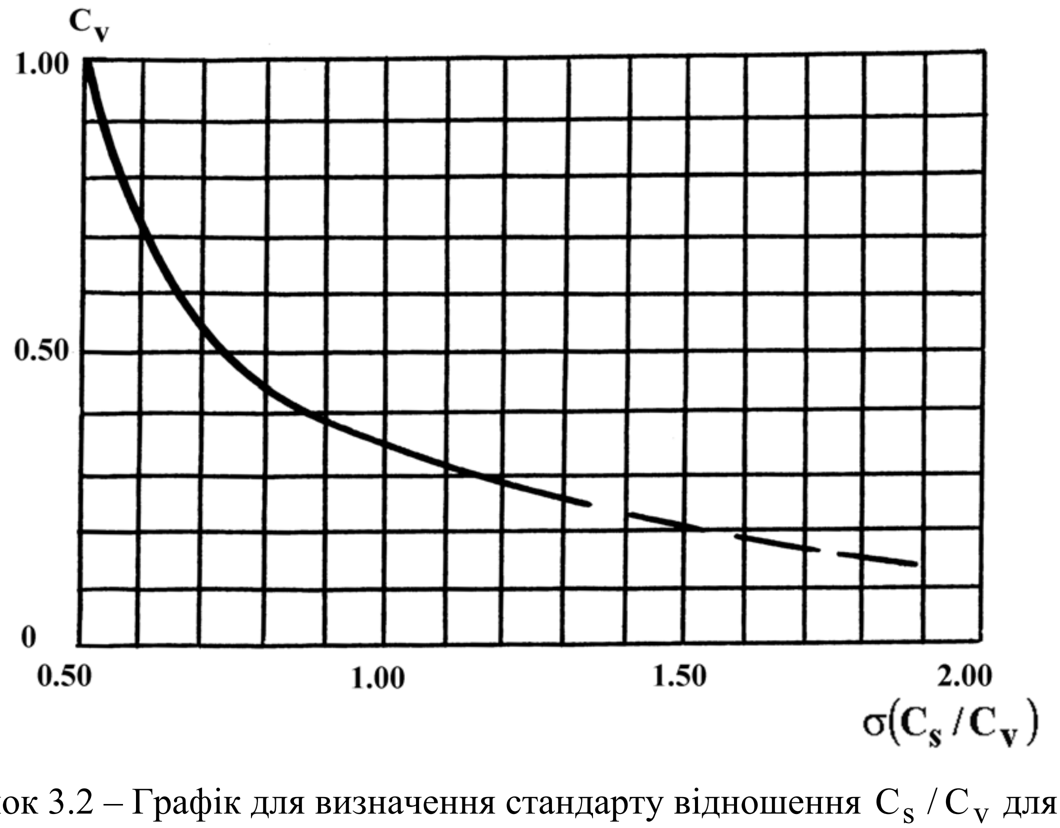

Рисунок 3.2 – Графік для визначення стандарту відношення C_S / C_V для трипараметричного гама-розподілу

$$\varepsilon_{\bar{x}} = \frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}} 100\% = \frac{C_V \bar{x}}{\sqrt{n}\bar{x}} 100\%, \tag{3.2}$$

$$\varepsilon_{C_V} = \frac{\sigma_{C_V}}{C_V} 100\%, \tag{3.3}$$

$$\varepsilon_{C_S} = \frac{\sigma_{C_S}}{C_S} 100\%. \tag{3.4}$$

Відносні середньоквадратичні відхилення або відносні похибки визначення вибіркових параметрів використовується, як критерій якості розрахунків або, як критерій достатньої чи недостатньої тривалості спостережень за стоком. Наприклад, при розрахунках річного стоку тривалість періоду спостережень за стоком визнається достатньою, якщо ε_x < 5-10%, ε_{Cv}<15%. У протилежному випадку ці оцінки статистичних параметрів уточняються по даним річок-аналогів з набагато більшим періодом спостережень. Метод уточнення має назву методу приведення рядів стоку до тривалого періоду за методом аналогії. Вибіркові значення коефіцієнта асиметрії, як правило, мають великі середньоквадратичні відхилення і його відносне значення (ε_{Cs}) досягає 50-70% від вибіркового значення самого параметру. У зв'язку з цим оцінки параметра C_S, або співвідношення C_S/C_V осереднюються у границях однорідних за умовами формування стоку гідрологічних районах.

З формул розрахунків середньоквадратичних відхилень оцінок статистичних параметрів видно, що випадкові похибки зростають по мірі збільшення часової мінливості стоку, яка характеризується коефіцієнтом варіації C_V. Але ріст випадкових похибок розрахунків статистичних параметрів при застосуванні метода моментів інтенсивніший, ніж при застосуванні метода найбільшої правдоподібності. Ця різниця стає особливо помітною при C_V>0.5. Тому СНіП 2.01.14-83 рекомендує при C_V>0.5 для розрахунків статистичних параметрів використовувати метод найбільшої правдоподібності.

4 РОЗРАХУНКИ СТАТИСТИЧНИХ ПАРАМЕТРІВ СТОКУ ЗА ГРАФО-АНАЛІТИЧНИМ МЕТОДОМ Г.А.АЛЕКСЄЄВА

Графо-аналітичний метод являє собою спрощений спосіб розрахунків статистичних параметрів. Його назва обумовлюється використанням емпіричної кривої забезпеченості та теоретичного (аналітичного) закону розподілу. При застосуванні методу приймається умова збіжності теоретичної кривої розподілу з емпіричною хоча б у трьох точках, які звуться характерними. Цей метод дозволяє оцінити статистичні параметри по рядам стоку безпосередньо для того теоретичного розподілу імовірностей, який в більшій мірі відповідає емпіричному. Розглянемо випадок, коли, за теоретичний розподіл стокової величини прийнятий закон розподілу Пірсона III.

У гідрологічних розрахунках закон розподілу випадкової величини задається у вигляді функції забезпеченості. Забезпеченість значення x випадкової величини X є імовірність перевищення x, тобто

$$P(x) = p(X > x)\,. \tag{4.1}$$

Оцінкою забезпеченості значення x_i з вибірки випадкових величин довжиною n є відносна частота події $X \geq x_i$. Для обчислення емпіричної забезпеченості p використовується формула

$$P(x_i) = \frac{m}{n+1}, \tag{4.2}$$

де m - порядковий номер елемента x_i у ранжованому статистичному ряді (мається на увазі статистичний ряд, в якому всі члени розміщені в порядку зменшення $x_{i+1}<x_i$). Фактично m являє собою абсолютну частоту події $X \leq x_i$.

З графіка емпіричної кривої забезпеченості, що нанесена на відповідну клітчатку імовірностей, знімають величини стоку в характерних точках з забезпеченістю 5, 50 та 95 відсотків (%). Виходячи з припущення, що ці точки емпіричної кривої забезпеченості співпадають з теоретичною, звернемося до закону розподілу Пірсона III. Цей теоретичний закон розподілу випадкової величини надається в СНІП 2.01.14-83 таблицею нормованих відхилень Ф , що залежать від забезпеченості P і коефіцієнту асиметрії C_S:

$$\Phi(p, C_S) = \frac{x_p - \bar{x}}{\sigma_x}. \tag{4.3}$$

Для трьох характерних точок за формулою (4.3) визначаються випадкові величини x_P :

$$x_5 = \bar{x} + \hat{\sigma}_x \Phi_5; \tag{4.4}$$

$$x_{50} = \bar{x} + \hat{\sigma}_x \Phi_{50}, \tag{4.5}$$

$$x_{95} = \bar{x} + \hat{\sigma}_x \Phi_{95}, \tag{4.6}$$

з трьома невизначеними параметрами $\bar{x}$, $\hat{\sigma}_x$ та $\hat{C}_s$. Параметр $\hat{C}_s$ входить у рівняння (4.4-4.6) в силу того, що Φ_P є функцією C_S. Для визначення коефіцієнту асиметрії використовується коефіцієнт скісності S, який функціонально пов'язаний з C_S і наводиться у таблицях ординат кривої забезпеченості Пірсона ІІІ.

Коефіцієнт скісності розраховується за такою формулою

$$S = \frac{x_5 + x_{95} - 2x_{50}}{x_5 - x_{95}}. \tag{4.7}$$

По таблиці 4.1 відповідно S встановлюється коефіцієнт $\hat{C}_s$ та нормовані ординати Φ_5, Φ_{50}, Φ_{95}.

Для отримання математичного виразу, що буде визначати середньоквадратичне відхилення, віднімаємо з лівої та правої частин рівняння (4.4) відповідні частини рівняння (4.6):

$$\hat{\sigma}_x (\Phi_5 - \Phi_{95}) = x_5 - x_{95}, \tag{4.8}$$

звідки

$$\sigma_x = \frac{x_5 - x_{95}}{\Phi_5 - \Phi_{95}}. \tag{4.9}$$

Середнє арифметичне значення знаходять з рівняння (4.5)

$$\bar{x} = x_{50} - \hat{\sigma}_x \, \Phi_{50}. \qquad (4.10)$$

Коефіцієнт варіації розраховується за виразом (1.5).

Якщо коефіцієнт скісності S від'ємний, то це свідчить про від'ємну асиметрію ($C_V < 0$) розподілу. У таких випадках наведені в таблиці ординат кривої забезпеченості Пірсона III величини беруться з протилежним знаком:

$$\frac{x_p - \bar{x}}{\sigma_x} = -\Phi_p, \qquad (4.11)$$

для значень забезпеченості p*= 100 - p і при додатному значенні коефіцієнта асиметрії $C_s^* = | C_s |$. Тоді

$$S^* = -S = \frac{2x_{50} - x_5 - x_{95}}{x_5 - x_{95}}, \qquad (4.12)$$

$$\sigma_x = \frac{x_5 - x_{95}}{\Phi_5 - \Phi_{95}}, \qquad (4.13)$$

$$\bar{x} = x_{50} - \sigma_x \Phi_{50}. \qquad (4.14)$$

Зрозуміло, що хоч у графо-аналітичному методі розрахунків статистичних параметрів і використовується теоретичний закон розподілу, отримані статистичні характеристики є все ж таки тільки оцінками статистичних параметрів генеральної сукупності, бо вони спираються на емпіричну криву забезпеченості, побудовану по даним вибірки з генеральної сукупності.

