МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

О.І.ГЕРАСИМОВ, І.С.АНДРІАНОВА

ФІЗИКА В ЗАДАЧАХ

Затверджено вченою радою Одеського державного екологічного Університету Міністерства освіти і науки України як підручник для здобувачів вищої освіти за спеціальностями "Екологія", " Науки про землю ", " Комп'ютерні науки та інформаційні технології", "Технології захисту навколишнього середовища", "Водні біоресурси та аквакультура".
(Протокол №7 від 04.07.2016р.)

О д е с а
"ТЭС" – 2017

ББК 22.2
УДК 531

Друкується за рішенням вченої ради Одеського державного екологічного університету (протокол №11 від 27.10.2016)

Рецензенти:

Академік ВШ України, член-кореспондент АПН України, заслужений діяч науки і техніки України, голова комісії з фізики та астрономії навчально-методичної ради загальноосвітніх навчальних закладів МОН України, зав. каф. медичної та біологічної фізики Національного медичного університету ім. О.О. Богомольця (м.Київ),
д.ф.-м.н., проф. О.В.Чалий

Зав.каф. теплофізики Одеського національного університету ім.. І.І.Мечникова,
д.ф.-м.н., проф. В.В.Калінчак

Г37 **Герасимов Олег Іванович**
Фізика в задачах. Підручник. /О.І.Герасимов, І.С.Андріанова, Одеський державний екологічний університет.– Одеса: Вид-во “ТЭС”, 2017 – 564с.

Підручник “ Фізика в задачах“, має за мету поліпшення засвоєння змісту фізики студентами вищих навчальних закладів природничих напрямів підготовки за допомогою детального розгляду та розв’язання типових задач з окремих її підрозділів.

Акцент підручника спрямовано на роз’яснення, усвідомлення та застосування фізичних законів на шляху розв’язання конкретних задач.

Підручник може бути корисним для студентів, магістрів, аспірантів, викладачів та наукових співробітників вищих навчальних закладів із природничих напрямків підготовки.

ISBN 978-966-2389-83-8

© Одеський державний
екологічний університет, 2017

ЗМІСТ

Передмова 5

Частина I. Фізичні основи механіки 6

Вступ. Попередні відомості 6

Розділ 1. *Кінематика матеріальної точки і абсолютно твердого тіла.* 14

1.1. Кінематика матеріальної точки 14

1.2. Кінематика абсолютно твердого тіла 19

Розділ 2. *Динаміка матеріальної точки і системи матеріальних точок* 46

2.1. Динаміка прямолінійного руху 54

2.2.. Динаміка криволінійного руху 67

Розділ 3. *Закони збереження у механіці* 75

3.1. Закон збереження імпульсу 79

3.2. Закон збереження механічної енергії 83

Розділ 4 *Динаміка обертального руху твердого тіла* 99

Розділ 5. *Неінерціальні системи відліку* 122

Розділ 6. *Гідростатика і елементи гідродинаміки* 131

Частина II. Молекулярна фізика і термодинаміка 142

Розділ 7. *Основні положення молекулярно-кінетичної теорії* 143

Розділ 8. *Ідеальний газ. Параметри та рівняння стану ідеального газу* 151

Розділ 9. *Основи молекулярно-кінетичної теорії газів* 176

Розділ 10. *Процеси переносу в газах* 194

Розділ 11. *Основи термодинаміки.* 209

11.1. Перший закон термодинаміки. 209

11.2. Другий закон термодинаміки. Ентропія системи. 239

Розділ 12. *Реальні гази. Рівняння Ван-дер-Ваальса* 255

Розділ 13. *Фазові переходи. Термодинамічні властивості рідини та пари* 261

Частина III. Електрика та магнетизм 277

Розділ 14. *Електростатика* 283

14.1. Електростатичне поле та його характеристики 283

14.2. Електричне поле в діелектрику 291

14.3. Електростатичне поле зарядженого провідника. Електроємність. 295

14.4. Енергія електричного поля 297

Розділ 15. *Постійний електричний струм* 343

Розділ 16. *Електромагнетизм* 374

16.1. Магнітне поле та його характеристики. 374

16.2. Електромагнітна індукція 380

16.3. Змінний струм. 383

16.4. Магнітне поле у речовині. Енергія магнітного поля. 385

16.5. Рівняння Максвелла 387

Частина IV. Коливання та хвилі. Оптика. 422

Розділ 17. *Коливальні та хвильові процеси* 422

17.1. Кінематика і динаміка коливального руху 422

17.2. Додавання коливань 430

17.3. Хвилі та їх характеристики. Пружні хвилі. Звук 433

17.4. Електромагнітні хвилі 439

Розділ 18. *Оптика* 462

18.1. Геометрична оптика і фотометрія 462

18.2. Хвильова оптика 466

18.3. Квантова теорія випромінювання. Фотони 472
Частина V. Елементи квантової механіки, атомної та ядерної фізики 520
Розділ 19. Елементи квантової механіки та атомної фізики 520
Розділ 20. Будова та властивості ядер. Радіоактивність 537
Додатки 551
Предметний покажчик 559
Іменний покажчик 563
Список рекомендованої літератури 564

Передмова

Підручник створено з метою формування уявлень знань і навичок в галузі загальної фізики для студентів міждисциплінарних напрямків підготовки, таких, зокрема, як “Науки про Землю”, “Технології захисту навколишнього середовища”.

Значний обсяг різноманітної інформації, який надсилається таким студентам, практично не дозволяє зберігати у викладанні сумлінну логіку засвоєння положень фізичної науки. Убезпечити міждисциплінарний контингент від загрози еклектичного принципу формування знань та результатів навчання, на думку авторів підручника, міг би стати концептуальний принцип засвоєння основних положень фізики на шляху розв’язання задач. Саме пошук розв’язків різнорівневих задач від елементарних і до комплексних дозволяє перетворити теоретичні знання на практично-інструментальні, в яких будь-яка міждисциплінарна галузь відчуває гостру, наочну потребу.

Автори ставили перед собою метою написати підручник з фізики, який в однаковій мірі можна було б адресувати будь-якому міждисциплінарному напряму підготовки, працюючи з яким, студент засвоював би не низку схоластичних та легко втрачаємих визначень, формулювань, постулатів, а суто схему (динаміку) застосувань фізичних законів і підходів до розв’язків різних за складністю і ступеню узагальнень задач. В який мірі вдалося досягти поставленої мети - судити читачеві. Безумовно, була проведена попередня апробація матеріалів підручника на базі матеріалів конспекту кафедри загальної та теоретичної фізики на природоохоронному факультеті ОДЕКУ, яка дала позитивні результати.

Впродовж над підручником авторів стимулювала думка про те, що природа, на щастя, не знає про профільний поділ її дослідників і творить свої явища, кидаючи виклик своєю складністю водночас і фізикам, і хімікам, біологам, математикам, інженерам. Тому оволодіння положеннями, зокрема фізики, з урахуванням їх найбільш практичних застосувань, спонукає до нових методичних підходів і виглядає водночас і актуальним, і своєчасним.

Частина І. ФІЗИЧНІ ОСНОВИ МЕХАНІКИ

Вступ. Попередні відомості.

Задача механіки. Механіка – наука про механічний рух матеріальних тіл і взаємодії, які відбуваються між ними. Під механічним рухом розуміють зміну з часом взаємного положення тіл або їх частин у просторі. В природі ми спостерігаємо рух небесних тіл, коливання земної кори, повітряні та морські течії і т. ін. В техніці – рух транспорту, частин двигунів і механізмів, деформації елементів конструкцій, рух рідин і газів та багато іншого. Всі ці явища є прикладами механічного руху.

Традиційно механіку поділяють на три розділи: кінематику, динаміку і статику.

Кінематика вивчає властивості механічного руху у просторі та часі без розгляду причин, які його викликають.

Динаміка – розділ механіки, який вивчає вплив взаємодії тіл на механічний рух.

Статика розглядає умови рівноваги тіл під дією сил.

Простір і час. На основі вивчення механічного руху макроскопічних тіл формуються наші уявлення про фізичний простір і час. Ці поняття є фундаментальними, тобто їх не можна визначити через деякі простіші поняття. Простір виражає порядок співіснування окремих об’єктів, їх протяжність; час – послідовність зміни явищ, їх тривалість. Дослідним шляхом установлені властивості простору і часу: простір є тривимірним, однорідним та ізотропним, час – одновимірним і однорідним. Однорідність часу проявляється в незмінності фізичних законів у часі: дослід, проведений в незмінних фізичних умовах у різні моменти часу дає такий самий результат. З однорідністю часу пов’язано збереження енергії. Однорідність та ізотропність простору проявляються в незалежності фізичних явищ у замкненій (ізольованій) фізичній системі від її положення і орієнтації як цілого у просторі. З однорідністю простору пов’язано збереження імпульсу, з ізотропністю – збереження моменту імпульсу.

Саме такі уявлення про простір і час лежать в основі „Класичної механіки”, основи якої були закладені Галілеєм, а основні закони сформульовані Ньютоном. І хоча подальший розвиток фізики показав, що класична механіка справедлива лише для опису руху макроскопічних тіл, тобто тіл великих порівняно з атомними розмірами, до того ж за умов їх руху зі швидкостями малими порівняно зі швидкістю світла, вона ні в якому разі не втратила актуальності в сучасній фізиці. Майже всі механічні задачі прикладного характеру вирішуються на основі класичної механіки.

Як вже згадувалось вище, закони класичної механіки справедливі при русі макроскопічних тіл з швидкостями v, малими порівняно зі швидкістю світла у вакуумі c. Коли ці швидкості стають порівняними, класична

механіка „не працює”, і рух тіл здійснюється за законами релятивістської механіки (зокрема, спеціальної теорії відносності), розробленої на початку XX століття А.Ейнштейном. Теорія відносності не спростовує класичну механіку, а розглядає її як складову частину, область застосування якої визначається умовою $v << c$. Виявляється, що спеціальна теорія відносності неспроможна пояснити деякі явища, які відбуваються на величезних галактичних відстанях (або коли маємо справу з дуже великими масами). У цих випадках для розв’язання відповідних задач використовується загальна теорія відносності.

При вивченні явищ, які відбуваються на атомних і ядерних масштабах, для опису поведінки та взаємодії мікрооб’єктів (наприклад, елементарних частинок, атомів, молекул), класична механіка замінюється на квантову механіку – фундаментальну фізичну теорію, яка базується на корпускулярно-хвильовій концепції опису мікрочастинок і використовує статистичну інтерпретацію міри стану – хвильової функції, або релятивістську квантову механіку (у відповідних границях розмірів та швидкостей).

При цьому закони збереження імпульсу, моменту імпульсу, маси - енергії, заряду залишаються справедливими незалежно від розміру та швидкості руху об’єктів.

Міжнародна система одиниць (СІ). Розмірність фізичних величин.

Задача механіки (як і фізики в цілому) полягає у забезпеченні послідовного опису процесів і явищ, який припускає до того ж аналітичну форму запису у вигляді співвідношення між числами. Таким чином, при опису руху тіл перш за все виникає задача завдання способу та одиниць вимірювання величин (скажімо, простору і часу та ін.).

Одиниці вимірювання величин об’єднуються в базові системи одиниць. У кожній з таких систем певна фізична величина має тільки одну одиницю виміру. Система у свою чергу складається з основних і похідних одиниць. В основу системи покладена оптимальна (як правило, невелика) кількість одиниць, які й називають основними. Основні одиниці строго визначені і є незалежними одна від одної. Одиниці вимірювання інших (допоміжних) величин пов’язані з основними або між собою співвідношеннями, які визначають відповідну величину, і мають назву похідних одиниць.

Існує декілька систем, які відрізняються вибором основних одиниць.

З 1982 р. до використання рекомендована Міжнародна система одиниць (СІ), яка містить сім основних одиниць: довжини – метр (м), маси – кілограм (кг), часу – секунда (с), термодинамічної температури – кельвін (К), кількості речовини – моль (моль), величини електричного струму – ампер (А), сили світла – кандела (кд). Окрім того, використовують дві додаткові одиниці: плоских кутів – радіан (рад) і тілесних – стерадіан (ср).

Наведемо означення основних механічних одиниць СІ.

За основну одиницю довжини в Міжнародній системі одиниць (СІ) взято метр – відстань, яку проходить світло у вакуумі за проміжок часу 1/299792458 секунди.

Сучасна фізика і техніка експерименту дають можливість одержувати інформацію про матерію у масштабах від об'єктів мегасвіту до розміру елементарних частинок, на основі якої установлюються загальні закономірності, що пояснюють і пов'язують їх поведінку. Шкала, що дає уявлення про розміри об'єктів та масштабів у природі, наведена на рис.1. За основну одиницю довжини на цій шкалі взято метр. Відстані відкладені у логарифмічному масштабі: 1метру відповідає точка 0, (lg1 = 0), а кожний наступний інтервал у 10 разів більший за попередній.