Таблиця 4.1 – Значення коефіцієнта асиметрії C_s та скісності S кривої розподілу Пірсона III

C_s	$\frac{x_p - \bar{x}}{\sigma_x} = \frac{k_p - 1}{C_v} = \Phi(P, C_s)$						$\Phi_5 - \Phi_{95}$	S
	Φ_1	Φ_2	Φ_5	Φ_{10}	Φ_{50}	Φ_{95}		
0.0	2.33	2.02	1.64	1.28	0.00	-1.64	3.28	0.00
0.1	2.40	2.11	1.67	1.29	-0.02	-1.61	3.28	0.03
0.2	2.47	2.16	1.70	1.30	-0.03	-1.58	3.28	0.06
0.3	2.54	2.21	1.72	1.31	-0.05	-1.52	3.27	0.09
0.4	2.61	2.26	1.75	1.32	-0.07	-1.52	3.27	0.11
0.5	2.68	2.31	1.77	1.32	-0.08	-1.49	3.26	0.16
0.6	2.75	2.35	1.80	1.33	-0.10	-1.45	3.25	0.17
0.7	2.82	2.40	1.82	1.33	-0.12	-1.42	3.24	0.20
0.8	2.89	2.45	1.84	1.34	-0.13	-1.38	3.22	0.22
0.9	2.96	2.50	1.86	1.34	-0.15	-1.35	3.21	0.25
1.0	3.02	2.54	1.88	1.34	-0.16	-1.32	3.20	0.28
1.1	3.09	2.58	1.89	1.34	-0.18	-1.28	3.17	0.31
1.2	3.15	2.62	1.92	1.34	-0.19	-1.24	3.16	0.34
1.3	3.21	2.57	1.94	1.34	-0.21	-1.20	3.14	0.37
1.4	3.27	2.71	1.95	1.34	-0.22	-1.17	3.12	0.39
1.5	3.33	2.74	1.96	1.33	-0.24	-1.13	3.09	0.42
1.6	3.39	2.78	1.97	1.33	-0.25	-1.10	3.07	0.45
1.7	3.44	2.82	1.98	1.32	-0.27	-1.06	3.04	0.49
1.8	3.50	2.85	1.99	1.32	-0.28	-1.02	3.01	0.51
1.9	3.55	2.88	2.00	1.31	-0.29	-0.98	2.98	0.54
2.0	3.60	2.91	2.00	1.30	-0.31	-0.95	2.95	0.57
2.1	3.65	2.94	2.01	1.29	-0.32	-0.91	2.92	0.59
2.2	3.68	2.95	2.02	1.27	-0.33	-0.88	2.90	0.63
2.3	3.73	2.98	2.01	1.26	-0.34	-0.85	2.86	0.64
2.4	3.78	3.02	2.00	1.25	-0.35	-0.82	2.82	0.68
2.5	3.82	3.05	2.00	1.23	-0.36	-0.79	2.79	0.69
2.6	3.85	3.05	2.00	1.21	-0.37	-0.76	2.76	0.72
2.7	3.92	3.10	2.00	1.19	-0.38	-0.74	2.74	0.74
2.8	3.96	3.12	2.00	1.18	-0.39	-0.71	2.71	0.76
2.9	4.01	3.12	1.99	1.15	-0.39	-0.69	2.68	0.78
3.0	4.05	3.14	1.97	1.13	-0.40	-0.66	2.63	0.80
3.1	4.09	3.14	1.97	1.11	-0.40	-0.64	2.62	0.81
3.2	4.11	3.14	1.96	1.09	-0.41	-0.62	2.59	0.83

Продовження таблиці 4.1

C_s	$\dfrac{x_p-\bar{x}}{\sigma_x}=\dfrac{k_p-1}{C_v}=\Phi(P,C_s)$						$\Phi_5-\Phi_{95}$	S
	Φ_1	Φ_2	Φ_5	Φ_{10}	Φ_{50}	Φ_{95}		
3.3	4.15	3.14	1.95	1.08	-0.41	-0.60	2.56	0.85
3.4	4.18	3.15	1.94	1.08	-0.41	-0.59	2.53	0.86
3.5	4.21	3.16	1.93	1.04	-0.41	-0.57	2.50	0.87
3.6	4.24	3.17	1.93	1.03	-0.42	-0.56	2.48	0.89
3.7	4.26	3.18	1.91	1.01	-0.42	-0.54	2.45	0.90
3.8	4.29	3.18	1.90	1.00	-0.42	-0.53	2.43	0.91
3.9	4.32	3.20	1.90	0.98	-0.41	-0.51	2.41	0.92
4.0	4.34	3.20	1.90	0.96	-0.41	-0.50	2.40	0.92
4.1	4.36	3.22	1.89	0.95	-0.41	-0.49	2.38	0.93
4.2	4.39	3.21	1.88	0.93	-0.41	-0.48	2.36	0.94
4.6	4.46	3.27	1.84	0.87	-0.40	-0.44	2.28	0.97
4.7	4.49	3.28	1.83	0.85	-0.40	-0.43	2.26	0.97
4.8	4.50	3.29	1.81	0.82	-0.39	-0.42	2.23	0.98
4.9	4.51	3.30	1.80	0.80	-0.39	-0.41	2.21	0.98
5.0	4.54	3.32	1.78	0.78	-0.38	-0.40	2.18	0.98
5.1	4.57	3.32	1.76	0.76	-0.38	-0.39	2.15	0.98
5.2	4.59	3.33	1.74	0.73	-0.37	-0.38	2.15	0.98

5 РОЗРАХУНКИ ХАРАКТЕРИСТИК СТОКУ ЗАДАНОЇ ЗАБЕЗПЕЧЕНОСТІ ЗА ТЕОРЕТИЧНИМИ ЗАКОНАМИ РОЗПОДІЛУ

Емпіричні криві забезпеченості не дають можливості визначити величини стоку за межами вихідної інформації. Безпосередньо графічна екстраполяція емпіричної кривої забезпеченості у область малих ($p < 5\%$) та великих ($p > 95\%$) забезпеченостей має суб’єктивний характер і може привести до значних похибок у розрахунках. Теоретичні закони розподілу у даному випадку "вирівнюють" емпіричний розподіл стокової величини та екстраполюють його за межі спостережених даних.

Найчастіше у гідрологічних розрахунках застосовуються закон Пірсона Ш та трипараметричний гама-розподіл С.М.Крицького та М.Ф.Менкеля. СНІП 2.01.14-83 рекомендує при $C_V \le 0.5$ та $C_S \ge 2C_S$ використовувати закон Пірсона III, а при $C_V > 0.5$ та $C_S < 2C_V$ - трипараметричний гама-розподіл. Ці теоретичні розподіли представлені у вигляді таблиць. Наприклад, ординати теоретичної кривої забезпеченості Пірсона III надаються у вигляді нормованих відхилень від середньої величини стоку

$$\Phi(p, C_s) = \frac{x_p - \bar{x}}{\sigma_x} = \frac{k_p - 1}{C_v} \tag{5.1}$$

а ординати трипараметричного гама-розподілу - у вигляді модульних коефіцієнтів

$$K(p, C_v) = \frac{x_p}{\bar{x}} \tag{5.2}$$

при заданому відношенні C_S/C_V. Щоб скористатися таблицями теоретичних розподілів, спочатку необхідно визначити оцінки статистичних параметрів по матеріалам спостережень за стоком. Слід позначити, що при використанні найбільшої правдоподібності для розрахунків вибіркових значень статистичних параметрів, за теоретичний розподіл можна прийняти тільки ***трипараметричний гама-розподіл***, тому що формули метода найбільшої правдоподібності виведені з цього закону. Що стосується закону розподілу Пірсона III, то при $C_S < 2C_V$ та $P > 90\%$ ординати теоретичної кривої забезпеченості можуть мати від'ємні значення, а це суперечить фізичній суті стокових величин.

Розрахунки характеристик стоку за теоретичним розподілом Пірсона III виконуються за виразом

$$x_p = (\Phi_p C_V + 1)\bar{x}\ , \tag{5.3}$$

а при застосуванні трипараметричного гама-розподілу

$$x_p = k_p \bar{x}\,. \tag{5.4}$$

6 УРАХУВАННЯ КОРРЕЛЯЦІЙНИХ ЗВ'ЯЗКІВ У РЯДАХ СТОКУ ПРИ РОЗРАХУНКАХ СТАТИСТИЧНИХ ПАРАМЕТРІВ

У гідрологічних розрахунках річковий стік розглядається як ергодичний процес з річним періодом. Така гіпотеза зручна й необхідна, оскільки по кожному річковому створу є єдина реалізація процесу стоку, зафіксована гідрологічними спостереженнями. Проте точного математичного доказу справедливості цієї гіпотези немає. Очевидно, що прийнята гіпотеза буде повністю знехтувана, якщо вимірювати час геологічними масштабами. В межах проміжків, що охоплюються періодом гідрологічних спостережень у минулому і перспективного планування в майбутньому за умови незначних антропогенних заходів, порушення ергодичності стоку маловірогідні.

Кореляційний аналіз є одним з традиційних методів в дослідженнях зв'язків між послідовними членами рядів річного стоку. Проте значне випадкове розсіювання вибіркових оцінок коефіцієнтів кореляції при малій тривалості початкових рядів і невеликих числових значеннях цих коефіцієнтів викликає природне утруднення в інтерпретації результатів розрахунку.

Ординати автокореляційної функції за вибірковими даними обчислюються з урахуванням зміщення вибіркової оцінки:

$$r(\tau)=\frac{\sum_{i=1}^{n-\tau}(x_i-\overline{x})(x_{i+\tau}-\overline{x})}{\hat{\sigma}_x^2(n-\tau-1)}; \qquad (6.1)$$

де n - число членів початкового ряду спостережень;
τ - зсув ряду по відношенню до самого себе при підрахунку коефіцієнта кореляції (запізнювання у часі);
x_i - член ряду від x_i до $x_{n-\tau}$; $x_{i+\tau}$ - члени ряду від $x_{i+\tau}$ до x_n;
$\overline{x}, \hat{\sigma}_x$ - відповідно середнє і стандарт початкового ряду.

В [7] рекомендується враховувати зміну середнього і стандарту вибірки із зростанням запізнювання автокореляційної функції. При цьому (7.1) приймає вигляд:

$$r(\tau)=\frac{\sum_{i=1}^{n-\tau}(x_i-\overline{x_i})(x_{i+\tau}-\overline{x}_{i+\tau})}{\sigma_i\sigma_{i+\tau}(n-\tau-1)} \qquad (6.2)$$

де $x_i, \bar{x}_{i+1}, \sigma_i$ і $\sigma_{i+\tau}$ - середні і стандарт відповідних відрізків вихідного ряду.

На думку більшості дослідників, розрахунки за (6.2) викривляють вибіркове значення $r(\tau)$. Суть таких викривлень полягає у тому, що лінія регресії проходить при цьому через центр тяжіння не всієї сукупності точок, а тільки точок, які безпосередньо використовуються для підрахунку коефіцієнта автокореляції: викривлення росте із зростанням запізнювання: чим більше τ, тим сильніше відрізняються середнє і стандарт початкового ряду від відповідних значень тієї частини ряду, яка при зсуві використовується для підрахунку коефіцієнта автокореляції.

Дослідження характера автокореляційних функцій рядів річного стоку присвячена велика кількість досліджень як в СРСР, так й за рубежем. Найцікавіші в останні роки роботи А.Ш.Резніковського, А.І.Чеботарьова і А.В.Рождественського, Д.Я.Ратковіча, М.В.Болгова. В даний час встановлена наявність позитивного зв'язку між річним стоком суміжних років. Загальноприйнятого погляду на значущість внутрішньорядних зв'язків в послідовностях річного стоку поки немає. Навіть для відносно тривалих рядів стоку (50-60 років) недостовірні як окремі ординати автокореляційної функції, так і її контури. Тому в розрахунках річного стоку його ряди розглядаються як простий ланцюг Маркова, тобто враховуються кореляційні зв'язки тільки між стоком суміжних років.

6.1 Розрахунки статистичних параметрів річного стоку з урахуванням кореляційних зв'язків між стоком суміжних років

Коефіцієнт кореляції між стоком суміжних років знаходять з (6.1) за умови, що часовий зсув $\tau = 1$:

$$r(\tau = 1) = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (x_i - \bar{x})(x_{i+1} - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}. \tag{6.3}$$

Середня квадратична помилка емпіричного коефіцієнта кореляції приблизно визначається за рівнянням:

$$\sigma_{r(1)} = \frac{1 - r(1)^2}{\sqrt{n-1}}. \qquad (6.4)$$

Розрахункове значення коефіцієнта автокореляції вважається значущим, якщо виконується умова

$$r(1) \geq 2\sigma_{r(1)}. \qquad (6.5)$$

Внутрішньорядні зв'язки у рядах річного стоку зменшують об'єм незалежної інформації. В той же час існуючи методи оцінки статистичних параметрів припускають незалежність членів початкової вибірки. Для усунення впливу корельованості суміжних членів рядів річного стоку на точність розрахунку коефіцієнтів варіації C_v та асиметрії C_s рекомендується використовувати наступні формули:

$$C_v = (a_1 + a_2 / n) + (a_3 + a_4 / n)\tilde{C}_v + (a_5 + a_6 / n)\tilde{C}_v^2; \qquad (6.6)$$

$$C_s = (b_1 + b_2 / n) + (b_3 + b_4 / n)\tilde{C}_s + (b_5 + b_6 / n)\tilde{C}_s^2 \qquad (6.7)$$

де $a_1,....,a_6; b_1,.....b_6$ - коефіцієнти, що визначаються по табл. 6.1 і 6.2

$\tilde{C}_v, \tilde{C}_s$ - оцінки коефіцієнтів варіації і асиметрії, визначені без урахування внутрішньорядних зв’язків за відомими у гідрологічних розрахунках формулами:

$$\tilde{C} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(k_i - 1)^2}{n-1}}; \qquad (6.8)$$

$$\tilde{C} = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \frac{\sum(k_i - 1)^3}{\tilde{C}_V^3}; \qquad (6.9)$$

де $k_i = x_i / \overline{x}$.

Таблиця 6.1 – Коефіцієнти а у формулі (7.6)

C_s / C_v	r(1)	a_1	a_2	a_3	a_5	a_6	a_7
1	2	3	4	5	6	7	8
2.00	0.00	0.00	0.19	0.99	-0.88	0.01	1.54
	0.30	0.00	0.22	0.99	-0.41	0.01	1.51
	0.50	0.00	0.18	0.98	0.41	0.02	1.47
3.00	0.00	0.00	0.69	0.98	-4.34	0.01	6.78
	0.30	0.00	1.15	1.02	-7.53	-0.04	12.38
	0.50	0.00	1.75	1.00	-11.79	-0.05	21.13
4.00	0.00	0.00	1.36	1.02	-9.68	-0.05	15.55
	0.30	-0.02	2.61	1.13	-19.85	-0.22	34.15
	0.50	-0.02	3.47	1.18	-29.71	-0.41	58.08

Таблиця 6.2 – Коефіцієнти b в формулі (7.7)

r(1)	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
0.00	0.03	2.00	0.92	-5.09	0.03	8.10
0.30	0.03	1.77	0.93	-3.45	0.03	8.03
0.50	0.03	1.63	0.92	-0.97	0.03	7.94

Випадкові середньо квадратичні похибки таких вибіркових параметрів, як середнє арифметичне та коефіцієнт варіації, які визначаються з урахуванням внутрішньорядних зв'язків, обчислюються за наступними формулами:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{1 + r(1)}{1 - r(1)}}; \tag{6.10}$$

$$\sigma_{c_v} = \frac{C_v}{n + 4C_v^2} \sqrt{\frac{n(1 + C_v^2)}{2}} \left(1 + \frac{3C_v r(1)^2}{1 - r(1)}\right). \tag{6.11}$$

7 ДОСЛІДЖЕННЯ СТАТИСТИЧНОЇ ОДНОРІДНОСТІ РЯДІВ СТОКУ

Ряди випадкових величин X та Y є статистичне однорідними, якщо вони належать до однієї і тієї ж генеральної сукупності, або інакше кажучи, підлягають одному і тому ж закону розподілу з одними і тими ж статистичними параметрами.

Рішення задачі про перевірку рядів на статистичну однорідність зводиться до перевірки статистичної гіпотези, логічна схема якої має такий вигляд:

- Висунення нульової гіпотези H_0. За нульову гіпотезу приймається припущення, що ряди X та Y статистично однорідні. Протилежне за змістом припущення є альтернативною гіпотезою.
- Статистичне рішення, що приймається на підставі обмежених даних, може бути помилковим, тому назначають рівень значущості α - малу імовірність помилки першого роду, тобто ймовірність неприйняття нульової гіпотези. Вибір рівня значущості узгоджується з щільністю вихідних даних. Отже, якщо в гідрології точність вимірювань у більшості випадків не перевищує 5%, то і використання рівня значущості, меншого за 5%, вважається недоцільним.
- Задаються певні функції від результатів спостережень. Ці функції (критерії) повинні бути випадковими величинами і підлягати певному добре відомому у математиці закону розподілу з щільністю $f(\gamma)$. Цією функцією визначається міра розходження вибіркових даних по ряду X та ряду Y. Критерії однорідності мають дати відповідь на запитання наскільки статистично значуща різниця між розподілами двох рядів X та Y. Границя між суттєвою та несуттєвою різницею визначається рівнем значущості α. Використовуючи криву розподілу імовірностей випадкової величини γ та рівень значущості α, можна виділити критичну область:

  правосторонню

  $$P(\gamma > \gamma_{кр.1}) = \alpha, \tag{7.1}$$

  лівосторонню

  $$P(\gamma < \gamma_{кр.к}) = \alpha, \tag{7.2}$$

  двосторонню симетричну область

$$P(\gamma < \gamma_{кр.2}) + P(\gamma > \gamma_{кр.к}) = \alpha, \quad (7.3)$$

двосторонню симетричну область

$$P(\gamma > \gamma_{кр}) = \alpha / 2 \quad (7.4)$$

Якщо розраховане значення критерію належить критичній області, нульова гіпотеза відкидається.

У математичній статистиці дуже добре розроблений апарат перевірки гіпотези про статистичну однорідність двох рядів X та Y, що підлягають нормальному закону розподілу. У цьому випадку використовуються параметричні критерії Фішера-Снедекора та Стьюдента t. Але ряди стоку найчастіше описуються теоретичними законами розподілу, відмінними від нормального. Саме тому у гідрологічних розрахунках широко застосовуються непараметричні критерії, засновані на порівнянні безпосередньо емпіричних кривих розподілу

Слід відзначити, що аналіз статистичної однорідності одного стокового ряду виконується у тих випадках, коли на водозборі відбувається зміна умов формування стоку або зміна умов стікання води у руслі. Причиною таких змін найчастіше бувають водогосподарські перетворення на водозборі (регулювання стоку штучними водоймищами, перекид стоку з одного водозбору до іншого, інтенсивні забори води на зрошення, або, навпаки, скидання відпрацьованих ґрунтових вод у русло, тощо). Для аналізу на статистичну однорідність вихідний ряд розбивається на дві вибірки: X - до початку інтенсивних перетворень на водозборі, Y - після початку інтенсивних перетворень. Дату, починаючи з якої антропогенний вплив стає значущим, можна визначити з якісного описування ситуацій, що складаються на водозборах. Таке описування наводиться у „Гідрологічних щорічниках". В останні роки для окремих водозборів можна знайти і кількісні показники забору чи скидання води в русло річки. Іноді час, а якого почалося водогосподарське засвоєння водозбору встановлюється з хронологічного графіка стоку. При відсутності будь-якої інформації про використання поверхневих і підземних вод вихідний ряд ділиться на дві вибірки однакової довжини.

7.1 Перевірка статистичної гіпотези про однорідність двох нормально розподілених рядів

Якщо випадкова величина підлягає нормальному закону розподілу, то для характеристики особливостей цього розподілу достатньо мати два статистичних параметри: середнє арифметичне значення та дисперсію σ_x^2. Тоді перевірка гіпотези про однорідність зводиться до перевірки двох гіпотез: статистичної гіпотези про незначущість різниці в дисперсіях і статистичної гіпотези про незначущість середніх. Якщо одна а цих гіпотез не приймається, то відкидається гіпотеза про однорідність двох рядів X та Y . Якщо випадкові величини X та Y описуються нормальним законом розподілу, то оцінки дисперсій цих величин σ_x^2 та σ_y^2 підлягають розподілу з параметрами $\nu_1 = m - 1$ та $\nu_2 = n - 1$, де m - довжина вибірки X, а n - довжина вибірки Y. Тоді розподіл випадкової величини

$$F = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}, \tag{7.5}$$

може бути описаний законом Фішера-Снедекора. Цей розподіл має два параметри ν_1 та ν_2.

Статистична характеристика F має назву критерію Фішера-Снедекора. Під час розрахунків цього критерію у чисельник ставлять більшу з дисперсій. Перевірка нульової гіпотези здійснюється шляхом порівняння розрахованого значення F з критичним $F_{кр} = \varphi(\alpha, \nu_1, \nu_2)$ (таблиця 7.1).