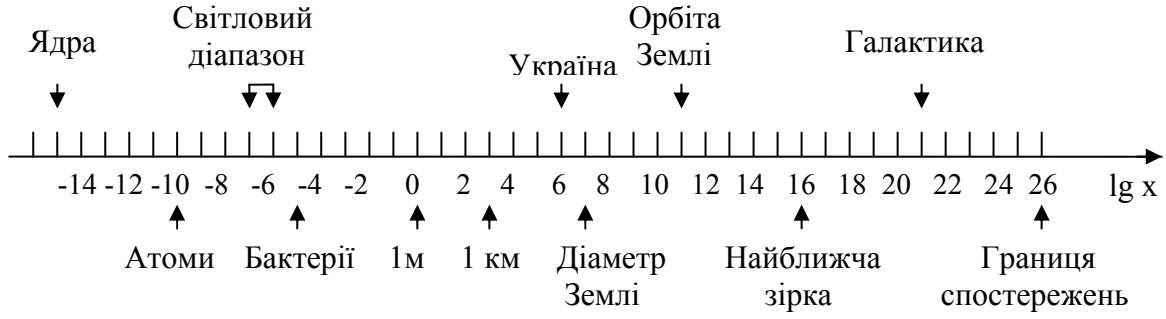


Рис. 1.

Завдання 1. Які непрямі методи вимірювання відстаней (наприклад, глибини моря, висоти гірської вершини, відстані до Луни і т. ін.) вам відомі?

За основну одиницю часу в Міжнародній системі одиниць (СІ) береться секунда. Це час, що дорівнює 9 192 631 770 періодам електромагнітного випромінювання, яке відповідає переходу між двома надтонкими рівнями основного стану атома цезію-133.

Рис. 2.

Сучасні прямі та непрямі (прикладом останніх може бути використання періоду піврозпаду радіоактивних ізотопів) методи вимірювань дають можливість вимірювати проміжки часу від періоду коливань атомних ядер до віку галактик. Характерні інтервали часу, виражені в секундах, (знов у логарифмічному масштабі) представлені на рис.2.

Завдання 2. Наведіть приклади природних систем, в яких події повторюються через певні детерміновані проміжки часу.

За основну одиницю маси в Міжнародній системі одиниць (СІ) взято кілограм – маса міжнародного еталону речовини, який виготовлено зі сплаву платини та іридію (90%Pt, 10% Ir) у вигляді циліндра (діаметром і висотою 39мм), що зберігається в Міжнародному бюро мір і ваг у м. Севрі (поблизу Парижа). Це тіло називають міжнародним прототипом кілограма.

Стандартну масу 1кг (точніше 0,99997кг) має 1дм^3 води при 4°С та атмосферному тиску.

Якщо діапазон лінійних розмірів і часових інтервалів, які є характерними для Всесвіту, становить близько 40 порядків величини, інтервал

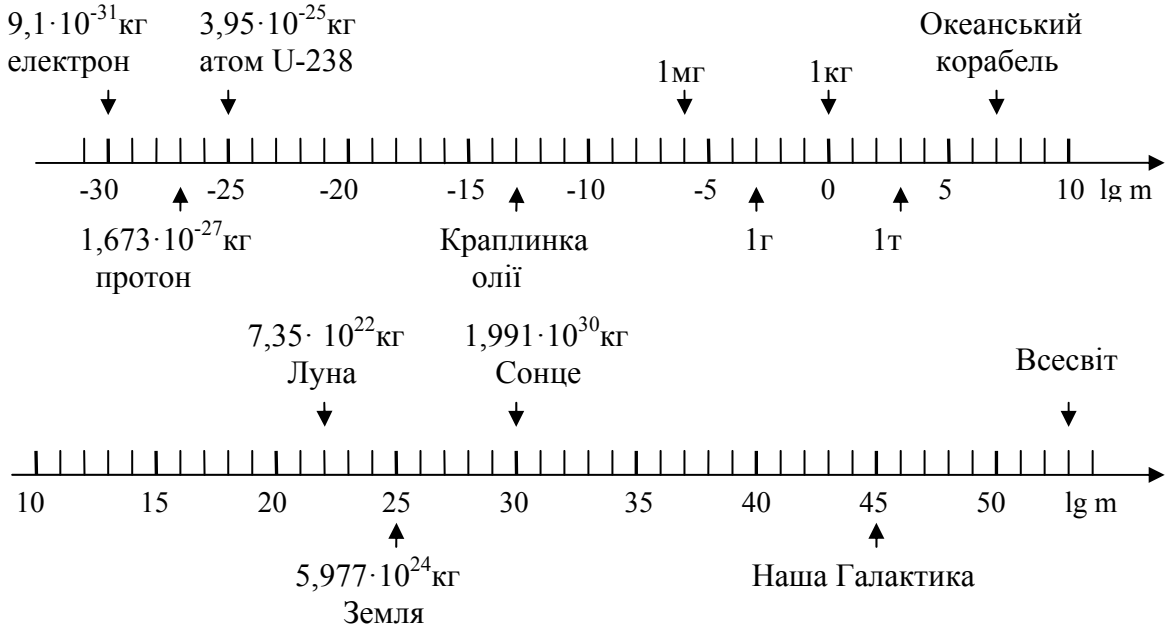


Рис.3

розбіжностей мас електрона і маси Всесвіту досягає приблизно 80 порядків величини (важко уявити собі це число!). Маси деяких найбільш важливих об’єктів природи (у логарифмічному масштабі) представлені на рис.3. За одиницю маси взято кілограм.

Спосіб визначення похідних одиниць вимірювання розглянемо на прикладі швидкості. В елементарну формулу швидкості рівномірного руху $v = \frac{s}{t}$, у якій v – швидкість; s – шлях, який тіло пройшло за час t, треба підставити одиниці вимірювання величин, що входять до неї: $[v] = \frac{[s]}{[t]} = \frac{м}{с}$.

Квадратні дужки позначають розмірність величини.

Розмірністю величини називають співвідношення, яке показує, як змінюється одиниця величини при зміні основних одиниць. Для розмінностей довжини l, маси m і часу t використовують позначення:

$$[l] = L, \ [m] = M, \ [t] = T.$$

За допомогою L, M, T розмірність будь-якої фізичної величини f може бути завдана співвідношенням:

$$[f] = L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma},$$

де α, β, γ - числа, які називають показниками розмінностей. Безрозмірною величиною називають таку, яка має нульову розмірність (її значення не залежить від вибору основних одиниць вимірювання).

Перевірка розмірності або одиниць вимірювання у фізичних формулах дозволяє виявити помилку в їх запису. Розмірності обох частин рівняння, яке виражає деякий фізичний закон, повинні бути однаковими, оскільки фізичні закони не можуть залежати від вибору одиниць вимірювання. Проте перевірка розмірності не гарантує правильного запису формул, бо не враховує безрозмірних множників (коефіцієнтів).

Завдання 3. На основі співвідношень $v = at$; $F = ma$; $A = F \cdot s$, що пов'язують фізичні величини, установити розмірності прискорення $[a]$, сили $[F]$ і роботи $[A]$.

Розв'язки фізичних задач надаються числами (із зазначенням одиниці вимірювання). Відповідь не можна вважати повною без наведення одиниці вимірювання, бо вона має кількісну характеристику і є суттєвою частиною відповіді.

Часто при розв'язку задач вихідні дані приводяться в позасистемних одиницях, або одиницях, які не належать до Міжнародної системи одиниць. В цьому випадку перед розрахунками необхідно усі величини виразити в одиницях СІ, скориставшись відомими еквівалентами.

Як приклад розглянемо перетворення швидкості v = 72 км/год. в метри в секунду (м/с).

$$v = 72 \text{ км/год.} = 72 \frac{(1км)}{(1год)}.$$

Замість попередньої одиниці довжини (км) у чисельник підставляємо її еквівалент в метрах (1000м), у знаменник підставляємо еквівалент часу в секундах (3600с) і отримуємо:

$$v = 72\frac{(1000м)}{(3600с)} = 20\frac{м}{с}.$$

Порядок фізичних величин, їх форма запису та оцінка. Якщо чисельні значення фізичних величин набагато більші або набагато менші від одиниці, використовують їх запис у, так званому, стандартному вигляді: у вигляді числа від 1 до 10 (чисельне значення або мантиса), помноженого на відповідний степінь десяти (порядок величини). Приклади такої форми запису величин див. на рис.2, 3. Перевагою є те, що показники степенів при множенні або діленні тільки додаються або віднімаються відповідно.

Наприклад, $10^a \cdot 10^b = 10^{a+b}$; $10^a / 10^b = 10^{a-b}$.

Для зручності в метричній системі одиниць часто використовують одиниці, які є кратними або частковими від основної одиниці. При цьому для переходу до основної одиниці до мантиси достатньо додати множник, який дорівнює десяти у відповідному степені (табл.1).

Таблиця 1.

Префікси і множники для утворення кратних і часткових одиниць

Префікс	Позначення	Множник	Префікс	Позначення	Множник
тера	Т	10^{12}	санті	с	10^{-2}
гіга	Г	10^{9}	мілі	м	10^{-3}
мега	М	10^{6}	мікро	мк	10^{-6}
кіло	к	10^{3}	нано	н	10^{-9}
гекто	г	10^{2}	піко	п	10^{-12}
дека	да	10^{1}	фемто	ф	10^{-15}
деци	д	10^{-1}	атто	а	10^{-18}

При виконанні розрахунків перш за все необхідно зробити грубу оцінку першої значущої цифри та визначити порядок шуканої величини, а потім при необхідності провести більш точний розрахунок.

Наведемо приклад такого розрахунку.

Приклад. Середня споживана потужність усіх електростанцій України $P = 54$ млн. кіловат (кВт). Яку площу повинні займати сонячні батареї для отримання такої ж потужності за рахунок сонячної енергії? Коефіцієнт корисної дії (ККД) перетворення сонячної енергії на електричну сучасних промислових сонячних елементів становить у середньому 14-18%. Середньорічна щільність потоку сонячної енергії на території України становить 180 – 250 Вт/м^2.

Розв'язання**:** Якщо взяти ККД елементів рівним 15%, а щільність потоку сонячної енергії рівною 200 Вт/м^2, після перетворення сонячної енергії на електричну маємо $\frac{P}{S}$=30 Вт/м^2.

Звідки $$S = \frac{5{,}4 \cdot 10^{10}\,\text{Вт}}{30\,\text{Вт}/\text{м}^2} = 1{,}8 \cdot 10^9\,\text{м}^2 = 1{,}8 \cdot 10^3\,\text{км}^2.$$

Зауважимо, еквівалентну площу має прямокутник зі сторонами 36х50 км.

Вектори і скаляри. При роботі з фізичними величинами суттєво визначити, до класу яких величин – векторів чи скалярів або тензорів належить дана фізична величина. Відповідно операції над ними здійснюються за різними правилами, притаманними типу величини.

Векторами називають величини, що характеризуються числовим значенням (абсолютною величиною або модулем), напрямом. Їх додавання здійснюється за правилом векторної суми – правилом паралелограма (рис.4а) або багатокутника (рис.4б).

Точка прикладання вектора не належить до його основних характеристик, її можна (це інколи дуже зручно) змінювати без шкоди для фізичного сенсу, а іноді (у випадку аксіальних векторів, таких, як кутова швидкість та ін.) вона принципово не визначена.

На рисунках (див. рис.4) вектор $\vec{a}$ зображується стрілкою, яка вказує його напрям. Довжина стрілки у вибраному масштабі визначає модуль вектора $|\vec{a}| = a$. До класу векторних величин належать швидкість, прискорення, сила і т. ін.

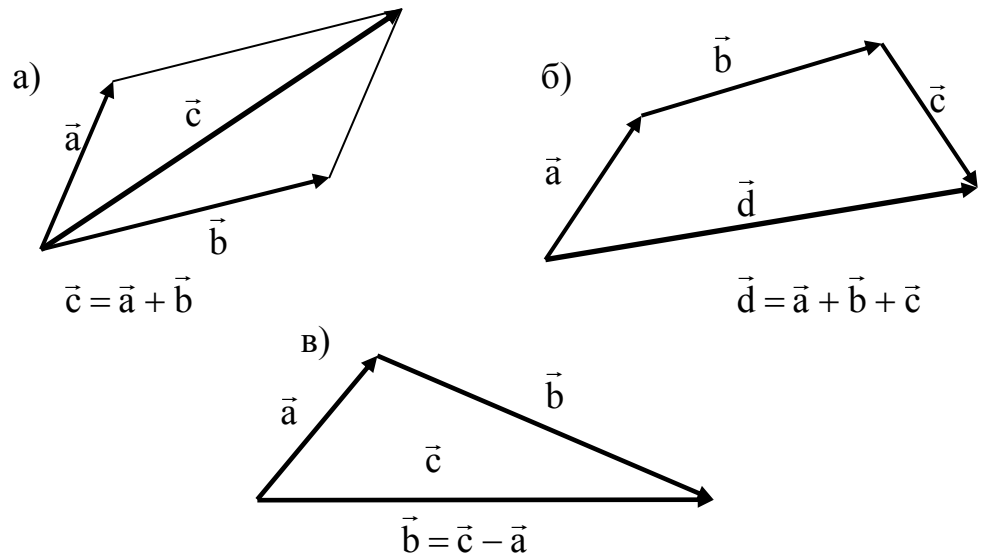


Рис.4 Ілюстрація правил векторної алгебри.

Скалярний добуток векторів $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right)$.

Векторний добуток векторів $\vec{c} = \left[\vec{a}\,\vec{b}\right]$, $c = ab\sin\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right)$. Напрям вектора $\vec{c}$ визначається за правилом правого гвинта. Цей вектор змінює свій знак при переході від правої системи координат до лівої (і навпаки) або при зміні послідовності множників і є аксіальним вектором.

Аксіальний вектор, або псевдовектор – величина, яка перетворюється як вектор при операціях повороту, але на відміну від вектора, не змінює свій знак при інверсії (зміні знаку) координат.

Величини, що повністю визначаються своїм числовим значенням, називаються скалярами. Операції над ними відповідають правилам звичайної алгебри. До класу скалярів належать, наприклад, час, об'єм, маса, робота, температура тощо.

Фізичні моделі. При вивченні фізичних явищ необхідне урахування зв'язку між різними процесами. При цьому можуть виникнути значні, іноді досить суттєві труднощі. Їх подолання можливе шляхом спрощення аналізованої картини, нехтуванням менш суттєвого із зосередженням на найбільш важливих характеристиках і властивостях тіл або процесів. Саме цю процедуру називають моделюванням. Взагалі фізика (і зокрема її розділ "Механіка") завдяки можливості побудови абстрактних моделей має унікальну можливість побудови узагальнюючих уявлень про процеси, які протікають у навколишньому середовищі.

Найбільш важливі моделі, які використовуються в механіці – матеріальна точка, абсолютно тверде тіло, суцільне середовище.

Матеріальною точкою вважають тіло, розмірами і формою якого в умовах даної задачі можна знехтувати і вважати, що вся його маса зосереджена в одній точці.

Одне тіло у деяких випадках можна вважати матеріальною точкою, в інших – ні. Наприклад, при опису руху Землі уздовж орбіти навколо Сонця її можна вважати за матеріальну точку. Якщо ж урахувати обертання Землі навколо власної осі, цього не можна робити. Так само, при ковзанні кульки по гладкій поверхні її рух можна розглядати як рух матеріальної точки. Але, коли вона котиться, обертаючись (за наявністю тертя) навколо миттєвої осі, таке модельне уявлення стає неадекватним. Отже, можливість застосування різних модельних уявлень, які спрощують розгляд задач, залежить від масштабів, на яких оцінюється рух тіла, та його характеру.

Абсолютно твердим вважають тіло, форма і розміри якого, залишаються незмінними за будь-яких зовнішніх впливів. Таких тіл не існує в природі, це модель, яку можна собі уявляти як систему жорстко зв'язаних матеріальних точок, відстань між якими не змінюється в процесі руху і взаємодії з іншими тілами. Цією фізичною моделлю зручно користуватися у випадках, коли деформаціями тіл можна знехтувати.

При вивченні руху рідин і газів у багатьох випадках ми можемо абстрагуватися від урахування їх атомно-молекулярної будови. Інакше кажучи – можна розглядати рідини та гази як неперервне, **суцільне середовище.** Саме така фізична ідеальна модель лежить в основі цілого розділу механіки (і взагалі фізики!) – механіки суцільних середовищ.

Розділ 1. Кінематика матеріальної точки і абсолютно твердого тіла

Тема: Кінематичні характеристики руху: траєкторія, шлях, переміщення, швидкість, прискорення. Прямолінійний рівномірний та рівнозмінний рух. Криволінійний рух тіла: тангенціальна і нормальна складові прискорення. Кінематика руху точки по колу: кутова швидкість, кутове прискорення. Рух твердого тіла.

Основні поняття і формули

1.1. Кінематика матеріальної точки.

Кінематичними характеристиками точки є – переміщення, шлях, швидкість, прискорення та час руху. Шлях і час руху – є скалярним величинами, всі інші – векторні.

● **Траєкторія** – лінія, вздовж якої рухається точка. Форма траєкторії залежить від вибору системи відліку**.**

● **Система відліку** включає: 1) тіло відліку – довільно вибране тіло або система тіл, відносно якого визначається положення точки; 2) систему координат, яка жорстко зв'язана з тілом відліку; 3) зазначення початку відліку часу та способу його вимірювання.

В залежності від форми траєкторії рух поділяють на **прямолінійний** і **криволінійний.**

● **Шлях s (** Δs **)** – довжина траєкторії, тобто відстань, яку матеріальна точка проходить вздовж траєкторії. Це завжди додатна величина.

● **Переміщення** $\Delta\vec{r}$ – напрямлений відрізок прямої (вектор), який з'єднує початкове положення матеріальної точки на траєкторії з подальшими її положеннями. (рис.1.1).

Модуль переміщення дорівнює довжині шляху при прямолінійному русі, але менший за довжину шляху при криволінійному русі.

● **Радіус-вектор**

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \qquad (1.1)$$

задає положення матеріальної точки (центра мас твердого тіла) у просторі. Тут $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - одиничні вектори напрямів (орти); x, y, z – координати точки (рис.1.2).

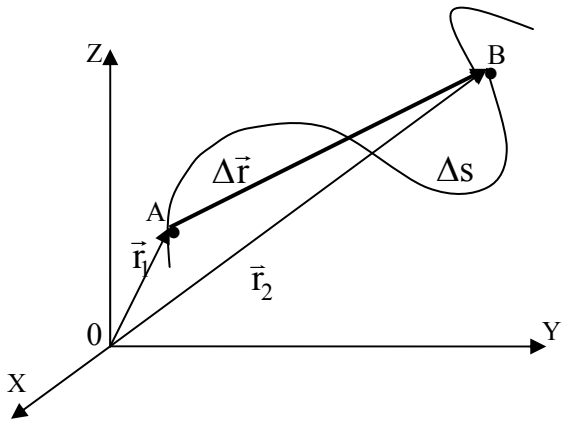


Рис.1.1 Шлях Δs і переміщення $\Delta\vec{r}$ матеріальної точки.

Модуль радіус-вектора $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. (1.2)

● Кінематичне рівняння руху матеріальної точки завдає залежність її координат від часу і має вигляд:

у векторній формі $\vec{r} = f(t)$,
у скалярній формі

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \\ z = f_3(t) \end{cases}$$

● **Переміщення** матеріальної точки

$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$; (1.3)

$\Delta r = |\Delta\vec{r}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$, (1.3а)

де Δx, Δy, Δz – проекції вектора переміщення на координатні осі.

Модуль елементарного переміщення збігається з величиною елементарного шляху: $|d\vec{r}| = ds$.

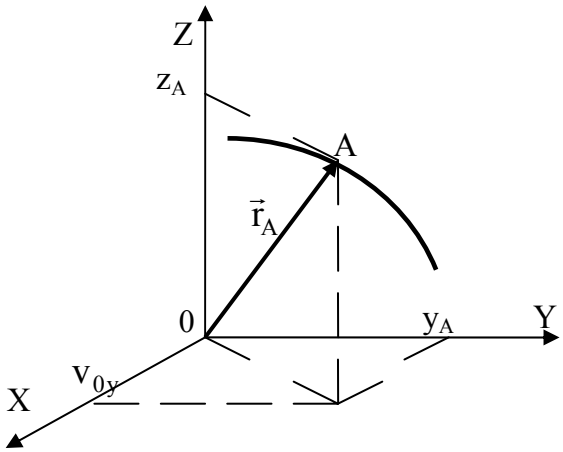


Рис.1.2 Векторний і координатний спосіб завдання положення точки.

● **Середня швидкість** $\langle\vec{v}\rangle = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$, (1.4)

де $\Delta\vec{r}$ – переміщення матеріальної точки за час Δt.

На практиці розглядають також середню скалярну швидкість $\langle v\rangle$ – середню швидкість проходження шляху ΔS:

$$\langle v\rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t}. \quad (1.5)$$

Зауважимо, що $\langle|\vec{v}|\rangle = \langle v\rangle$ тільки при прямолінійному русі в одному визначеному напрямку (при відсутності точки повороту, тобто без зміни напряму руху на протилежний).

● **Миттєва швидкість** – вектор, який дорівнює похідній радіус-вектора матеріальної точки за часом.

$\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$. (1.6)

$v_x = \dfrac{\partial x}{\partial t}, v_y = \dfrac{\partial y}{\partial t}, v_z = \dfrac{\partial z}{\partial t}$ – проекції швидкості на осі координат; x, y, z – координати точки.

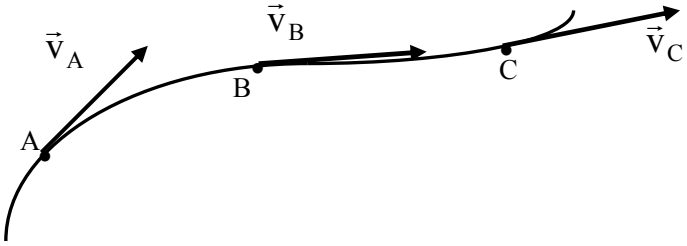


Рис. 1.3 Напрям вектора швидкості.

Вектор миттєвої швидкості у кожній точці траєкторії напрямлений вздовж дотичної до траєкторії у тій самій точці (рис.1.3).

Модуль вектора швидкості $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$. (1.6а)

● $\Delta\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}dt$ – переміщення точки за час $\Delta t = t_2 - t_1$. (1.7)

● $S = \int_{t_1}^{t_2} vdt$ – шлях, який точка пройшла за час $\Delta t = t_2 - t_1$. (1.8)

● **Середнє прискорення** $\langle\vec{a}\rangle = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$. (1.9)

● **Миттєве прискорення** дорівнює похідній вектора швидкості за часом

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \qquad (1.10)$$

У проекціях $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$,

де $a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t}, a_y = \frac{\partial v_y}{\partial t}, v_z = \frac{\partial v_z}{\partial t}$.

● Для визначення миттєвого прискорення $\vec{a}$ **при криволінійному русі** його зручно розкласти на дві складові: тангенціальне прискорення $\vec{a}_\tau$ та нормальне прискорення $\vec{a}_n$ (рис.1.4).

● **Тангенціальне прискорення**

$$\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} \qquad (1.11)$$

характеризує зміну швидкості за величиною, спрямоване по дотичній до траєкторії.

● **Нормальне прискорення**

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\vec{n} \qquad (1.12)$$

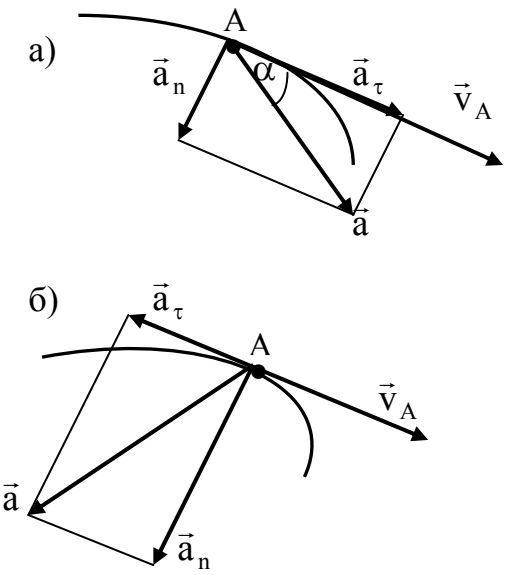


Рис.1.4 Прискорення при криволінійному русі точки
а) прискорений рух;
б) уповільнений рух.

характеризує зміну швидкості за напрямком, спрямоване до центра кривизни траєкторії. (R – радіус кривизни траєкторії).

● **Повне прискорення**, виражене через компоненти $\vec{a}_\tau$ і $\vec{a}_n$:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\vec{n}. \qquad (1.13)$$

Тут $\vec{\tau}$, $\vec{n}$ - орти (одиничні вектори) дотичної та нормалі до траєкторії.
Величина прискорення обчислюється за формулою

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}. \qquad (1.13а)$$

Деякі корисні випадки.

Рівнозмінний прямолінійний рух вздовж осі 0x ($\vec{a} = \vec{a}_\tau = \text{const}$; $\vec{a}_n = 0$).

● Закон руху $$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}, \qquad (1.14)$$

де x_0 – координата точки в момент часу t=0; v_{0x} і a_x – проекції початкової швидкості та прискорення точки на координатну вісь.

● Проекція переміщення на координатну вісь:

$$S_x = x - x_0 = v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}. \qquad (1.15)$$

● Швидкість рівнозмінного руху

$$v_x = v_{0x} + a_x t. \qquad (1.16)$$

● $$v_x^2 - v_{0x}^2 = 2a_x S_x. \qquad (1.17)$$

Зауваження. При запису рівнянь, що описують прямолінійний рух, індекси, які указують на проекції векторів, часто опускають, а відповідні знаки проекцій вводять безпосередньо у формулу. Наприклад,

$v = v_0 \pm at$, де «+» відповідає прискореному руху, «–» – уповільненому.

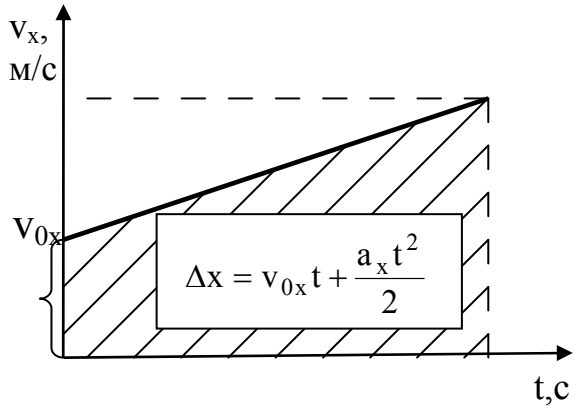


Рис.1.5 Графік швидкості при рівноприскореному прямолінійному русі.

Рівномірний прямолінійний рух вздовж осі 0x ($\vec{v} = \text{const}$; $\vec{a} = 0$).

● рівняння руху

$$x = x_0 + v_x t. \qquad (1.18)$$

● $S = vt$ – шлях. (1.19)

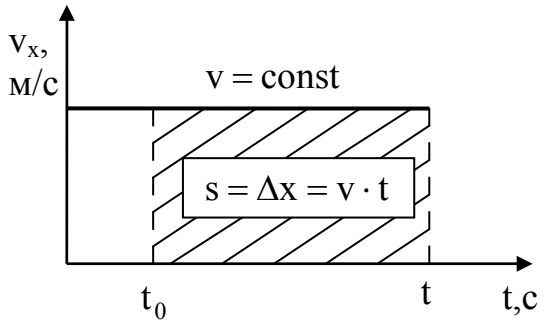


Рис.1.6 Графік швидкості при рівномірному прямолінійному русі.