Нульова гіпотеза H_o не відкидається, коли $F < F_{кр}$. У протилежному випадку приймається альтернативна гіпотеза, тобто різниця між дисперсіями двох рядів X та Y значуща і не може пояснюватись тільки впливом випадкових флуктуацій у вибірках X та Y .

Якщо розподіл випадкових величин X та Y описується нормальним законом, то середні арифметичні значення $\bar{x}$ та $\bar{y}$ також нормально розподілені. Звідси виходить, що випадкова величина $u = \bar{x} - \bar{y}$ теж нормально розподілена. Оскільки σ_x^2 та σ_y^2 підлягають χ^2 -розподілу, то випадкова величина

$$U = (m-1)\sigma_x^2 + (n-1)\sigma_y^2, \tag{7.6}$$

також підлягає закону χ^2 з кількістю степенів свободи $\nu = m + n - 2$.

Таблиця 7.1 – Значення критерію Фішера для 5% рівня значущості

	1	2	3	4	5	6	8	12	16	24
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	134.0	238.9	143.0	246.5	249.0
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.37	19.41	19.43	19.45
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.84	8.74	8.69	8.64
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.04	5.91	5.84	5.77
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.82	4.68	4.60	4.53
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.15	4.00	3.92	3.84
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.73	3.57	3.49	3.41
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.44	3.28	3.20	3.12
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.23	3.07	2.98	2.90
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.07	2.91	2.82	2.74
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	2.95	2.79	2.70	2.61
12	4.75	3.88	3.49	3.26	3.11	3.00	2.85	2.69	2.60	2.50
13	4.67	3.80	3.41	3.18	3.02	2.92	2.77	2.60	2.51	2.42
14	4.60	3.75	3.34	3.11	2.96	2.85	2.70	2.53	2.44	2.35
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.64	2.48	2.39	2.29
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.59	2.42	2.33	2.24
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.55	2.38	2.29	2.19
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.51	2.34	2.25	2.15
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.48	2.31	2.21	2.11
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.45	2.28	2.18	2.08
По горизонталі – число ступенів свободи для більшої дисперсії;										
По вертикалі – число ступенів свободи для меншої дисперсії.										

Тоді випадкова величина

$$t = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sqrt{\dfrac{(m-1)\sigma_x^2 + (n-1)\sigma_y^2}{m+n-2}\left(\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}\right)}} \qquad (7.7)$$

має розподіл, який може бути описаний розподілом Стьюдента з параметром $\nu = m + n - 2$. Гіпотеза H_o про незначущість різниці між середніми арифметичними значеннями перевіряється шляхом порівняння розрахованого критерію t з критичним $t_{кр}(\alpha, \nu)$ - за допомогою таблиці 7.2. Нульова гіпотеза приймається, коли $t < t_{кр}(\alpha, \nu)$.

Таблиця 7.2 – Критичні точки розподілу Стьюдента

Число ступенів свободи	Рівень значущості 0.05	Число ступенів свободи	Рівень значущості 0.05
1	12.7	18	2.10
2	4.30	19	2.09
3	3.18	20	2.09
4	2.78	21	2.08
5	2.57	22	2.07
6	2.45	23	2.07
7	2.36	24	2.06
8	2.31	25	2.06
9	2.26	26	2.06
10	2.23	27	2.05
11	2.20	28	2.05
12	2.18	29	2.05
13	2.16	30	2.04
14	2.14	40	2.02
15	2.13	60	2.00
16	2.12	120	1.98
17	2.11		

Статистична гіпотеза про однорідність рядів X та У приймається тільки у тому випадку, коли справедливі обидві гіпотези H_o і H'_o.

У роботах А.В.Рождественського зроблена спроба застосувати критерії Стьюдента та Фішера до рядів стоку з розподілом Пірсона III Коли йдеться про перевірку двох вибірок а одного ряду, критичні значення критерію Стьюдента коректуються поправочним множником C_t, що залежить від коефіцієнту автокореляції $r(1)$.

$$t'_{кр} = C_t \cdot t_{кр}(\alpha, \nu). \qquad (7.8)$$

Коли ж виконується аналіз статистичної однорідності двох окремих кореляційно пов'язаних рядів стоку, то поправочний множник C_t береться в залежності від коефіцієнта кореляції R (рис. 7.1). Для критерію Фішера розроблено спеціальні таблиці (таблиця 7.3), де також ураховується просторовий або часовий зв'язок вибірок в залежності від значень коефіцієнтів r(1) та R.

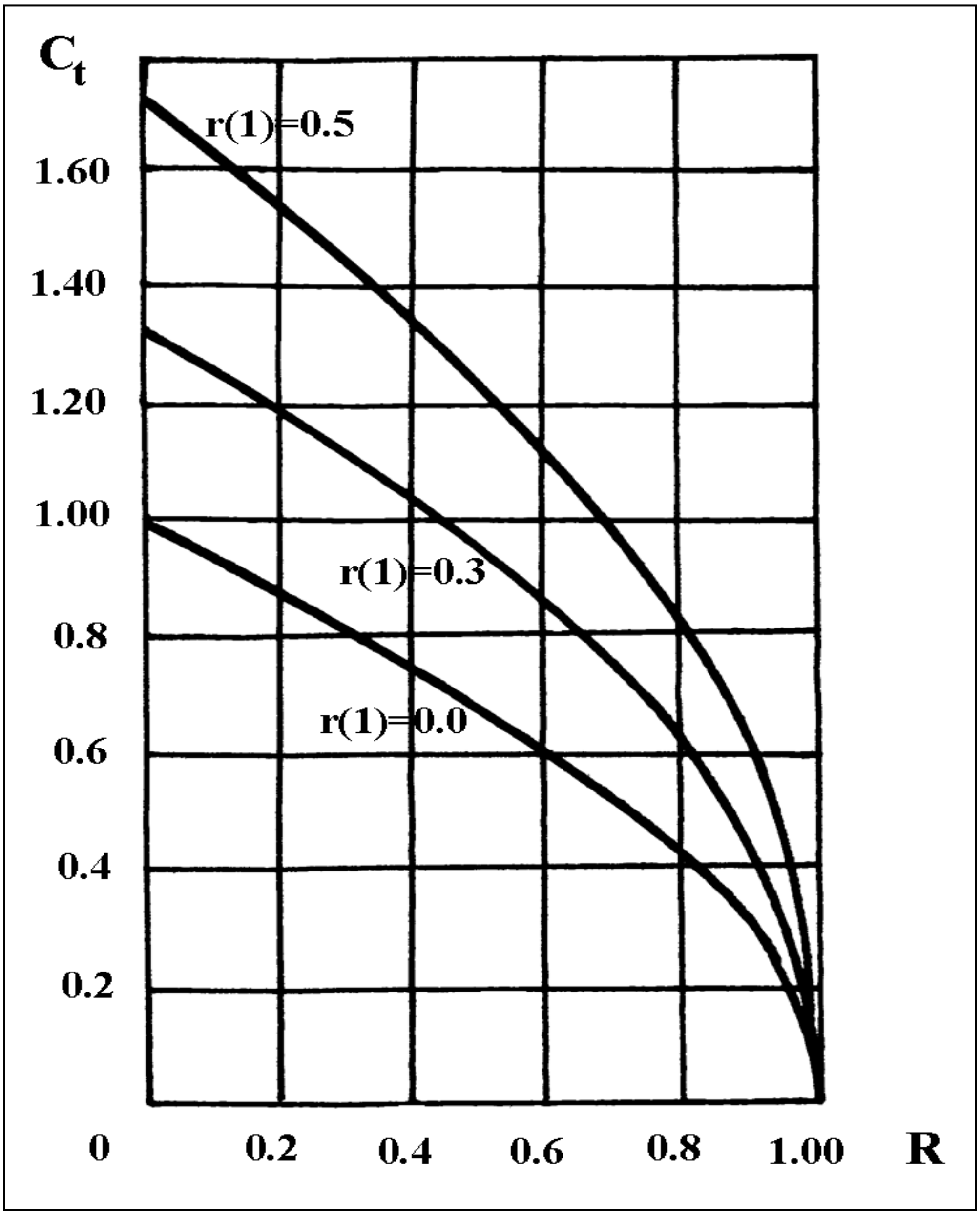

Рисунок 7.1 – Зв’язок поправочного множника C_t з R і r(1)

Таблиця 7.3 – Розподіл Фішера з урахуванням кореляції

R	r(1)	α %												
		0.2	1	2	5	10	20	30	50	70	80	90	95	99
$n_x = n_y = 10; \quad k_1 = n_x - 1 = 9; \quad k_2 = n_y - 1 = 9$														
0.0	0.7	18.6	11.0	8.11	6.19	4.58	3.22	2.59	1.83	1.41	1.26	1.12	1.06	1.00
0.0	0.6	14.4	9.51	7.54	5.63	4.20	2.98	2.42	1.77	1.38	1.25	1.12	1.06	1.00
0.0	0.5	12.6	8.58	6.97	5.16	3.89	2.79	2.29	1.71	1.36	1.24	1.11	1.06	1.00
0.0	0.4	11.7	7.92	6.42	4.79	3.68	2.66	2.20	1.67	1.34	1.23	1.10	1.06	1.00
0.0	0.3	11.7	7.42	6.08	4.52	3.51	2.57	2.15	1.63	1.33	1.22	1.10	1.05	1.00
0.0	0.2	10.5	7.07	5.77	4.32	3.34	2.51	2.08	1.60	1.31	1.21	1.10	1.04	1.00
0.0	0.1	10.2	6.78	5.51	4.16	3.24	2.46	2.04	1.58	1.30	1.20	1.10	1.04	1.00
0.0	0.0	10.1*	6.54*	5.35*	4.03*	3.18*	2.44*	2.02	1.57	1.30	1.19	1.10	1.03	1.00
0.95	0.0	2.47	2.01	1.84	1.63	1.48	1.33	1.25	1.15	1.09	1.03	1.00	1.00	1.00
0.90	0.0	3.47	2.67	2.32	1.98	1.70	1.48	1.37	1.22	1.13	1.07	1.02	1.00	1.00
0.80	0.0	4.89	3.60	3.11	2.49	2.10	1.73	1.56	1.32	1.18	1.12	1.05	1.00	1.00
0.70	0.0	6.21	4.41	3.76	2.93	2.42	1.92	1.69	1.39	1.22	1.15	1.08	1.00	1.00
0.60	0.0	7.28	5.08	4.32	3.30	2.69	2.07	1.79	1.45	1.25	1.17	1.08	1.01	1.00
0.50	0.0	8.00	5.62	4.73	3.58	2.88	2.20	1.86	1.49	1.27	1.18	1.09	1.01	1.00
0.40	0.0	8.97	6.06	5.03	3.80	3.02	2.28	1.93	1.52	1.28	1.18	1.09	1.02	1.00
0.30	0.0	9.51	8.32	5.24	3.94	3.12	2.37	1.99	1.55	1.29	1.18	1.10	1.02	1.00
0.20	0.0	10.0	6.54	5.35	4.03	3.18	2.44	2.02	1.57	1.30	1.19	1.10	1.03	1.00
$n_x = n_y = 25; \quad k_1 = n_x - 1 = 24; \quad k_2 = n_y - 1 = 24$														
0.0	0.7	7.17	5.18	4.39	3.44	2.86	2.22	1.92	1.70	1.28	1.20	1.06	1.02	1.00
0.0	0.6	5.82	4.42	3.80	3.00	2.53	2.04	1.79	1.52	1.24	1.18	1.06	1.02	1.00
0.0	0.5	4.99	3.85	3.39	2.73	2.31	1.90	1.69	1.42	1.22	1.16	1.05	1.02	1.00