На графіку швидкості (рис.1.5; рис.1.6) переміщення точки чисельно дорівнює площині фігури, яка обмежена графіком швидкості, віссю часу і координатами крайніх точок, які завдають початок і кінець руху.

Рух точки по колу.

Для опису руху зручно використовувати кутові змінні: кут оберту φ, кутову швидкість ω, кутове прискорення ε.

● **Кінематичне рівняння обертального руху** $\varphi = f(t)$ (φ – кут повороту вектора $\vec{R}$, проведеного із центра кола, вздовж якого рухається точка, до цієї точки) .

● **Величина кутової швидкості**

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} . \qquad (1.20)$$

Вектор $\vec{\omega}$ напрямлений вздовж осі обертання та зв'язаний з напрямом обертання правилом правого ггвинта, тобто його напрям збігається з напрямом поступального руху правого гвинта, який повертається за напрямом обертання матеріальної точки (див. рис.1.7).

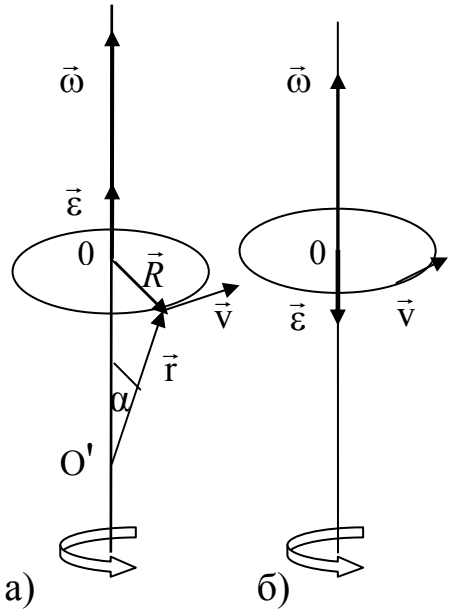


Рис.1.7 Кутова швидкість та кутове прискорення точки при русі по колу.
а) прискорений рух;
б) уповільнений рух.

● **Величина кутового прискорення**

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \qquad (1.21)$$

Напрям вектора $\vec{\varepsilon}$ збігається з напрямом $\vec{\omega}$, або є протилежним при прискореному та уповільненому русі відповідно.

Елементарний кут повороту $d\vec{\varphi}$, кутова швидкість $\vec{\omega}$ і кутове прискорення $\vec{\varepsilon}$ – аксіальні вектори (псевдовектори).

● Рівняння **рівнозмінного** обертання ($\vec{\varepsilon} = const$)

$$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}; \qquad (1.22)$$

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t; \qquad (1.23)$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = \pm 2\varepsilon\varphi . \qquad (1.24)$$

Знак «+» відповідає прискореному руху, «–» – уповільненому.

● Рівняння **рівномірного** обертання навколо фіксованої осі

($\vec{\omega} = const, \vec{\varepsilon} = 0$): $\qquad \varphi = \varphi_0 + \omega t . \qquad (1.25)$

Інакше: $\qquad \varphi = 2\pi N , \qquad (1.26)$

де N – кількість обертів за час t .

$$\omega = 2\pi n , \qquad (1.27)$$

де n – частота обертання, тобто кількість обертів за одиницю часу.

$$n = \frac{N}{t} = \frac{1}{T}, \qquad (1.28)$$

де T – період обертання (час, за який здійснюється один оберт).

● Зв'язок між величинами, вираженими у лінійних і кутових змінних:

довжина дуги, що пройдена точкою, $S = \varphi R$, (1.29)

лінійна швидкість точки $v = \omega R$; (1.30)

векторна форма $\vec{v} = [\vec{\omega}\vec{r}]$;

тангенціальне прискорення точки $a_\tau = \varepsilon R$; (1.31)

векторна форма $\vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon}\vec{r}]$;

нормальне прискорення точки $a_n = \omega^2 R$. (1.32)

векторна форма $\vec{a}_n = [\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}]]$

де φ – кут обертання, R – радіус кола, по якому рухається точка; $\vec{r}$ – вектор, проведений від деякої точки O', що належить осі обертання, до матеріальної точки M, $R = r\sin\alpha$ (див.рис.1.7а).

● **Закон додавання швидкостей** (принцип відносності) Галілея пов'язує швидкості точки в різних системах відліку (системах відліку К і К').

Швидкість $\vec{v}$ матеріальної точки відносно нерухомої системи відліку К дорівнює векторній сумі відносної $\vec{v}'$ і переносної $\vec{v}_0$ швидкостей:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0 . \qquad (1.33)$$

Відносна швидкість $\vec{v}'$ – швидкість точки відносно рухомої системи відліку К'; переносна швидкість $\vec{v}_0$ – швидкість системи відліку К' відносно нерухомої системи К.

1.2. Кінематика абсолютно твердого тіла.

Кількість незалежних координат, яке повністю визначають положення тіла або системи тіл у просторі, називають кількістю ступенів вільності.

Абсолютно тверде тіло має шість ступенів вільності (i=6): три ступені вільності поступального руху і три – обертального руху. Отже будь-який механічний рух твердого тіла можна розкласти на поступальний і обертальний.

● При поступальному русі пряма лінія, що сполучає дві довільні точки твердого тіла, залишається паралельною сама собі: всі точки тіла описують однакові траєкторії. Для

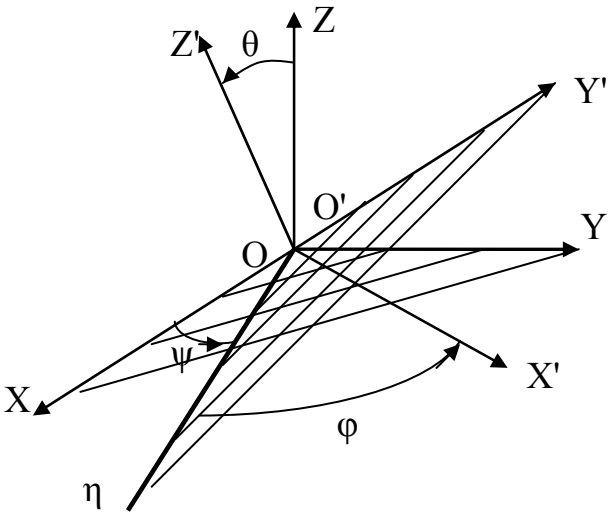


Рис.1.8 Кути Ейлера

вивчення такого типу руху достатньо дослідити поведінку однієї з них (див. розділ „Кінематика матеріальної точки“).

● Виділяють два види обертального руху твердого тіла.
1. При обертальному русі навколо нерухомої осі всі точки тіла описують концентричні кола у паралельних площинах з центрами на нерухомій осі обертання, мають однакові кутові швидкості і прискорення (див. розділ „Рух матеріальної точки по колу“).

2. При обертальному русі навколо нерухомої точки (полюсу) всі точки переміщуються по поверхні концентричних сфер з центрами у полюсі. Такий рух описують за допомогою кутів Ейлера, які характеризують взаємне положення двох прямокутних систем координат, початок яких співпадає з точкою O закріплення твердого тіла (рис.1.8). Система X,Y,Z, відносно якої розглядається рух тіла, є нерухомою; система X',Y',Z' зв'язана з тілом, яке обертається; $\varphi = \angle \eta OX'$ - кут власного обертання, $(0 \le \varphi \le 2\pi)$; $\psi = \angle XO\eta$ - кут прецесії, $(0 \le \psi \le 2\pi)$; $\vartheta = \angle ZOZ'$ - кут нутації, $(0 \le \vartheta \le \pi)$; $O\eta$ - лінія вузлів (лінія перетину площин O'X'Y' і OXY). Позитивний напрям вздовж лінії вузлів задає вектор $\vec{\tau} = \left[\vec{i}_Z \vec{i}_{Z'}\right]$.

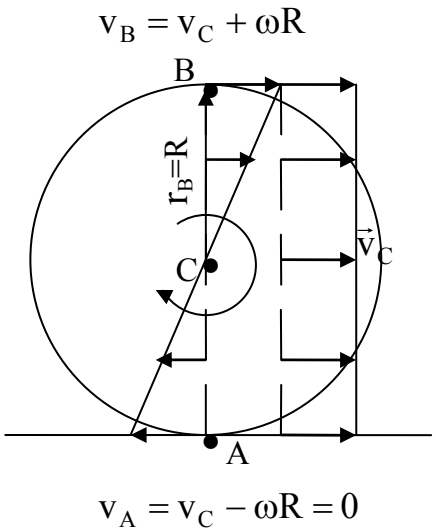


Рис.1.9 Представлення плоского руху циліндра, як поступального з швидкістю $\vec{v}_c$ і обертального відносно осі C з кутовою швидкістю ω.

● При плоскому русі тіла, коли всі точки тіла рухаються у паралельних площинах (гвинти, болти, шатуни двигунів внутрішнього згорання, котіння тіла по поверхні без ковзання), швидкість будь-якої точки тіла відносно нерухомої системи відліку

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \left[\vec{\omega}\vec{r}\right]. \qquad (1.34)$$

Тут $\vec{v}_0$ - швидкість поступального руху тіла, $\vec{v}' = \left[\vec{\omega}\vec{r}\right]$- швидкість обертального руху точки відносно осі, проведеної через довільну точку тіла перпендикулярно до площини, в якій рухається точка; $\vec{r}$ - радіус-вектор точки з початком відліку в будь-якій точці O, що лежить на осі; $\vec{\omega}$- кутова швидкість, яка не залежить від вибору осі обертання. Вельми зручним є розбиття плоского руху на поступальний зі швидкістю центра мас $\vec{v}_c$ і обертальний відносно осі, яка проходить через цей центр (рис.1.9).

Методичні вказівки.

При розв'язуванні задач, пов'язаних із вивченням руху тіл, перш за все, необхідно вибрати систему відліку, зв'язати з нею систему координат, записати кінематичні рівняння відповідно до умови задачі (в загальному випадку у векторній формі), а потім спроектувати ці рівняння на координатні осі.

Якщо рух складний, тобто тіло водночас бере участь у декількох типах рухів, то розв'язання задачі здійснюється шляхом розгляду окремих рухів так, ніби вони відбуваються незалежно один від одного. При цьому переміщення, швидкість, прискорення тіла визначаються як векторна сума відповідних характеристик окремих видів руху.

При розв'язуванні задач, в яких розглядається кінематичний рух тіл у полі тяжіння, систему координат зручно обирати таким чином, щоб частина проекцій вектора швидкості або прискорення на них дорівнювала нулю. Це дозволяє спростити як самий розклад руху на складові частини, так і взагалі розв'язання задачі.

Якщо за умовою задачі розглядається рух декількох тіл, то систему відліку раціонально обирати таким чином, щоб отримати розв'язок у найпростішій формі. Часто це система, жорстко зв'язана з одним із тіл, які рухаються. При цьому необхідно враховувати принцип відносності, згідно з яким, якщо швидкість тіла А відносно тіла В дорівнює $\vec{v}$, то тіло В рухається відносно тіла А зі швидкістю $-\vec{v}$.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1.1. Матеріальна точка рухається вздовж осі Ох за законом $x = A + Bt + Ct^3$, де А=3 м, В=2 м/с, С=0,05 м/с^3. Визначити координату х, швидкість v й прискорення а у моменти часу $t_1 = 0$; $t_2 = 4$ с, а також шлях S, середні значення швидкості $\langle v \rangle$ й прискорення $\langle a \rangle$ за перші 4 с руху.

$x = A + Bt + Ct^3$ А=3 м В=2 м/с С=0,05 м/с^3 $t_1 = 0$ $t_2 = 4$ с	Розв'язання. Координати знаходимо підстановкою в закон руху числових значень коефіцієнтів А, В і С і часу t. $x_1 = 3$ м; $x_2 = (3 + 2 \cdot 4 + 0{,}05 \cdot 4^3)$м=14,2 м. При прямолінійному русі шлях s дорівнює величині переміщення Δx: $S = x_2 - x_1 = (14{,}2 - 3)$м=11,2 м. Середня швидкість визначається таким чином: $\langle v \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{14{,}2 - 3}{4}$ м/с=2,8 м/с.
x_1, x_2, v_1, v_2, a_1, a_2, S, $\langle v \rangle$, $\langle a \rangle$-?	

Миттєва швидкість v є першою похідною від координати за часом: $v = v_x = \frac{dx}{dt} = B + 3Ct^2$.

$v_1 = 2$ м/с; $v_2 = 2 + 3 \cdot 0{,}05 \cdot 4^2 = 4{,}4$ (м/с).

Середнє прискорення $\langle a \rangle = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{4{,}4 - 2}{4}$ м/с^2=0,6 м/с^2.

Миттєве прискорення: $a = a_x = \frac{dv_x}{dt}$=6Ct.

$a_1 = 6 \cdot 0{,}05 \cdot 0 = 0$; $a_2 = 6 \cdot 0{,}05 \cdot 4$ м/с^2=1,2 м/с^2.

Відповідь: $x_1 = 3$м; x_2= 14,2м; $v_1 = 2$ м/с; v_2 =4,4 м/с; $a_1 = 0$; a_2=1,2м/с^2; $S = 11{,}2$ м; $\langle v \rangle$= 2,8 м/с; $\langle a \rangle$= 1,2 м/с^2.

Зауваження. Якщо точка рухається вздовж прямої в одному напрямку, її шлях s співпадає з переміщенням (різницею координат Δx). У випадку, коли в деякий момент часу напрямок руху змінюється на протилежний, координата з даного моменту часу зменшується, а шлях продовжує зростати. Тоді $\langle v \rangle = \frac{S_1 + S_2}{t}$, де S_1та S_2 - шлях, пройдений перед та після повороту. Момент повороту $t_п$ можна визначити за умовою $v(t_п)$=0.

Приклад 1.2. Електрон, початкове положення якого в обраній системі відліку визначається радіус-вектором $\vec{r}_0 = \vec{i}x_0 + \vec{j}y_0$, де x_0=1м, y_0=2м, $\vec{i}$, $\vec{j}$ − орти декартової системи координат, починає рухатися зі швидкістю $\vec{v}_0 = \vec{k}v_{0z}$, де v_{0z} = 3м/с, і прискоренням $\vec{a}(t) = \vec{j}A + \vec{k}Bt$, де A=10м/с^2, B=12м/с^3. Знайти: а) координати (x,y,z) електрона в момент часу t_1=1с після початку руху; б) переміщення за цей час; в) швидкість електрона у вищеозначений момент; г) кут між радіусом-вектором і вектором швидкості електрона в початковий момент часу t_0=0.

$\vec{r}_0 = \vec{i}x_0 + \vec{j}y_0$
x_0=1м; y_0=2м
$\vec{v}_0 = \vec{k}v_{0z}$
v_{0z} = 3м/с
$\vec{a}(t) = \vec{j}A + \vec{k}Bt$
A=10м/с^2
B=12м/с^3
t_0=0; t_1=1с
$x(t_1), y(t_1), z(t_1)$, $\lvert\Delta\vec{r}\rvert, v(t_1)$, α_0 - ?

Розв’язання.

а) За означенням прискорення (1.10) $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$. Звідки шляхом інтегрування дістаємо вираз для швидкості електрона в будь-який момент часу t: $\vec{v}(t) = \int \vec{a}dt + C = \int (\vec{j}A + \vec{k}Bt)dt + C = \vec{j}At + \vec{k}B\frac{t^2}{2} + C$.

Константу інтегрування C визначаємо за допомогою початкової умови $\vec{v}(0) = \vec{v}_0 = \vec{k}v_{0z} = C$.

Отже, $C = \vec{k}v_{0z}$. Відповідно, для $\vec{v}(t)$ маємо

$$\vec{v}(t) = \vec{j}At + \vec{k}(v_{oz} + B\frac{t^2}{2}). \qquad (1)$$

Аналогічно, користуючись означенням швидкості $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, знаходимо радіус-вектор електрона для довільного моменту часу:

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}dt + C_1 = \int\left(\vec{j}At + \vec{k}(v_{oz} + B\frac{t^2}{2})\right)dt + C_1 = \vec{j}A\frac{t^2}{2} + \vec{k}(v_{oz}t + B\frac{t^3}{6}) + C_1.$$

Користуючись початковою умовою $\vec{r}(0) = \vec{r}_0 = \vec{i}x_0 + \vec{j}y_0$, знаходимо константу інтегрування $C_1 = \vec{i}x_0 + \vec{j}y_0$. Остаточно отримуємо:

$$\vec{r}(t) = \vec{i}x_0 + \vec{j}(y_0 + A\frac{t^2}{2}) + \vec{k}(v_{oz}t + B\frac{t^3}{6}). \qquad (2)$$

За формулою (2) визначаємо координати електрона в момент t_1=1с:

$$x(t_1) = x_0 = 1\text{м}; \quad y(t_1) = y_0 + A\frac{t_1^2}{2} = 7\text{м}; \quad z(t_1) = (v_{oz}t_1 + B\frac{t_1^3}{6}) = 5\text{м}.$$

б) Переміщення електрона $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$. Модуль переміщення за першу секунду руху дорівнює

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2} = 7{,}1(\text{м})$$

в) Величина швидкості електрона визначається через її компоненти, що входять у вираз (1), за формулою $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$:

$$v(t_1) = \sqrt{0 + (At_1)^2 + \left(v_{0z} + B\frac{t_1^2}{2}\right)^2} = 13{,}5 \text{ м/с}.$$

г) За умовою задачі z_0=0, тобто електрон знаходиться у площині XOY, а його початкова швидкість $\vec{v}_0$ спрямована вздовж осі OZ. Звідси випливає, що $\vec{v}_0 \perp \vec{r}_0$, тобто кут α між цими векторами дорівнює 90º.

Відповідь: $x(t_1)$=1м; $y(t_1)$ =7м; $z(t_1)$=5м; $|\Delta\vec{r}|$=7,1(м); $v(t_1)$=13,5 м/с; α=90º.

Приклад 1.3. Автомобіль проходить першу третину шляху зі швидкістю $v_1 = 50$ км/год, а решту шляху – зі швидкістю v_2. Визначити швидкість v_2, якщо середня швидкість на всьому шляху $\langle v \rangle$=72 км/год.

$v_1 = 50$ км/год = 13,9 м/с

$\langle v \rangle$=72 км/год= 20 м/с

$S_1 = \frac{1}{3}S$

$v_2 - ?$

Розв'язання.

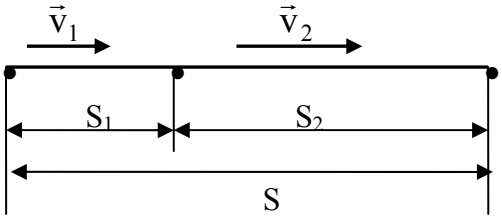


Рис.1.10

За означенням середньої швидкості $\langle v \rangle = \frac{S}{t}$, де $t = t_1 + t_2$.

Час руху на першій (t_1)та другій (t_2) частині шляху (див. рис.1.10) знаходимо за допомогою рівняння рівномірного руху:

$$S_1 = v_1 t_1, \quad \text{звідси } t_1 = \frac{S_1}{v_1} = \frac{S}{3v_1}; \qquad S_2 = v_2 t_2, \quad \text{звідси } t_2 = \frac{S_2}{v_2} = \frac{S}{3v_2}.$$

Тоді $t = t_1 + t_2 = \frac{S}{3v_1} + \frac{2S}{3v_2} = \frac{S}{\langle v \rangle}$, тобто $\frac{1}{3v_1} + \frac{2}{3v_2} = \frac{1}{\langle v \rangle}$.

З останнього рівняння знаходимо вираз для швидкості автомобіля на другій частині шляху:

$$v_2 = \frac{2v_1\langle v \rangle}{3v_1 - \langle v \rangle} = \frac{2 \cdot 13{,}9 \cdot 20}{3 \cdot 13{,}9 - 20} = 25{,}6\,(\text{м/с}).$$

Відповідь: v_2 = 25,6 м/с.

Приклад 1.4. Потяг рухається у північно-східному напрямі зі швидкістю 60 км/год., а автомобіль – на південь зі швидкістю 80 км/год. Визначити величину і напрям швидкості переміщення потягу відносно автомобіля.

Розв’язання.

v_1=60км/год= 16,7м/с
v_2=80км/год= 22.2м/с
$\alpha_1 = 45^\circ$
$\alpha_2 = -90^\circ$
$v_в$, β - ?

У відповідності із законом додавання швидкостей (1.33) швидкість потягу відносно землі (абсолютна швидкість) $\vec{v}_1$ є векторною сумою швидкості автомобіля відносно землі (переносної швидкості) $\vec{v}_2$ і відносної швидкості руху потягу відносно автомобіля $\vec{v}_в$: $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}_в$. Звідси (див. рис.1.11) $\vec{v}_в = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$.

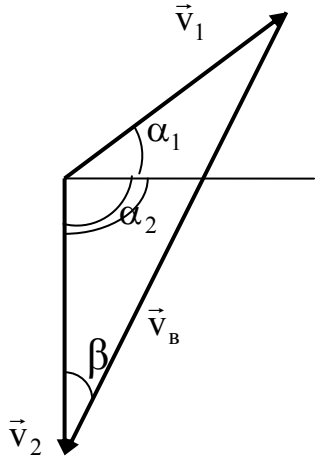


Рис.1.11 Додавання швидкостей.

З трикутника, утвореного означеними векторами швидкостей, користуючись теоремою косинусів знаходимо значення швидкості відносного переміщення

$$v_в = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\alpha} = 36\text{м/с}, \text{ де } \alpha = 135^\circ,$$

та $\cos\beta$:

$$\cos\beta = \frac{v_2^2 + v_в^2 - v_1^2}{2v_2v_в} = 0{,}94; \quad \beta = \arccos\beta \approx 19^\circ.$$

Зауважимо, що відносно напряму руху автомобіля потяг рухається під кутом 180º, причому β = 180º−19º = 161º.

Відповідь: $v_в$= 36 м/с; $\beta = 161^\circ$.

Приклад 1.5. Автомобіль, що гальмує перед світлофором, за п'яту секунду сповільненого руху проходить шлях 2м і зупиняється. Який шлях автомобіль пройшов за третю секунду руху?

t_5=5с; t_4=4с $\Delta t_5 = 1$с $v(t_5) = 0$ t_3=3с; t_2=2с $\Delta t_3 = 1$с $\Delta S_5 = 2$м	Розв'язання
$\Delta S_3 - ?$	

1-й спосіб.

При рівносповільненому русі модуль швидкості тіла змінюється за законом $v = v_0 - at$. При $t=t_5$ $v=0$. Звідки $v_0 = at_5$.

Шлях, пройдений за п'яту секунду, дорівнює

$$\Delta S_5 = S_5 - S_4 = v_0 t_5 - \frac{at_5^2}{2} - \left(v_0 t_4 - \frac{at_4^2}{2}\right) =$$

$$= v_0(t_5 - t_4) - \frac{a}{2}\left(t_5^2 - t_4^2\right) = at_5\Delta t_5 - \frac{a}{2}\Delta t_5(t_5 + t_4) = a\left(t_5 - \frac{t_5 + t_4}{2}\right)\Delta t_5.$$

Аналогічно знаходимо $\Delta S_3 = a\left(t_5 - \frac{t_3 + t_2}{2}\right)\Delta t_3$.

$$\frac{\Delta S_3}{\Delta S_5} = \frac{t_5 - \frac{t_3 + t_2}{2}}{t_5 - \frac{t_5 + t_4}{2}}; \qquad \frac{\Delta S_3}{\Delta S_5} = 5; \qquad \Delta S_3 = 10\,\text{м}.$$

Відповідь: $\Delta S_3 = 10\,$м.

2-й спосіб.

Якби автомобіль почав рухатися в зворотному напрямі, то його рух був би рівноприскореним рухом без початкової швидкості. При тому п'ята секунда стала би першою секундою руху, а перша – п'ятою. Відомо, що при рівноприскореному русі шляхи, які пройшло тіло в послідовні секунди, відносяться як ряд непарних чисел. Тобто

$$\Delta S_1 : \Delta S_2 : \Delta S_3 : \ldots : \Delta S_n = 1 : 3 : 5 : \ldots : (2n - 1).$$

Нагадуємо, за нашою умовою ΔS_1 – шлях, пройдений за останню, п'яту секунду руху.

Тоді $\frac{\Delta S_3}{\Delta S_1} = \frac{5}{1}$. Отже отримуємо $\Delta S_3 = 10\,$м.

Завдання. Доведіть співвідношення

$$\Delta S_1 : \Delta S_2 : \Delta S_3 : \ldots : \Delta S_n = 1 : 3 : 5 : \ldots : (2n - 1),$$

яке було використано при розв'язанні задачі: на основі формули $S = \frac{at^2}{2}$ отримайте вирази для шляхів ΔS, пройдених у послідовні моменти часу, починаючи з першої секунди, і знайдіть їх відношення.

Приклад 1.6. Використовуючи умови попередньої задачі, визначити прискорення, початкову швидкість ті гальмівний шлях автомобілю.

t_5=5с; t_4=4с Δt_5=1с $v(t_5)=0$ $\Delta S_5 = 2$м a, v_0, S - ?	Розв'язання. Із формули $\Delta S_5 = a\left(t_5 - \frac{t_5+t_4}{2}\right)\Delta t_5$ знаходимо модуль прискорення: $a = \frac{\Delta s_5}{\left(t_5 - \frac{t_5+t_4}{2}\right)\Delta t_5}$. Користуючись

співвідношенням $v_0 = at_5$ і знайденим прискоренням, знаходимо початкову швидкість v_0 і гальмівний шлях $S = v_0 t - \frac{at^2}{2}$.

Відповідь: a = 4 м/с^2; v_0=20 м/с; S= 50м.

Приклад 1.7. М'яч кинули з поверхні землі під кутом $\alpha = 45^o$ до горизонту із швидкістю v_0= 10 м/с. Визначити: а) час польоту $t_п$, висоту h_{max} та дальність польоту L; б) координати; нормальне a_n, тангенціальне a_τ прискорення, радіус кривизни траєкторії для моменту часу $t_1 = 0{,}5$ с після початку руху. в) Записати рівняння траєкторії руху в явному вигляді.

Зауваження. Приклад 1.7 є задачею про рух тіла в полі тяжіння Землі (задача Галілея). Це приклад криволінійного руху тіла (матеріальної точки), при якому незмінним залишається повне прискорення тіла, а тангенціальна та нормальна складові прискорення безперервно змінюються. (За умов масштабу руху, при якому залежністю прискорення вільного падіння від відстані до поверхні Землі можна знехтувати і вважати g=9,8м/с^2).