Продовження таблиці 7.3

R	r(1)	α %												
		0.2	1	2	5	10	20	30	50	70	80	90	95	99
0.0	0.4	4.55	3.54	3.11	2.53	2.16	1.80	1.60	1.36	1.19	1.14	1.05	1.02	1.00
0.0	0.3	4.24	3.28	2.90	2.40	2.08	1.75	1.55	1.34	1.17	1.12	1.05	1.02	1.00
0.0	0.2	4.04	3.12	2.76	2.34	2.03	1.72	1.54	1.33	1.17	1.12	1.05	1.02	1.00
0.0	0.1	3.88	3.02	2.68	2.29	2.00	1.71	1.53	1.32	1.17	1.11	1.05	1.02	1.00
0.0	0.0	3.74*	2.97*	2.66*	2.27*	1.98*	1.70*	1.53	1.32	1.17	1.11	1.05	1.02	1.00
0.2	0.0	3.42	2.84	2.60	2.22	1.95	1.67	1.52	1.32	1.17	1.10	1.05	1.02	1.00
0.3	0.0	3.33	2.78	2.54	2.18	1.92	1.64	1.50	1.30	1.16	1.10	1.05	1.02	1.00
0.4	0.0	3.22	2.70	2.46	2.12	1.87	1.61	1.47	1.28	1.15	1.10	1.05	1.02	1.00
0.5	0.0	3.07	2.58	2.34	2.04	1.80	1.57	1.43	1.26	1.14	1.09	1.04	1.02	1.00
0.6	0.0	2.87	2.44	2.21	1.93	1.72	1.51	1.39	1.24	1.13	1.08	1.04	1.02	1.00
0.7	0.0	2.61	2.23	2.03	1.80	1.63	2.44	1.33	1.22	1.11	1.06	1.03	1.02	1.00
0.8	0.0	2.28	1.95	1.82	1.63	1.49	1.36	1.27	1.17	1.09	1.05	1.03	1.02	1.00
0.9	0.0	1.83	1.61	1.55	1.42	1.33	1.25	1.18	1.12	1.06	1.03	1.02	1.01	1.00
0.95	0.0	1.54	1.41	1.37	1.29	1.22	1.18	1.13	1.09	1.05	1.02	1.01	1.00	1.00
$n_x = n_y = 50; \quad k_1 = n_x - 1 = 49; \quad k_2 = n_y - 1 = 49$														
0.0	0.7	4.07	3.31	2.98	2.49	2.16	1.82	1.64	1.40	1.22	1.15	1.07	1.02	1.00
0.0	0.6	3.52	2.90	2.65	2.26	1.97	1.69	1.55	1.34	1.18	1.13	1.06	1.02	1.00
0.0	0.5	3.15	2.62	2.40	2.08	1.82	1.58	1.48	1.30	1.15	1.11	1.05	1.01	1.00
0.0	0.4	2.88	2.42	2.23	1.94	1.72	1.51	1.42	1.25	1.13	1.10	1.04	1.01	1.00
0.0	0.3	2.68	2.27	2.10	1.83	1.65	1.48	1.38	1.22	1.12	1.09	1.04	1.01	1.00
0.0	0.2	2.58	2.19	2.02	1.79	1.63	1.47	1.37	1.21	1.12	1.09	1.04	1.01	1.00
0.0	0.1	2.52	2.15	1.99	1.79	1.62	1.47	1.37	1.21	1.12	1.09	1.04	1.01	1.00

0.0	0.0	2.51*	2.15*	1.99*	1.79*	1.62*	1.47*	1.37	1.21	1.12	1.09	1.04	1.01	1.00

Продовження таблиці 7.3

R	r(1)	α %												
		0.2	1	2	5	10	20	30	50	70	80	90	95	99
0.2	0.0	2.51	2.15	1.99	1.79	1.62	1.47	1.37	1.21	1.12	1.09	1.04	1.01	1.00
0.3	0.0	2.46	2.10	1.94	1.76	1.60	1.46	1.36	1.21	1.12	1.09	1.04	1.01	1.00
0.4	0.0	2.39	2.05	1.88	1.72	1.57	1.44	1.34	1.20	1.11	1.09	1.04	1.01	1.00
0.5	0.0	2.30	1.96	1.81	1.67	1.53	1.41	1.32	1.19	1.11	1.09	1.04	1.01	1.00
0.6	0.0	2.17	1.85	1.73	1.60	1.48	1.36	1.30	1.18	1.10	1.08	1.04	1.00	1.00
0.7	0.0	2.01	1.72	1.63	1.52	1.42	1.32	1.26	1.16	1.08	1.06	1.02	1.00	1.00
0.8	0.0	1.80	1.58	1.52	1.42	1.33	1.25	1.20	1.13	1.06	1.04	1.01	1.00	1.00
0.9	0.0	1.54	1.39	1.35	1.28	1.23	1.18	1.14	1.09	1.05	1.03	1.00	1.00	1.00
0.95	0.0	1.32	1.27	1.24	1.20	1.16	1.13	1.10	1.07	1.04	1.03	1.00	1.00	1.00
$n_x = n_y = 100; \quad k_1 = n_x - 1 = 99; \quad k_2 = n_y - 1 = 99$														
0.0	0.7	3.02	2.49	2.28	1.93	1.72	1.52	1.40	1.24	1.13	1.10	1.03	1.00	1.00
0.0	0.6	2.66	2.20	2.03	1.76	1.59	1.44	1.36	1.23	1.12	1.09	1.02	1.00	1.00
0.0	0.5	2.40	2.00	1.85	1.64	1.51	1.39	1.31	1.21	1.11	1.09	1.02	1.00	1.00
0.0	0.4	2.20	1.87	1.76	1.56	1.46	1.36	1.28	1.19	1.10	1.08	1.02	1.00	1.00
0.0	0.3	2.06	1.80	1.70	1.53	1.42	1.34	1.26	1.18	1.10	1.07	1.02	1.00	1.00
0.0	0.2	1.98	1.76	1.67	1.52	1.41	1.33	1.25	1.17	1.10	1.06	1.02	1.00	1.00
0.0	0.1	1.94	1.74	1.65	1.52	1.41	1.32	1.24	1.16	1.09	1.06	1.02	1.00	1.00
0.0	0.0	1.91*	1.72*	1.64*	1.51*	1.41*	1.31*	1.22	1.16	1.08	1.05	1.02	1.00	1.00
0.2	0.0	1.81	1.70	1.61	1.50	1.40	1.30	1.21	1.15	1.06	1.04	1.02	1.00	1.00
0.3	0.0	1.76	1.67	1.59	1.47	1.38	1.30	1.20	1.15	1.06	1.04	1.02	1.00	1.00
0.4	0.0	1.72	1.63	1.56	1.45	1.36	1.28	1.19	1.14	1.06	1.03	1.02	1.00	1.00

0.5	0.0	1.66	1.58	1.52	1.42	1.34	1.26	1.18	1.12	1.05	1.03	1.02	1.00	1.00
0.6	0.0	1.60	1.52	1.47	1.38	1.32	1.24	1.17	1.11	1.05	1.02	1.02	1.00	1.00

Продовження таблиці 7.3

R	r(1)	α %												
		0.2	1	2	5	10	20	30	50	70	80	90	95	99
0.7	0.0	1.53	1.46	1.40	1.32	1.27	1.22	1.15	1.10	1.04	1.02	1.01	1.00	1.00
0.8	0.0	1.43	1.37	1.32	1.26	1.21	1.17	1.13	1.08	1.03	1.02	1.01	1.00	1.00
0.9	0.0	1.29	1.24	1.22	1.17	1.14	1.11	1.09	1.05	1.02	1.01	2.00	1.00	1.00
0.95	0.0	1.20	1.18	1.17	1.12	1.10	1.08	1.06	1.03	1.02	1.01	1.00	1.00	1.00

Примітка: R – коефіцієнт кореляції між рядами;
r(1) - коефіцієнт кореляції між суміжними членами ряду;
зіркою позначені теоретичні значення F_{α}

7.2 Перевірка статистичної гіпотези про однорідність двох рядів за критерієм Гнеденко-Королюка

Цей метод можна застосовувати у тому випадку, коли

$$N = 2n < 60. \tag{7.9}$$

Розрахунки ведуться за таким алгоритмом.

1. Вихідний ряд довжиною N розбивається на дві вибірки однакової довжини n. Якщо число елементів вихідного ряду непарне, то перший або останній елемент відкидається. Розбивка ряду на дві вибірки має відбутися посередині.
2. Для кожної вибірки довжиною n підраховується інтегральна функція розподілу F(x). Для розрахунків кожна з вибірок розміщується у порядку зростання. Емпіричне значення ординат інтегральної функції визначається за формулою

$$d_m = \frac{m'}{n}. \tag{7.10}$$

де m' - порядковий номер члену вибірки, розташованого у порядку зростання.

3.Аналізуючи графіки інтегральних функцій розподілу, знаходимо для будь-якого x_i, найбільше відхилення між значеннями $F(x_i)$, виражене в частках від одиниці. Позначимо це відхилення через d_m. Величина d_m повинна бути додатною

$$0 \le d_m \le 1. \tag{7.11}$$

Величина d_m випадкова і показує міру відхилення емпіричних розподілів двох вибірок.

4. Випадкова величина d_m помножена на

$$C_m = d_m \cdot n \tag{7.12}$$

підлягає закону розподілу Гнеденко-Королюка.

5.За цим законом можна розрахувати ймовірність того, що критерій C_m потрапить у критичну область.

$$p(C_m > C_{кр}) = \alpha_c . \qquad (7.13)$$

Для визначення α_c розроблено спеціальну таблицю 7.4.