У цьому випадку закон руху тіла, який дозволяє визначити координати тіла в будь-який момент часу, у векторній формі можна записати у вигляді:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}, \qquad (1)$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор, проведений від початку координат до миттєвого положення тіла; $\vec{r}_0$ – радіус-вектор, що відповідає початковому положенню тіла; $\vec{v}_0$– початкова швидкість тіла, яке вважаємо матеріальною точкою. З урахуванням початкових умов рівняння (1) охоплює всі види руху тіла, розглянуті в задачі Галілея: рух тіла, кинутого вертикально; рух тіла, кинутого у горизонтальному напрямі та під кутом α до горизонту.

v_0=10м/с g=9,8м/с^2 $\alpha = 45^\circ$ t_1=0,5с	
$t_п$, h_{max} , L, $x(t_1)$, $y(t_1)$, a_n, a_τ, R, y=f(x) - ?	

Розв'язання.

Вибираємо систему координат XOY, початок якої O співпадає з початком траєкторії руху тіла (рис. 1.12). Тоді $\vec{r}_0 = 0$ і рівняння (1) у проекціях на координатні осі набуває вигляду:

$$x = v_{0x}t = v_0(\cos\alpha)t\,; \qquad (2)$$

$$y = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = (v_0\sin\alpha)t - \frac{gt^2}{2}. \qquad (3)$$

Відповідно проекції швидкості дорівнюють:

$$v_x = v_{ox} = v_0\cos\alpha = \text{const}\,, \qquad (4)$$

$$v_y = v_{0y} - gt = v_0\sin\alpha - gt\,, \qquad (5)$$

а повна швидкість має вигляд

$$v = \sqrt{(v_0\cos\alpha)^2 + (v_0\sin\alpha - gt)^2}\,. \qquad (6)$$

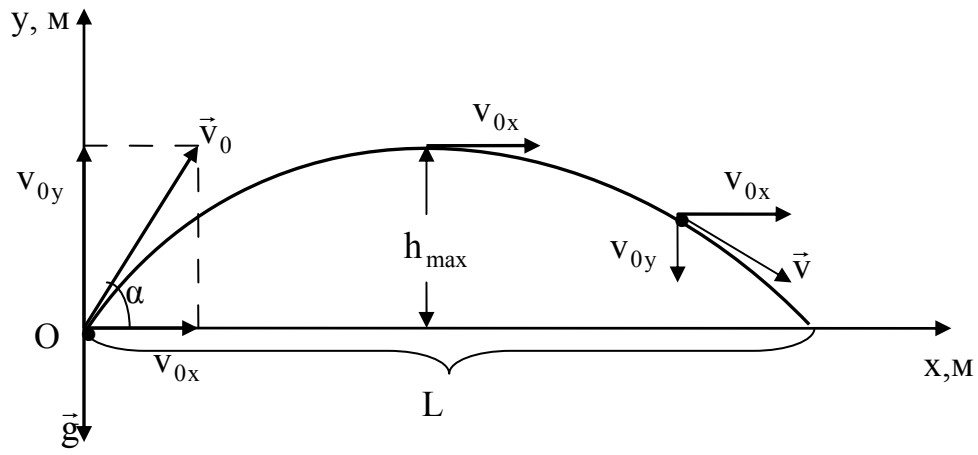


Рис.1.12 Кінематична діаграма руху тіла, кинутого під кутом до горизонту.

а) Час польоту м'яча $t_п$ до його падіння на землю знайдемо з умови $y(t_п) = 0$: $\left(v_0\sin\alpha - \frac{gt_п}{2}\right)t_п = 0$. Звідки отримуємо

$$t_п = \frac{2v_0\sin\alpha}{g}. \qquad \textbf{(7)}$$

Другий розв'язок $t_п = 0$ відповідає початковому положенню тіла.

Дальність польоту L визначається координатою x в момент падіння:

$$L = x(t_п) = v_0\cos\alpha \cdot \frac{2v_0\sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}. \qquad (8)$$

Максимальній висоті підйому h_{max} відповідає координата $y(t_в)$, де $t_в$ – час підйому до верхньої точки траєкторії. У верхній точці траєкторії вертикальна складова швидкості набуває нульового значення, після чого вертикальний рух із рівноуповільненого стає рівноприскореним. Отже, $t_в$ знаходимо з умови $v_y = v_0 \sin\alpha - g t_в = 0$:

$$t_в = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}. \qquad (9)$$

(Зверніть увагу, що $t_п = 2t_в$).

Відповідно максимальна висота підйому:

$$h_{max} = y(t_в) = (v_0 \sin\alpha) t_в - \frac{g t_в^2}{2} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}. \qquad (10)$$

б) Розглянемо тангенціальну і нормальну складові вектора повного прискорення $\vec{g}$.

Для визначення a_τ і a_n розкладаємо вектор швидкості $\vec{v}$ тіла в даній точці траєкторії на складові, паралельні осям OX та OY; вектор повного прискорення – на вектор тангенціального прискорення $\vec{a}_\tau$, дотичний до траєкторії, та вектор нормального прискорення $\vec{a}_n$, перпендикулярний до траєкторії. (Рис.1.13).

З подібності прямокутних трикутників, утворених векторами швидкості і прискорення з їх складовими (на рис. 1.13) виділені штриховими лініями), випливає:

$$a_n = g\cos\varphi, \qquad a_\tau = g\sin\varphi, \qquad (11)$$

де

$$\sin\varphi = \frac{v_y}{v} = \frac{v_o \sin\alpha - gt}{\sqrt{(v_0\cos\alpha)^2 + (v_0\sin\alpha - gt)^2}};$$

$$\cos\varphi = \frac{v_x}{v} = \frac{v_o \cos\alpha}{\sqrt{(v_0\cos\alpha)^2 + (v_0\sin\alpha - gt)^2}}.$$

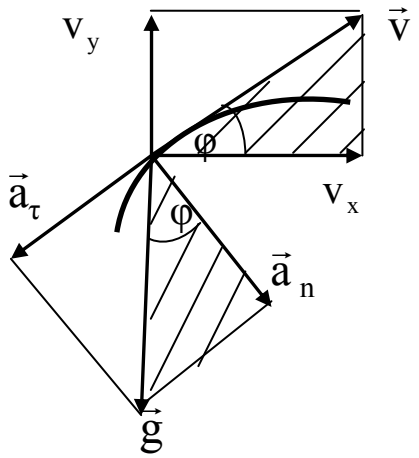


Рис.1.13 Розклад швидкості та прискорення на складові.

Користуючись виразами для повної швидкості та нормального прискорення в заданий момент часу, з формули $a_n = \frac{v^2}{R}$ знаходимо радіус кривизни траєкторії $R = \frac{v^2}{a_n}$.

в) Вирази (2 і (3) задають рівняння траєкторії м'яча у параметричній формі, тобто x та y задані як функції часу. Для отримання рівняння

траєкторії в явному вигляді виключимо з цих рівнянь час t. З рівняння (2) знаходимо $t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$. Тоді

$$y = x\mathrm{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} \quad . \qquad (12)$$

Отже траєкторією руху є парабола, гілки якої спрямовані вниз, а вершина зміщена відносно координатних осей.

З урахуванням попереднього підставляємо числові дані і виконуємо необхідні чисельні розрахунки:

$$H = \frac{10^2 \cdot 0{,}707^2}{2 \cdot 9{,}8}\ \text{м} = 2{,}55\text{м}; \qquad L = \frac{10^2 \cdot 1}{9{,}8}\ \text{м} = 10{,}2\ \text{м};$$

$$x_1 = 10 \cdot 0{,}707 \cdot 0{,}5 = 3{,}5\ \text{м}; \quad y_1 = 10 \cdot 0{,}707 \cdot 0{,}5 - \frac{9{,}8 \cdot 0{,}5^2}{2} = 2{,}3\ \text{м};$$

$$a_\tau = 9{,}8 \cdot \frac{10 \cdot 0{,}707 - 9.8 \cdot 0{,}5}{\sqrt{(10 \cdot 0{,}707)^2 + (10 \cdot 0{,}707 - 9{,}8 \cdot 0{,}5)^2}}\ \text{м/с}^2 = 2{,}87\ \text{м/с}^2;$$

$$a_n = 9{,}8 \cdot \frac{10 \cdot 0{,}707}{7{,}4}\ \text{м/с}^2 = 9{,}36\ \text{м/с}^2; \quad R = \frac{54{,}7}{9{,}36} = 5{,}84\ \text{м}.$$

Відповідь: $x_1 = 3{,}5$ м; $y_1 = 2{,}3$ м; H = 2,55м; L = 10,2м; a_τ = 2,9 м/с^2; a_n = 9,4 м/с^2; R = 5,8 м.

Зауваження. При побудові наочної математичної моделі руху м’яча ми свідомо не враховували деякі фактори, а саме: не враховували опір середовища, який супроводжує рух м’яча у повітрі; наближено вважали, що прискорення, яке надає м’ячу сила тяжіння, не залежить від висоти, а на рух не впливає обертання Землі

Завдання. Чи будуть справедливими отримані нами при розв’язанні попередньої задачі співвідношення для опису руху артилерійського снаряду або балістичної ракети? Які фактори, на Ваш погляд, необхідно урахувати при розрахунку в цих випадках?

Ще один приклад, коли не можна обмежитись урахуванням тільки сили тяжіння, розглянемо у наступній задачі.

Приклад 1.8. Тіло, що падає з деякої висоти, за останні дві секунди падіння проходить 1/5 частину свого шляху. Визначити час падіння t, висоту h, з якої падало тіло, та його швидкість v наприкінці падіння.

$v_0 = 0$
$g = 9{,}8 м/с^2$
$\tau = 2с$
$S_\tau = \frac{h}{n}$
$n=5$

---

t, h, v - ?

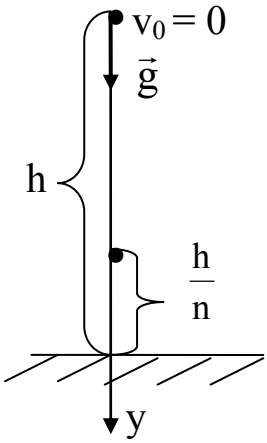


Рис.1.14

Розв'язання.

Припустимо, що на тіло в процесі руху діє тільки сила тяжіння. Тоді рух тіла є вільним падінням, тобто відбувається без початкової швидкості з прискоренням g.

Повний шлях тіла за час падіння t дорівнює $h = \frac{gt^2}{2}$; (1)

шлях за час (t-τ) (див.рис.1.14) –

$$\left(h - \frac{h}{n}\right) = h\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{g(t-\tau)^2}{2}. \quad (2)$$

З (1) і (2) випливає

$$\frac{gt^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{g(t-\tau)^2}{2}.$$

Після скорочення із попереднього співвідношення отримуємо квадратне рівняння $(t-\tau)^2 = t^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, яке приводиться до вигляду $t^2 - 2n\tau t + n\tau^2 = 0$ і має такий розв'язок:

$$t_{1,2} = \tau\left(n \pm \sqrt{n(n-1)}\right). \quad (3)$$

Після визначення часу падіння за формулою (1) знаходимо висоту падіння h, а за формулою $v = gt$ (4) швидкість наприкінці руху.

Обчислення часу падіння $t_{1,2} = 2\left(5 \pm \sqrt{20}\right)$ дає два значення $t_1 = 19с$, $t_2 = 1с$. Друге з них не відповідає умові задачі, за якою $(t-\tau) \geq 0$. Таким чином, t=19с. За формулами (1) і (4) знаходимо h =1770 м; v=185 м/с.

Відповідь: t = 19с; h =1770м; v=185 м/с.

Зауваження. Уявить собі краплину дощу, яка з такою швидкістю, а це близько 670 км/год., падає зверху прямо на вас. Сильний дощ перетворився б у стихійне лихо, яке руйнує подібно падінню комет чи метеоритів!

Насправді ж, швидкість не зростає протягом всього падіння, бо на тіло, окрім сили тяжіння, діє сила опору повітря, яка зростає із зростанням швидкості. Тому для будь-якого тіла існує гранична швидкість, по

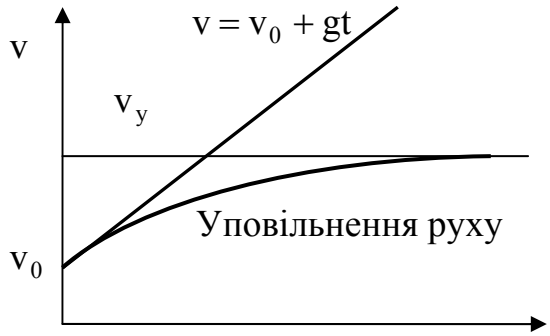


Рис.1.15 Швидкість руху із t урахуванням впливу (опору) повітря.

досягненні якої прискорення тіла стає рівним нулю, і зростання швидкості припиняється (рис.1.15). Наприклад, при затяжному стрибку парашутиста ця швидкість становить близько 350 км/год. Парашутист може легко зменшити її до 200 км/год., просто простягнувши руки у боки.

Приклад 1.9. Колесо радіуса R=0,1м обертається під дією тягарця, підвішеного на нитці, яка змотується з колеса. Прискорення тягарця a_1=0,2м/с^2. Для моменту часу, коли тягарець пройшов шлях S=0,4м, визначити кутову швидкість колеса ω, а також повне прискорення a будь-якої точки на ободі колеса. Який кут α складає вектор повного прискорення з радіусом колеса?

R=0,1м
a_1=0,2м/с^2
S=0,4м

ω, a, α - ?

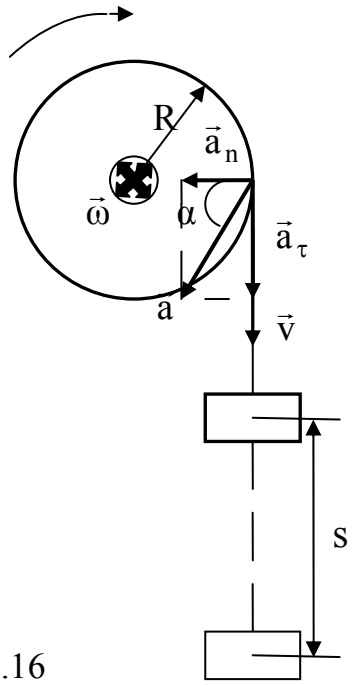


Рис.1.16

Розв'язання

Тангенціальне прискорення точок ободу колеса дорівнює прискоренню, з яким рухається тягарець: $a_\tau = a_1$.

Лінійна швидкість точок ободу

$$v = a_\tau t$$

в будь-який момент дорівнює швидкості руху тягарця і може бути визначена через його шлях за формулою рівноприскореного руху без початкової швидкості:

$$v = \sqrt{2a_1 S}.$$

Кутова швидкість

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{\sqrt{2a_1 S}}{R}. \qquad (1)$$

Повне прискорення точок ободу складається з тангенціального $\vec{a}_\tau$ і нормального $\vec{a}_n$ прискорення (див. рис.1.16). Його величину можна визначити за теоремою Піфагора, оскільки складові $\vec{a}_\tau$ і $\vec{a}_n$ завжди є взаємно перпендикулярними векторами: $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$.

З урахуванням виразу для нормального прискорення $a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{2a_1 S}{R}$ отримуємо

$$a = \sqrt{\frac{4a_1^2 S^2}{R^2} + a_1^2} = a_1\sqrt{\frac{4S^2}{R^2} + 1} \qquad (2)$$

З трикутника прискорень визначаємо $tg\alpha = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{R}{2S}$. (3)

За формулами (1) – (3) знаходимо значення кутової швидкості обертання колеса ω =4 рад/с та повне прискорення точок ободу а = 1,61 рад/с^2. У свою чергу $tg\alpha = \frac{0,1}{2 \cdot 0,4} = 0,125$; $\alpha = arctg0,125 = 7,1°$.

Відповідь: ω =4 рад/с; а = 1,61 рад/с^2; $\alpha = 7,1°$.

Приклад 1.10. Тверде тіло обертається навколо нерухомої осі за законом $\varphi = At + Bt^2$, де А= 12 рад/с; В= –2 рад/с^2. Знайти середнє значення кутової швидкості і кутового прискорення впродовж часу від початку руху (t=0) до зупинки, а також кутове прискорення тіла в момент зупинки $t_к$.

$\varphi = At + Bt^2$ А= 12 рад/с В= –2 рад/с^2 t_0=0 $\omega_к$= 0	Розв'язання За означенням $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, тобто $\omega = A + 2Bt$. (1) Середнє значення модуля кутової швидкості визначаємо за формулою $\langle\omega\rangle = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi(t_к) - \varphi(t_0)}{t_к - t_0} = \frac{\varphi(t_к)}{t_к}$.
$\langle\omega\rangle$, $\langle\varepsilon\rangle$, $\varepsilon_к$-?	З урахуванням заданого закону руху, $\langle\omega\rangle = \frac{At_к + Bt_к^2}{t_к} = A + Bt_к$. (2)

Час обертання тіла $t_к$ знаходимо, користуючись співвідношенням $\omega(t_к) = A + 2Bt_к = 0$. Звідки $t_к = -\frac{A}{2B}$. Після підстановка до (2) маємо:

$$\langle\omega\rangle = A + B\left(-\frac{A}{2B}\right) = \frac{A}{2}; \qquad \langle\omega\rangle = 6 \text{ рад/с}^2.$$

Середнє значення кутового прискорення визначається за формулою

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega(t_к) - \omega(t_0)}{t_к - t_0} = \frac{A + 2Bt_к - A}{t_к} = 2B = const.$$

$\langle\varepsilon\rangle$= 2В = –4 рад/с^2.

Отже, кутове прискорення при заданому законі руху є постійною величиною, а рух – рівноуповільненим з постійним прискоренням ε= $\varepsilon_к$ = –4 рад/с^2.

Примітка. Розв'язок можна отримати також, користуючись миттєвим кутовим прискоренням $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 2B$.

Відповідь: $\langle\omega\rangle$= 6 рад/с^2; $\langle\varepsilon\rangle$=–4 рад/с^2; $\varepsilon_к$= –4 рад/с^2.

Задачі для самостійного розв'язування

1.1.(вар.1 –25)*.У диспетчера аеропорту на момент початку чергування (20год 00хв 00с) є інформація про рух двох літаків, наведена у таблиці 1.1. Система координат, використана в ній, має початок у точці розміщення диспетчера, вісь OX, напрямлена на схід, вісь OY – на північ.

А) Помітьте на координатній площині XOY положення літаків і напрям їх польотів. Б) Запишіть закони руху кожного літака. В) Знайдіть час вильоту одного з літаків з аеропорту. Г)Визначте мінімальну відстань, на яку наближаються літаки, і час, коли відбудеться наближення. Д) Знайдіть модуль швидкості першого літака у системі відліку, яка жорстко зв'язана з другим літаком (рухається разом з ним).

Швидкості літаків вважати незмінними. Розмірами аеропорту знехтувати.

Таблиця 1.1. Умови до задачі 1.1(вар.1 –25).

Номер варіанта	Координати літаків (км)						Проекції швидкостей літаків (км/год.)			
	першого			другого			першого		другого	
	x_1	y_1	z_1	x_2	y_2	z_2	v_{1x}	v_{1y}	v_{2x}	v_{2y}
1.1.1	30	40	2	30	80	3	432	576	576	-288
1.1.2	40	30	2	60	-60	3	576	432	0	720
1.1.3	60	60	3	-30	40	2	-720	0	-432	576
1.1.4	0	80	3	40	50	5	720	0	576	720
1.1.5	-40	50	3	-90	-20	3	-576	720	0	720
1.1.6	30	80	8	-40	30	3	-720	360	-576	432
1.1.7	-30	-30	2	-80	30	8	-432	-432	0	-720
1.1.8	-80	0	6	-30	30	2	432	432	-432	432
1.1.9	40	-30	3	100	0	8	576	-432	-432	-432
1.1.10	0	90	6	30	30	3	576	-432	540	540
1.1.11	40	-40	4	0	-90	6	432	-432	648	0
1.1.12	-40	40	3	-90	0	7	-576	576	0	576
1.1.13	0	-90	4	-40	-40	5	-432	432	-576	576
1.1.14	50	50	3	50	-20	4	360	-360	720	-288
1.1.15	-50	-20	3	0	-90	3	-720	-288	-360	360
1.1.16	-30	50	2	0	100	9	-432	720	-360	-360
1.1.17	100	0	3	20	-50	2	-360	-360	288	-720
1.1.18	0	50	3	80	80	2	0	576	-576	-144
1.1.19	-50	40	2	-90	0	4	-720	576	576	576
1.1.20	50	70	1	50	0	3	288	-432	720	0
1.1.21	0	-60	3	-40	-30	2	-432	0	-576	-432
1.1.22	-50	30	4	0	90	2	-720	432	-576	0
1.1.23	30	-40	5	100	0	3	432	-576	-432	-432
1.1.24	0	80	3	-50	50	4	-432	-144	-720	720
1.1.25	50	50	5	90	30	3	720	720	-144	-432

Знаком * помічені завдання, які наводяться за [13].

1.2. Велосипедист долає ряд пагорбів. На підйомах його швидкість v_1= 15км/год., а на спусках v_2= 30 км/год., причому підйоми та спуски мають однакову довжину. Чому дорівнює середня швидкість велосипедиста?

1.3. Велосипедист долає ряд пагорбів. На підйомах його швидкість v_1= 15км/год, а на спусках v_2= 30 км/год., причому на підйоми та спуски був витрачений однаковий час. Чому дорівнює середня швидкість велосипедиста?

1.4. Визначити шлях і середню швидкість потягу, який протягом $t = 10$ с збільшив швидкість з v_1= 36 км/год. до v_2= 72 км/год., а наступні 20 с рухався рівномірно.

Зобразити графіки залежності шляху і швидкості потягу від часу.

1.5. Автомобіль проходить першу чверть шляху зі швидкістю v_1, а решту шляху зі швидкістю v_2= 50 км/год. Знайти швидкість на першій чверті шляху, якщо середня швидкість автомобіля на всьому шляху дорівнює 54км/год.

1.6. Припустимо, що для комфортних умов польоту горизонтальна складова прискорення авіалайнера не повинна перевищувати прискорення вільного падіння (приблизно 10 м/с^2). Скільки часу за такої умови буде продовжуватися політ від Одеси до Києва (відстань 500км)? Розрахуйте максимальну швидкість, якої набере літак за таких умов.

Вказівка. Вважайте, що половину шляху рух – рівноприскорений, а другу половину – рівноуповільнений.

1.7. Скутер рухався на захід зі швидкістю 20 м/с, а через 5с він рухався вже на південь зі швидкістю 15 м/с. Визначити модуль та напрям середнього прискорення протягом указаних п'яти секунд.

1.8. Під яким кутом до берега необхідно направити ніс човна, щоб переправитися поперек через річку при швидкості течії $v_т$=3,6км/год, якщо човен може рухатися зі швидкістю $v_ч$=5,4км/год у нерухомій воді? Який час займе переправа, якщо ширина річки d =200м?

1.9. За умовою попередньої задачі визначити, який час займе переправа, якщо направити ніс човна точно поперек річки так, що човен в момент досягнення протилежного берега віднесе течією, а потім повернутися проти течії у місце призначення?

1.10. Визначити прискорення та початкову швидкість руху, якщо рівняння руху має вигляд $x = 5t + 0{,}6t^2$.

1.11. Матеріальна точка рухається вздовж прямої згідно рівнянню $x = At + Bt^3$, де $A = 7{,}5$ м/с, $B = -1$ м/с^3. Визначити момент часу, в який швидкість точки дорівнюватиме нулю. Що відбудеться з напрямком руху в цей момент? Обчислити середню швидкість руху $\langle v \rangle$ та середнє прискорення $\langle a \rangle$ за проміжок часу від $t_1 = 3$ с до $t_2 = 6$ с.

1.12. Матеріальна точка рухається вздовж осі OX за законом $x = A_1 t + B_1 t^2 + C_1 t^3$, де $A_1 = 2$ м/с, $B_1 = 4$ м/с^2, $C_1 = -1$ м/с^3. Рух другої точки відбувається вздовж осі OY і відповідає рівнянню $y = A_2 + B_2 t + C_2 t^2$, де $A_2 = 2$ м, $B_2 = 4$ м/с, $C_2 = 1$ м/с^2. В який момент часу прискорення точок будуть однаковими? Визначити швидкості точок та відстань між точками для цього моменту часу.

1.13.
(вар.1 –14).* Дві матеріальні точки рухаються вздовж однієї прямої, яка співпадає з віссю 0X декартової системи координат. Закон руху першої точки має вигляд $x_1 = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, а прискорення другої точки змінюється згідно рівнянню $a_{2x} = \alpha + \beta t$. У початковий момент часу друга точка мала координату $x_{20} = \gamma t$ і швидкість $v_{20x} = \delta$. Завдання і значення параметрів наведені у таблиці 1.2.

Розмірності параметрів: [A] = м, [B] = м/с, [C] = м/с^2, [D] = м/с^3, [α]=м/с^2, [β] = м/с^3, [γ] = м, [δ] = м/с.

(вар.15 –21).* Дві матеріальні точки рухаються вздовж однієї прямої, яка співпадає з віссю 0X декартової системи координат. Швидкість першої точки змінюється за законом $v_{1x} = A + Bt + Ct^2$, а прискорення другої точки змінюється згідно рівнянню $a_{2x} = \alpha + \beta t$. У початковий момент часу перша точка мала координату $x_{10} = D$. У другої точки у початковий момент часу координата була $x_{20} = \gamma$, а швидкість $v_{20x} = \delta$. Завдання і значення параметрів наведені у таблиці 1.2.

Розмірності параметрів: [A] = м/с, [B] = м/с^2, [C] = м/с^3, [D] = м, [α]=м/с^2, [β] = м/с^3, [γ] = м, [δ] = м/с.

(вар.22 –25).* Дві матеріальні точки рухаються вздовж однієї прямої, яка співпадає з віссю 0X декартової системи координат. Закон руху першої точки має вигляд $x_1 = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, а швидкість другої точки змінюється

згідно рівнянню $v_{2x} = \alpha + \beta t + \gamma t^3$. У початковий момент часу друга точка мала координату $x_{20} = \delta$. Продовження умови і задані параметри наведені у таблиці 1.2. Розмірності параметрів: [A] = м, [B] = м/с, [C] = м/с^2, [D] = м/с^3, [α]=м/с, [β] = м/с^2, [γ] = м/с^3, [δ] = м.

Таблиця 1.2. Умови до задач 1.13(вар.1 –25).