6. Якщо

$$\alpha_c > \alpha , \qquad (7.14)$$

де α - рівень значущості, який дорівнює 5%, то нульова гіпотеза приймається.

7.3 Перевірка статистичної гіпотези про однорідність двох рядів за критерієм Колмогорова-Смірнова

Критерій однорідності Колмогорова-Смірнова рекомендовано застосовувати дія статистичних рядів довжиною $N = 2n \geq 60$. Перевага цього критерію на відміну від критерію Гнеденко-Королюка полягає в тому, що нема необхідності використовувати парне число елементів, а вихідний ряд не обов'язково розбивати на дві вибірки посередині (таблиця 7.5).

Умова, яка ставиться при використанні критерію Колмогорова-Смірнова така:

$$kl/(k+l) = n \geq 15 , \qquad (7.15)$$

де k та l - довжина вибірок, на які розбито вихідний ряд.

Вихідний ряд розбивають на дві вибірки у тому місці, де більш за все можна сподіватись на зміну характеру стоку. Алгоритм розрахунку критерію такий.

1. Вихідний ряд розбивається на дві вибірки довжиною k та l, таким чином, щоб виконувалась умова (7.15).
2. Для кожної вибірки розраховуються ординати емпіричної інтегральної функції розподілу за формулою (7.10). Обидві інтегральні криві зіставляються, і для якогось x_i знаходять найбільше відхилення d_{kl} в частках від одиниці. Величина d_{kl} є мірою розходження між емпіричним розподілом двох вибірок. Якщо d_{kl} є функцією від випадкової величини $F(x)$, то вона теж є випадковою.
3. Далі визначається статистична величина

$$z = d_{kl}\sqrt{n}, \qquad (0 \leq d \leq 1) , \qquad (7.16)$$

Таблиця 7.4 – Розподіл функції Гнеденко-Королюка

n	C																	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
5	100	87.3	35.71	7.94	0.79													
6	100	93.07	47.4	14.29	2.60	0.22												
7	100	96.27	57.52	5.30	0.82	0.06												
8	100	98.01	66.01	28.27	8.70	1.87	0.25	0.02										
9	100	98.95	73.01	35.17	12.59	3.36	0.63	0.07	0.00									
10	100	99.45	78.69	41.75	16.78	5.24	1.23	0.21	0.02	0.00								
11	100	99.71	83.26	47.92	21.15	5.77	1.70	0.38	0.06	0.01	0.00							
12	100	99.85	86.9	53.61	25.58	9.95	3.14	0.79	0.15	0.02	0.00							
13	100	99.92	89.78	58.82	29.99	12.65	4.43	1.26	0.29	0.05	0.01	0.00						
14	100	99.96	92.06	63.55	34.33	15.49	5.90	1.88	0.49	0.10	0.02	0.00						
15	100	99.98	93.83	67.81	38.55	18.44	7.55	2.62	0.77	0.18	0.04	0.01	0.00					
16	100	99.99	95.23	71.64	42.63	21.45	9.33	3.50	1.12	0.30	0.07	0.01	0.00					
17	100	99.99	96.31	75.06	46.54	24.50	11.24	4.50	1.56	0.46	0.12	0.02	0.00					
18	100	100	97.15	78.10	50.26	27.54	13.24	5.60	2.07	0.67	0.18	0.04	0.01	0.00				
19	100	100	97.81	80.81	53.79	30.57	15.32	6.81	2.67	0.92	0.28	0.07	0.02	0.00				
20	100	100	98.31	83.20	57.13	33.56	17.45	8.11	3.35	1.23	0.40	0.10	0.03	0.01	0.00			
21	100	100	98.70	85.31	60.28	36.50	19.63	9.48	4.11	1.59	0.55	0.17	0.04	0.01	0.00			
22	100	100	99.01	87.17	63.24	39.37	21.84	10.93	4.93	2.00	0.73	0.24	0.07	0.02	0.00			
23	100	100	99.24	88.80	66.01	42.18	24.06	12.43	5.83	2.47	0.95	0.32	0.10	0.03	0.01	0.00		
24	100	100	99.42	90.24	68.60	44.90	26.28	13.98	6.78	2.99	1.20	0.43	0.14	0.04	0.01	0.00		
25	100	100	99.50	91.50	71.02	47.55	28.50	15.58	7.79	3.56	1.48	0.56	0.19	0.06	0.02	0.00		

26	100	100	99.66	92.60	73.27	50.10	30.71	17.20	8.85	4.18	1.81	0.71	0.26	0.08	0.02	0.01	0.00	

Продовження таблиці 7.4

n	C																	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
27	100	100	99.74	93.57	75.37	54.56	32.90	18.86	9.96	4.84	2.17	0.98	0.33	0.11	0.03	0.01	0.01	
28	100	100	99.80	94.41	77.32	54.94	35.06	20.53	11.10	5.55	2.56	1.09	0.42	0.15	0.05	0.01	0.01	
29	100	100	99.85	95.14	79.12	57.22	37.20	22.21	12.29	6.30	2.99	1.31	0.53	0.20	0.07	0.02	0.01	0.00
30	100	100	99.88	95.78	80.80	59.41	39.29	23.91	13.50	7.09	3.46	1.56	0.65	0.25	0.09	0.03	0.01	0.00

Таблиця 7.5 – Функція розподілу Колмогорова

Z	L(z)	Z	L(z)	Z	L(z)
0.28	0.000001	1.06	0.788860	1.84	0.997707
0.29	0.000004	1.07	0.797636	1.85	0.997870
0.30	0.000009	1.08	0.806128	1.86	0.998023
0.31	0.000021	1.09	0.814342	1.87	0.998145
0.32	0.000046	1.10	0.822282	1.88	0.008297
0.33	0.000091	1.11	0.829950	1.89	0.998421
0.34	0.000171	1.12	0.837356	1.90	0.998536
0.35	0.000303	1.13	0.844502	1.91	0.998644
0.36	0.000511	1.14	0.851394	1.92	0.998744
0.37	0.000826	1.15	0.858038	1.93	0.998837
0.38	0.001285	1.16	0.864442	1.94	0.998924
0.39	0.001929	1.17	0.870612	1.95	0.999004
0.40	0.002808	1.18	0.876548	1.96	0.999079
0.41	0.003972	1.19	0.882258	1.97	0.000149
0.42	0.005476	1.20	0.887750	1.98	0.999213
0.43	0.007377	1.21	0.893030	1.99	0.999273
0.44	0.009730	1.22	0.898104	2.00	0.999329
0.45	0.012590	1.23	0.902972	2.01	0.999380
0.46	0.016005	1.24	0.907648	2.02	0.999428
0.47	0.020022	1.25	0.912132	2.03	0.999474
0.48	0.024682	1.25	0.916432	2.04	0.999516
0.49	0.030017	1.27	0.920556	2.05	0.999552
0.50	0.036055	1.28	0.924505	2.06	0.999588
0.51	0.042814	1.29	0.928288	2.07	0.999620
0.52	0.050306	1.30	0.931908	2.08	0.999650
0.53	0.058534	1.31	0.935370	2.09	0.999680
0.54	0.067497	1.32	0.938682	2.10	0.999705
0.55	0.077183	1.33	0.941848	2.11	0.999728
0.56	0.087577	1.34	0.944872	2.12	0.999750
0.57	0.098656	1.35	0.947756	2.13	0.999770
0.58	0.110395	1.36	0.950512	2.14	0.999790
0.59	0.122760	1.37	0.953142	2.15	0.999806
0.60	0.135718	1.38	0.9555650	2.16	0.999822
0.61	0.149229	1.39	0.958040	2.17	0.999838
0.62	0.163225	1.40	0.960318	2.18	0.999852
0.63	0.177753	1.41	0.962486	2.19	0.999864
0.64	0.192677	1.42	0.964552	2.20	0.999874
0.65	0.207987	1.43	0.966516	2.21	0.999886
0.66	0.223637	1.44	0.968382	2.22	0.999896
0.67	0.239582	1.45	0.970158	2.23	0.999904

Продовження таблиці 7.5

Z	L(z)	Z	L(z)	Z	L(z)
0.68	0.255780	1.46	0.971846	2.24	0.999912
0.69	0.272189	1.47	0.973444	2.25	0.999920
0.70	0.288765	1.48	0.999940	2.26	0.999926
0.71	0.305471	1.49	0.976412	2.27	0.999934
0.72	0.322265	1.50	0.977782	2.28	0.999940
0.73	0.339113	1.51	0.979080	2.29	0.999944
0.74	0.355981	1.52	0.980310	2.30	0.999949
0.75	0.372833	1.53	0.981476	2.31	0.999954
0.76	0.389640	1.54	0.982578	2.32	0.999958
0.77	0.406372	1.55	0.983622	2.33	0.999962
0.78	0.423002	1.56	0.984610	2.34	0.999965
0.79	0.439505	1.57	0.985644	2.35	0.999968
0.80	0.455857	1.58	0.986426	2.36	0.999970
0.81	0.472041	1.59	0.987260	2.37	0.999973
0.82	0.488030	1.60	0.988048	2.38	0.999976
0.83	0.503808	1.61	0.988791	2.39	0.999978
0.84	0.519366	1.62	0.989492	2.40	0.999980
0.85	0.534682	1.63	0.990154	2.41	0.999982
0.86	0.549744	1.64	0.990777	2.42	0.999984
0.87	0.564546	1.65	0.991364	2.43	0.999986
0.88	0.579070	1.66	0.991917	2.44	0.999987
0.89	0.593316	1.67	0.992438	2.45	0.999988
0.90	0.607270	1.68	0.992928	2.46	0.999989
0.91	0.620928	1.69	0.993389	2.47	0.999990
0.92	0.634286	1.70	0.993823	2.48	0.999991
0.93	0.647338	1.71	0.994230	2.49	0.999992
0.94	0.660082	1.72	0.994612	2.50	0.9999925
0.95	0.672516	1.73	0.994972	2.55	0.9999956
0.96	0.684636	1.74	0.995309	2.60	0.9999974
0.97	0.696444	1.75	0.995625	2.65	0.9999984
0.98	0.707940	1.76	0.995922	2.70	0.9999990
0.99	0.719126	1.77	0.996200	2.75	0.9999994
1.00	0.730000	1.78	0.996460	2.80	0.9999997
1.01	0.740566	1.79	0.996704	2.85	0.99999982
1.02	0.750827	1.80	0.996932	2.90	0.99999990
1.03	0.760780	1.81	0.997146	2.95	0.99999994
1.04	0.770434	1.82	0.997346	3.00	0.99999997
1.05	0.779794	1.83	0.997533		

яка підлягає закону розподілу Колмогорова. За таблицею 7.5 можна знайти ймовірність того випадку, коли $z \le z_{кр}$

$$p(z < z_{кр}) = L(z), \quad (7.17)$$

Тоді ймовірність попадання z у критичну область може бути оцінена таким чином

$$p(z > z_{кр}) = 1 - L(z), \quad (7.18)$$

Якщо ця ймовірність перевищує рівень значущості $\alpha = 5\%$, тобто

$$p(z < z_{кр}) > 0.05 \quad (7.19)$$

нульова гіпотеза приймається.

7.4 Вияв тренду в рядах стоку

Коли статистична неоднорідність ряду стоку установлена і у фондових матеріалах є вказівки на наслідки інтенсивних водогосподарських перетворень, є сенс виявити у хронологічній послідовності стоку тренд, тобто направлену зміну стокових величин в бік зростання або зменшення. Для розв'язання цієї задачі можна використати критерій Аббе. В його основі лежить порівняння дисперсії значень випадкової величини X з сумою квадратів їх послідовних різниць S^2, яка менш чутлива до систематичної зміни математичного сподівання. Величина S^2 розраховується за формулою:

$$S^2 = \frac{1}{2(N-1)} \sum_{i=1}^{N-1} (x_{i+1} - x_i)^2, \quad (7.20)$$

де N - довжина вихідного ряду;

x_i та x_{i+1} наступне та попереднє значення хронологічного ряду.

Висувається нульова гіпотеза, яка передбачає, що тренд існує.

Для перевірки гіпотези про відсутність систематичних змін в упорядкованій послідовності розраховується відношення:

$$z = \frac{S^2}{\sigma_x^2}, \tag{7.21}$$

де σ_x^2 - дисперсія вихідного ряду.

Якщо $z \ge z_{кр}$, то можна зробити висновок, що ряд спостережень не має систематичного зсуву математичного сподівання (тренд відсутній), але коли $z < z_{кр}$, то тренд існує. Критичні значення $z_{кр}$ для $\alpha = 0.05$ при N від 4 до 300 наведені у таблиці 7.6.

Недолік критерію Аббе у тому, що генеральна сукупність, з якої вилучається ряд спостережень, припускається нормальною, тому функція z може "зреагувати" на циклічні коливання стоку, особливо у таких випадках, коли цикл неповний.

Таблиця 7.6 – Критичні значення розподілу величин

Число даних	5%-ний рівень значущості	Число даних	5%-ний рівень значущості
4	0.390	34	0.726
5	0.410	35	0.729
6	0.446	36	0.733
7	0.468	37	0.736
8	0.491	38	0.740
9	0.512	39	0.743
10	0.531	40	0.746
11	0.548	41	0.749
12	0.564	42	0.752
13	0.578	43	0.755
14	0.591	44	0.758
15	0.603	45	0.760
16	0.614	46	0.763
17	0.624	47	0.765
18	0.633	48	0.768
19	0.642	49	0.770
20	0.560	50	0.772
21	0.657	51	0.774
22	0.665	52	0.776
23	0.671	53	0.778
24	0.678	54	0.780

Продовження таблиці 7.6

Число даних	5%-ний рівень значущості	Число даних	5%-ний рівень значущості
25	0.684	55	0.582
26	0.689	56	0.784
27	0.695	57	0.785
28	0.700	58	0.878
29	0.705	59	0.789
30	0.709	60	0.791
31	0.714	100	0.837
32	0.718	150	0.867
33	0.722	200	0.885
		300	0.906

8 ПРИКЛАД РОЗРАХУНКІВ

8.1 Розрахувати статистичні параметри річного стоку з водозбору р.Ока – м.Калуга за період з 1936 по 1970 рр, використовуючи метод моментів.

Вихідні дані та результати обчислень повинні бути оформлені в таблиці такого вигляду:

Таблиця 6.1 –Розрахунок статистичних параметрів річного стоку за методом моментів
р.Ока – м.Калуга, 1936-1970 рр.

№ пп	Рік	Q_i, м^3/с	$K_i = \frac{Q_i}{\overline{Q}}$	$K_i - 1$	$(K_i - 1)^2$	$(K_i - 1)^3$
1	1936	281	1.65	0.65	0.4225	0.2746
2	1937	304	1.38	0.38	0.1444	0.0555
....	....	....	....	....	....	....
....	....	....	....	....	....	....
....	....	....	....	....	....	....
35	1970	450	0.65	-0.35	0.1225	0.04274
Сума		9531	35.08	-0.01	2.0056	0.4247

Розрахунок проводиться в такій послідовності:

1.обчислення середньої арифметичної величини за формулою (1.13)

n=35; $\overline{Q} = \frac{9531}{35} = 272 \quad м^3/с$;

2.обчислення коефіцієнту варіації за формулою (1.23)

$$C_v = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(k_i - 1)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{2.0056}{34}} = 0.24;$$

3.обчислення коефіцієнту асиметрії за виразом (1.25)

$$C_s = \frac{\sum_{i=1}^{n}(k_i - 1)^3}{C_v^3} \frac{n}{(n-1)(n-2)} = \frac{35 \times 0.4247}{34 \times 33 \times 0.0143} = \frac{14.9}{16.0} = 0.93;$$

4.середнє квадратичне відхилення визначається за (1.5)

$\sigma_Q = 0.24 \times 272 = 65.3$ м^3/с;

5.випадкові похибки статистичних параметрів обчислені за формулами, приведеними в табл.3.1 для методу моментів

$$\sigma_{\overline{Q}} = \frac{65.3}{\sqrt{35}} = \frac{65.3}{5.92} = 11.0;$$

$$\sigma_{C_V} = \frac{C_v}{n + 4C_v^2}\sqrt{\frac{n(1 + C_v^2)}{2}} = \frac{0.24}{35 + 4 \times 0.24^2}\sqrt{\frac{35(1 + 0.24^2)}{2}} = 0.029;$$

$$\sigma_{C_S} \sqrt{\frac{6}{n}(1 + 6C_v^2 + 5C_v^4)} = \sqrt{\frac{6}{35}(1 + 6 \times 0.24^2 + 5 \times 0.24^4)} = 0.48;$$

6.відносні випадкові похибки визначення статистичних параметрів визначаються за формулами (3.2)-(3.4)

$$\varepsilon_{\overline{Q}} = \frac{0.24}{5.92}100\% = 4.05\%;$$

$$\varepsilon_{\overline{Q}} = \frac{11.0}{272}100\% = 0.0405 \quad \text{або} \quad 4.05\%;$$

$$\varepsilon_{C_V} = \frac{\sigma_{C_V}}{C_V}100\% = \frac{0.029}{0.24}100\% = 12.1\%;$$

$$\varepsilon_{C_S} = \frac{\sigma_{C_S}}{C_S}100\% = \frac{0.48}{0.93}100\% = 51.6\%.$$

На підставі отриманих результатів можна зробити висновок, що точність розрахунків статистичних параметрів $\overline{Q}$ та C_V задовільна, так як $\varepsilon_{\overline{Q}} < 5\%$, а $\varepsilon_{C_V} < 15\%$.

Відносне середньоквадратичне відхилення параметру C_S складає 51.6%, тобто цей параметр рекомендується розраховувати по середньому для розглядуваного регіону співвідношенню C_S / C_V.

8.2 Розрахувати статистичні параметрів річного стоку з водозбору р. Сіверський Донець – м. Біла Калитва за період з 1934 по 1962 роки, використовуючи метод найбільшої правдоподібності.

Вихідні дані та результати обчислень оформлюють в таблиці (табл. 8.2).

Довжина ряду становить 24 роки.

Для визначення статистик $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ використані формули (2.4), (2.7), (2.8).

Таблиця 8.2 – Обчислення статистичних параметрів ряду за методом найбільшої правдоподібності р. Сіверський Донець – м.Біла Калитва, 1934-1962 рр.

№ пп	Рік	Q_i, м^3/с	K_i	$\lg K_i$	$K_i \lg K_i$
1	1934	271	1.84	0.404	1.013
...	.....	.....	.....	.....	.....
...	.....	.....	.....	.....	......
24	1962	54.9	0.37	-0.432	-0.160
Сума		3526	24	-1.103	1.072

$$\overline{Q} = \lambda_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{3526}{24} = 147 \text{ м}^3/\text{с};$$

$$\lambda_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lg k_i}{n-1} = \frac{-1.103}{23} = -0.0480$$

$$\lambda_3 = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i \lg k_i}{n-1} = \frac{1.072}{23} = 0.0466$$

За номограмам, наведеними в [4], знаходимо значення C_v та співвідношення C_s / C_v.

Таким чином, $\overline{Q} = 147 \text{ м}^3/\text{с}$, $C_v = 0.48$, $C_s = 3C_v = 1.44$. При цьому $\sigma_Q = 0.48 \times 147 = 70.6$ м^3/с.

$$\sigma_{\overline{Q}} = \frac{\sigma_Q}{\sqrt{n}} = \frac{70.6}{\sqrt{24}} = 14.4;$$

$$\varepsilon_{\overline{Q}} = \frac{C_v}{\sqrt{n}} 100\% = \frac{0.48}{\sqrt{24}} 100\% = 9.80\%.$$

Середньоквадратичне відхилення коефіцієнту варіації при $C_s = 2C_v$ (табл.3.1 – метод найбільшої правдоподібності) складає:

$$\sigma_{C_V} = \frac{C_v}{\sqrt{2n}} \sqrt{\frac{3}{3 + C_v^2}} = \frac{0.48}{\sqrt{2 \times 24}} \sqrt{\frac{3}{3 + 0.48^2}} = 0.0668;$$

У нашому випадку $C_s = 3C_v$, отже для отриманого σ_{C_v} необхідно ввести поправочний коефіцієнт К, використовуючи рисунок 3.1, де $K = 1.1$. Тоді

$$\sigma_{C_V} = 0.0668 \times 1.1 = 0.0735;$$

$$\varepsilon_{C_V} = \frac{\sigma_{C_V}}{C_v} 100\% = \frac{0.0735}{0.48} 100\% = 15.3\%.$$

Середньоквадратичне відхилення C_s / C_v знаходимо в залежності від C_V (рис. 3.2).

$$\sigma_{C_s / C_v} = 0.73; \qquad \varepsilon_{C_S} = \frac{\sigma_{C_S}}{C_S} 100\% = \frac{0.73}{1.44} 100\% = 50.7\%.$$

Отримані результати свідчать, що необхідно привести цей ряд до тривалого періоду, оскільки відносні середньоквадратичні відхилення параметрів Q та C_V близькі до припустимих $(\varepsilon_{\overline{Q}} = 5 - 10\%; \quad \varepsilon_{C_v} = 15\%)$ або дещо перевищують їх.

8.3 Визначити статистичні параметри максимального стоку весняного водопілля для водозбору р. Половинна - с. Половина за період з 1951 по 1967 роки.

Вихідні матеріали та матеріали розрахунків емпіричної забезпеченості розміщуються в таблиці 8.3.

Хід виконання роботи:

1. На клітчатку ймовірностей наносимо величини стоку відповідної забезпеченості (графи 4 та 5 наведеної вище таблиці).
2. будуємо емпіричну криву забезпеченості.
3. З кривої знімаємо три характерні точки Q_5, Q_{50}, Q_{95}.
4. Обчислюємо коефіцієнт скошеності S за виразом (4.7).
5. Значення C_S знаходимо з таблиці 4.1 відповідно установленому S.
6. За формулами графоаналітичного методу визначаємо оцінки

статистичних параметрів σ_Q, C_v, $\overline{Q}$ (4.7; 4.9; 4.10).

Значення характерних витрат води становлять:

$$Q_{5\%} = 35.0 \text{ м}^3/\text{с}; \quad Q_{50\%} = 20.0 \text{ м}^3/\text{с}; \quad Q_{95\%} = 8.50 \text{ м}^3/\text{с}.$$

Отже, коефіцієнт скісності дорівнює:

$$S = \frac{x_5 + x_{95} - 2x_{50}}{x_5 - x_{95}} = \frac{35.0 + 8.50 - 2 \times 20.0}{35.0 - 8.50} = \frac{3.5}{26.5} = 0.13.$$

Значення коефіцієнту асиметрії установлюється в залежності від S за таблицею 4.1:

$$C_s = \varphi(S) = 0.45.$$

Статистичні параметри σ_Q, $\overline{Q}$, C_v обчислюються за формулами (4.9), (4.10) та (1.5):

$$\Phi_5 - \Phi_{95} = 3.26; \qquad \Phi_{50} = -0.08;$$

$$\sigma_Q = \frac{x_5 - x_{95}}{\Phi_5 - \Phi_{95}} = \frac{35.0 - 8.50}{3.26} = 8.13 \text{ м}^3/\text{с}.$$

$$\overline{Q} = Q_{50} - \sigma_Q \Phi_{50} = 20.0 - 8.13 \times (-0.08) = 20.6 \text{ м}^3/\text{с}.$$

$$C_v = \sigma_Q / \overline{Q} = 8.13 / 20.6 = 0.39.$$

Таблиця 8.3 – Розрахунки ординат емпіричної кривої забезпеченості максимального стоку весняного водопілля р.Половинна-с.Половина, 1951-1967 рр.

№ пп	Рік	Q_{max}, м^3/с	Q_{max}, м^3/с	$\hat{p} = \frac{m}{n+1}$
1	1951	16.1	31.5	5.90
2	1952	14.3	30.1	11.7
...	....	....	....	....
....	....	....	....	....
16	1967	24.7	9.71	94.1

8.4 Обчислити ординати кривої забезпеченості Пірсона ІІІ за статистичними параметрами $\overline{Q} = 272$ ***м³/с,*** $C_v = 0.24$, $C_s = 0.86$.

За визначеному по методу моментів значенню коефіцієнту варіації C_s=0.86 і по таблиці закону Пірсона ІІІ знаходимо нормовані відхилення Φ_p для різних забезпеченостей Р та записуємо у таблицю 8.4.

Таблиця 8.4 – Ординати кривої забезпеченості річного стоку р.Ока – м.Муром

C_s	Величина	Забезпеченість, Р%					
		0.01	0.10	1.0	3.0	...	99.9
0.86	Φ_p	5.64	4.32	2.93	2.20	....	-1.95
	$\Phi_s C_v$	1.35	1.04	0.70	0.53	....	-0.47
	$K_p = \Phi_p C_v + 1$	2.35	2.04	1.70	1.53	....	0.53
	$Q_p = K_p \overline{Q}$	639	551	462	416	....	138

8.5 Розрахувати коефіцієнт автокореляції та уточнити статистичні параметри річного стоку з водозбору р. Дерекойка – м. Ялта за 39-ти річний період спостережень

Вихідні дані та результати обчислень оформлюють у вигляді таблиці 8.5 згідно з формулою (6.3).

- середнє багаторічне значення річного стоку $\overline{q}$=10.5 л/с км²;
- середньоквадратичне відхилення σ_q = 4.2 л/с км² ;
- коефіцієнт варіації річного стоку $C_v = 0.40$;
- коефіцієнт асиметрії річного стоку $C_s = 1.16$;
- співвідношення $C_s / C_v = 2.89 \approx 3.00$
- середня квадратична похибка розрахунку параметра $\overline{q}$: $\sigma_q = 0.67$ л/с км²;

Коефіцієнт автокореляції при зсуві $\tau = 1$, розрахований по (6.1), дорівнює $0.38 - r(1) = 0.38$, а середньоквадратична похибка становить 0.152, тобто $\sigma_{\tau(1)} = 0.152$. Умова (6.5) виконується, тобто 0.380>2×0ю152, через що значення параметру слід визнати значущим. Використовуючи формули (6.6) та (6.7), а також табл. 6.1 і 6.2, визначаємо параметри C_v і C_s з урахуванням внутрішньорядних зв’язків. Уточнені значення параметрів такі: $C_V = 0.40$, $C_S = 1.39$, $C_S / C_V = 3.43$, $\sigma_q = 0.67$, $\sigma_{Cv} = 0.049$. Як показують результати розрахунків, вплив внутришньоядних зв'язків особливо виражений при розрахунках коефіцієнту асиметрії та співвідношення C_S / C_V.

Таблиця 8.5 – Обчислення коефіцієнту автокореляції річного стоку з водозбору р.Дерекойка - м.Ялта

№ пп	q_i л/скм^2	q_{i+1} л/скм^2	$(q_i - \overline{q})$	$(q_i - \overline{q})^2$	$(q_{i+1} - \overline{q})$	$(q_i - \overline{q}) \times (q_{i+1} - \overline{q})$
1	2	3	4	5	6	7
1	11.3		0.80	0.64		
2	10.3	11.3	-0.20	0.04	0.80	-0.16
3	9.46	10.3	-1.04	1.08	-0.20	0.21
4	8.45	9.46	-2.05	4.20	-1.04	2.13
5	7.44	8.45	-3.06	9.36	-2.05	6.27
6	13.9	7.44	3.40	11.6	-3.06	-10.4
7	14.5	13.9	4.00	16.0	3.40	13.6
8	7.85	14.5	-2.65	7.02	4.00	-10.6
9	9.66	7.85	-0.84	0.71	-2.65	2.23
10	13.3	9.66	2.80	7.84	-0.84	-2.35
11	4.43	13.3	-6.07	36.8	2.80	-17.0
12	7.85	4.43	-2.65	7.02	-6.07	16.1
13	9.05	7.85	-1.45	2.10	-2.65	3.84
14	8.25	9.05	-2.25	5.06	1.45	3.26
15	9.26	8.25	-1.24	1.54	-2.25	2.79
16	11.5	9.26	1.00	1.00	-1.24	-1.24
17	8.05	11.5	-2.45	6.00	1.00	-2.45
18	8.25	8.05	-2.25	5.06	-2.45	5.51
19	13.5	8.25	3.00	9.00	-2.25	-6.75
20	10.5	13.5	0.00	0.00	3.00	0.00
21	17.5	10.5	7.00	49.0	0.00	0.00
22	20.1	17.5	9.60	92.2	7.00	67.2
23	10.1	20.1	-0.40	0.16	9.60	-3.84

Продовження таблиці 8.5

.

№ пп	q_i л/скм^2	q_{i+1} л/скм^2	$(q_i - \overline{q})$	$(q_i - \overline{q})^2$	$(q_{i+1} - \overline{q})$	$(q_i - \overline{q}) \times (q_{i+1} - \overline{q})$
1	2	3	4	5	6	7
24	10.9	10.1	0.40	0.16	-0.40	-0.16
25	3.82	10.9	-6.68	44.6	0.40	-2.67
26	4.00	3.82	-6.50	42.2	-6.60	43.4
27	10.5	4.00	0.00	0.00	-6.50	0.00
28	7.24	10.5	-3.26	10.6	0.00	0.00
29	9.26	7.24	-1.24	1.54	-3.26	4.04
30	8.85	9.26	-1.65	2.72	-1.24	1.55
31	6.84	8.85	-3.66	13.4	-3.66	6.04
32	5.63	6.84	-4.87	23.7	-4.87	17.8
33	11.5	5.63	1.00	1.00	1.00	-4.87
34	12.9	11.5	2.40	5.76	2.40	2.40
35	24.7	12.9	14.2	202	14.2	3.40
36	15.9	24.7	5.40	29.2	5.40	76.7
37	14.7	15.9	4.20	17.6	4.20	22.7
38	8.45	14.7	-2.05	4.20	-2.05	-8.61
39	9.86	8.45	-0.64	0.41	-0.64	1.31
Сума				672		262

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Крицкий С.Н., Менкель М.Ф. Гидрологические основы управления речным стоком.- М. Наука,1981. - 235с.
2. Раткович Д.Я. Гидрологические основы водообеспечения.- М.: РАН ИВП. - 1995. - 428с.
3. Рождественский А.В.,Чеботарев А.И. Статистические методы в гидрологии. - Л.: Гидрометеоиздат, 1974. - 424с.
4. Руководство по определению расчетных гидрологических характеристик. – Л. Л.: Гидрометеоиздат, 1973. - 111 с.
5. Шелутко В.А. Статистические модели и методы исследования многолетних колебаний годового стока. -Л.: Гидрометеоиздат,1984.- 160 с.
6. Школьний Є.П., Лоєва І.Д., Гончарова Л.Д. Обробка та аналіз гідрометеорологічної інформації: навчальний підручник. - К.: Міносвіти України, 1999. - 600 с.
7. Международное руководство по методам расчета основных гидрологических характеристик.- Л.: Гидрометеоиздат,1984. - 247 с.

ЗБІРНИК МЕТОДИЧИХ ВКАЗІВОК ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З ДИСЦИПЛІНИ "ГІДРОЛОГІЧНІ РОЗРАХУНКИ"

Укладач: проф. Лобода Н.С.

Підп. до друку Формат Папір
Умовн. друк. арк. Тираж Зам. №

Надруковано з готового оригінал-макета

Одеський державний екологічний університет
65016, Одеса, вул.Львівська, 15