Номер варіанту	Завдання (знайти)	Значення параметрів							
		A	B	C	D	α	β	γ	δ
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.13.1	Визначити відносну швидкість точок у момент збігу їх координат.	2	1	2	1	4	6	4	0
1.13.2	Визначити прискорення першої точки в момент, коли швидкості точок зрівняються.	2	4	2	1	1	6	0	1
1.13.3	Визначити відстань між точками у момент, коли прискорення точок стануть однаковими.	0	0	3	1	1	1	0	2
1.13.4	Визначити прискорення першої точки в момент її зустрічі з другою.	3	8	4	1	8	2	3	2
1.13.5	Визначити відстань між точками у момент, коли їх швидкості будуть мати однакове значення.	1	2	4	3	2	6	4	2
1.13.6	Визначити відносну швидкість точок у момент, коли їх прискорення стануть однаковими.	1	7	1	2	8	6	0	1
1.13.7	У скільки разів будуть відрізняться прискорення точок в момент, коли швидкість другої точки стане удвічі більшою за швидкість першої.	0	1	1	1	4	4	1	6
1.13.8	Визначити прискорення першої точки у момент, коли друга буде знаходитися у початку координат.	2	0	2	1	-2	6	-2	2
1.13.9	Визначити відносну швидкість точок у момент, коли відстані між ними збільшиться у два рази.	6	2	3	2	2	12	2	3
1.13.10	Визначити прискорення першої точки у момент, коли друга зупиниться.	3	2	1	2	0	2	1	-1
1.13.11	Визначити швидкість другої точки у момент, коли прискорення першої стане рівним нулю.	2	1	-6	2	1	4	3	0
1.13.12	Визначити різницю прискорень точок у момент, коли їх швидкості будуть рівними.	7	1	2	2	4	9	9	7
1.13.13	Визначити положення другої точки, у момент, коли перша зупиниться.	3	-3	0	1	-2	9	0	2
1.13.14	Визначити швидкість першої точки у момент, коли друга зупиниться.	5	2	-2	1	0	2	5	-4
1.13.15	Визначити відносну швидкість точок у момент, коли прискорення першої точки стане рівним нулю.	-1	-4	2	2	2	4	-4	-1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.13.16	Визначити прискорення першої точки у момент, коли швидкості точок стануть рівними.	1	1	1	1	1	1	1	3
1.13.17	Визначити різницю швидкостей точок коли їх прискорення будуть рівними.	3	2	2	7	7	-1	5	3
1.13.18	Визначити прискорення першої точки у момент зустрічі з другою.	2	5	2	4	3	4	8	2
1.13.19	Визначити відстань між точками у момент, коли прискорення точок стануть рівними.	4	3	2	3	2	5	3	2
1.13.20	Визначити прискорення першої точки у момент, коли друга зупиниться.	-4	6	8	0	0	8	6	-4
1.13.21	Визначити різницю прискорень точок у момент, коли друга точка буде рухатися удвічі швидше за першу.	3	2	2	4	3	8	5	7
1.13.22	Визначити відносну швидкість точок у момент, коли вони опиняться на відстані 2м одна від одної.	3	5	4	2	2	8	6	4
1.13.23	Визначити різницю прискорень точок у момент, коли вони зустрінуться.	0	2	1	1	2	2	2	9
1.13.24	Визначити координату другої точки у момент, коли швидкості точок будуть однаковими.	0	3	3	2	7	6	3	0
1.13.25	Визначити відстань між точками у момент, коли прискорення першої точки буде рівним нулю.	6	2	-3	1	2	4	9	5

1.14. Радіус-вектор частинки змінюється з часом за законом $\vec{r} = 3t^2\vec{i} + 2t^2\vec{j} + 6\vec{k}$, де r вимірюється в метрах. Отримати вирази для векторів швидкості та прискорення частинки. Визначити а) модуль переміщення частинки $|\Delta\vec{r}|$ за перші п'ять секунд руху; б)модуль швидкості в момент часу t = 2с; в) модуль прискорення частинки.

1.15. Частинка рухається зі швидкістю $\vec{v} = \vec{i} + 4t\vec{j} + 6t^2\vec{k}$, де v вимірюється в м/с. Визначити: а) переміщення частинки за перші дві секунди руху; б) модулі швидкості і прискорення частинки в момент часу t_1= 2с.

1.16. Закон руху тіла у координатній формі має вид: $x = At$; $y = Bt^2 + Ct$; $z = 0$. Записати у векторній формі закон руху тіла $\vec{r} = \vec{r}(t)$, а також рівняння, які надають залежність векторів швидкості та прискорення від часу.

1.17. Закон руху тіла у координатній формі має вигляд: $x = At$; $y = Bt^2 + Ct$; $z = 0$. Знайти рівняння, що надають залежність модулів переміщення $|\vec{r}|$, швидкості $|\vec{v}|$ та прискорення $|\vec{a}|$ від часу.

1.18. Закон руху тіла у координатній формі має вигляд: $x = At$; $y = Bt^2 + Ct$; $z = 0$. Записати рівняння траєкторії тіла.

1.19. Два камені кинули вертикально вгору з однаковою початковою швидкістю $v = 14{,}7$ м/с з інтервалом $\Delta t = 1$с. Перший камінь кинуто з балкону на висоті $h = 5$ м, другий – з поверхні землі. Записати закон руху кожного з каменів і визначити відстань між ними через t_1=2 с після початку руху першого каменя.

1.20. Людина, яка знаходиться у кімнаті на четвертому поверсі , бачить, як повз його вікна пролітає зверху квітковий вазон. Відстань $\Delta h = 2$м, яка дорівнює висоті вікна, вазон пролетів за час Δt=0,2 с. З вікна якого поверху випав вазон, якщо висота одного поверху $h_1 = 4$м? $g = 9{,}8$ м/с^2.

1.21(вар.1-20). Тіло кинули під кутом α до горизонту з початковою швидкістю v_0 . Через час t вектор швидкості v склав кут β з горизонтом, його модуль і проекції на осі OX і OY дорівнювали відповідно v, v_x і v_y, а нормальна і тангенціальна складові прискорення a_n і a_τ. Визначити величини, позначені в таблиці 1.3 “зірочкою”, відстань L, на яку переміститься за цей час тіло по горизонталі, і висоту h, на якій воно опиниться.

Таблиця 1.3.

№ вар.	α°	v_0, м/с	t.c	β°	v,м/с	v_x, м/с	v_y, м/с	a_τ,м/с^2	a_n,м/с^2
1.21.1	60	10	*		8	5	*	*	*
1.21.2		10	*	*	9	*	*		*
1.21.3	40	20	*		*		*	*	*
1.21.4	*	20		*		10			*
1.21.5		30	0,3			10	*	*	
1.21.6	50	30	0,5	*	*	*			*
1.21.7	40	11	*		10		*	*	
1.21.8	*	20	*		12	9		*	
1.21.9	60	30	*				10		*
1.21.10	*	30		*		14	5	*	
1.21.11	*	20		35	12		*		*
1.21.12	50	*				10		4,9	
1.21.13	45	*	*		14		*	*	8
1.21.14	*	15		30			5	*	
1.21.15	30	20	0,5						*
1.21.16	45	*			10			0	
1.21.17	40	20		20		*			*
1.21.18	*	20	*	*	10			*	6
1.21.19		20	*		*	10	5	*	
1.21.20	*	*	0,4	*		10	10		*

1.22. М'яч упав на плоску поверхню з висоти h_1 = 16м і відскочив на висоту h_2 = 5м. Визначити значення швидкостей м'яча перед та після відскоку. Який час пройшов з моменту початку падіння м'яча до досягнення вищої точки після відскоку? Побудуйте графік залежності висоти h від часу t.

1.23. Тіло кинуто з поверхні землі під кутом $\alpha = 60^o$ до горизонту із швидкістю v_0= 14,7 м/с. Визначити найбільшу висоту h_{max}, на яку підійметься тіло, та відстань l до точки падіння. Чому дорівнює радіус R кривизни траєкторії тіла в верхній точці та в момент падіння?

1.24. Тіло кинуто в горизонтальному напрямку зі швидкістю $v_0 = 15$ м/с. Визначити нормальне a_n, тангенціальне a_τ прискорення та радіус кривизни R траєкторії тіла через $t_1 = 1{,}5$ с після початку руху.

1.25. Визначити, як зміняться час і дальність польоту тіла, кинутого горизонтально, якщо збільшити висоту, з якої його кидають, у чотири рази. Швидкість v_0, з якою кинули тіло, не змінюється.

1.26. Визначити лінійну швидкість v і нормальне прискорення a_n точки земної поверхні на екваторі, на широті 45º та на полюсі, яке зумовлено обертанням Землі. Радіус Землі взяти рівним 6400км.

1.27. Визначити кутову швидкість ω, лінійну швидкість v і нормальне прискорення a_n для руху Землі навколо Сонця. Радіус земної орбіти $r = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ м.

1.28. Визначити прискорення і кінцеву кутову швидкість вала, який починає обертатися з постійним прискоренням і за перші $t = 10$ с здійснює N=50 обертів.

1.29. Знайти нормальне та тангенціальне прискорення точки через t_1=15 с після початку руху, якщо вона рухається по колу радіуса R=0,2м так, що залежність кутової швидкості від часу задається рівнянням $\omega = 2 + 0{,}4t$.

1.30. Матеріальна точка рухається по колу радіуса $R = 4$ м згідно рівнянню $s = A + Bt + Ct^2$, де s – криволінійна координата, що відраховується від деякої початкової точки кола; $A = 6$ м; $B = -2$ м/с; $C = 1$ м/с^2. Визначити момент часу, в який нормальне прискорення точки $a_n = 1$ м/с^2; швидкість v, тангенціальне a_τ та повне a прискорення точки в цей момент.

1.31. Точка рухається вздовж кола радіуса $R = 12$ см з постійним тангенціальним прискоренням. Визначити нормальне прискорення a_n точки через $t_1 = 10$ с після початку руху якщо відомо, що наприкінці п'ятого оберту швидкість точки становила $v = 40$ см/с .

1.32. Колесо обертається з постійним прискоренням. Визначити кутове прискорення ε колеса, якщо відомо, що через $t_1 = 3$ с після початку руху вектор повного прискорення точок його ободу утворює з радіусом кут $\alpha = 30^0$.

1.33. (вар.1-25)*. У таблиці 1.4 наведені рівняння зміни з часом кінематичних характеристик обертання маховика, закріпленого на валу двигуна.

1. Зобразити графіки зміни з часом кута оберту φ(t), кутової швидкості ω(t), і кутового прискорення ε(t). Поясніть характер руху.

2. Визначити повне прискорення точки, яка знаходиться на відстані R=0,1м від осі вала, в момент часу t = 10с.

Кут оберту заданий у радіанах, A=0,0314 рад/с^2, B = 0,1 рад/с.

Таблиця 1.4 (до задач 1.35, вар.1-25)

№ вар.	Рівняння	Початкові умови (при t = 0)
1.33.1	$\varepsilon = Ae^{-Bt}$	$\varphi = 0, \omega = 0$
1.33.2	$\varphi = 1-(1+Bt)^{-1}$	—
1.33.3	$\varepsilon = -A(1+Bt)^{-2}$	$\varphi = 0, \omega = 0{,}1\pi\,\text{рад/с}$
1.33.4	$\omega = B(1+e^{-Bt})\varphi = 0$	$\varphi = 0$
1.33.5	$\varphi = \ln(1+Bt)$	—
1.33.6	$\varphi = \sin Bt$	—
1.33.7	$\varphi = 1-e^{Bt}$	—
1.33.8	$\varepsilon = -A\cos Bt$	$\varphi = 0, \omega = 0{,}1\pi\,\text{рад/с}$
1.33.9	$\omega = B(1+\sin Bt)$	$\varphi = 0$
1.33.10	$\omega = Be^{-Bt}$	$\varphi = 0$
1.33.11	$\omega = B\sin Bt$	$\varphi = 0$
1.33.12	$\varepsilon = -A\sin Bt$	$\varphi = 0, \omega = 0{,}1\pi\,\text{рад/с}$
1.33.13	$\varphi = 1-e^{-Bt}+2Bt$	—
1.33.14	$\omega = B(1+Bt)^{-1}$	$\varphi = 0$
1.33.15	$\varepsilon = -A(1+Bt)^{-3}$	$\varphi = 0, \omega = 0{,}1\pi\,\text{рад/с}$
1.33.16	$\varphi = 2Bt-1+e^{-Bt}$	—
1.33.17	$\omega = B\cos Bt$	$\varphi = 0$
1.33.18	$\omega = B(1-\sin Bt)$	$\varphi = 0$
1.33.19	$\varphi = Bt-\sin Bt$	—
1.33.20	$\varepsilon = A\cos Bt$	$\varphi = 0, \omega = 0$
1.33.21	$\varphi = 1-\cos Bt$	—
1.33.22	$\omega = B(1-e^{Bt})$	$\varphi = 0$
1.33.23	$\varepsilon = A\sin Bt$	$\varphi = 0, \omega = 0$
1.33.24	$\omega = -B(1+Bt)^{-2}$	$\varphi = 0$
1.33.25	$\varepsilon = Ae^{-Bt}$	$\varphi = 0, \omega = 0{,}1\pi\,\text{рад/с}$

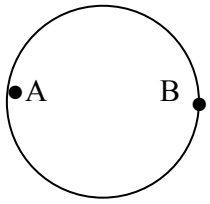
1.34. Диск радіусом $R = 25$ см починає обертатися з постійним кутовим прискоренням $\varepsilon = 0{,}4$ рад/с^2. Визначити нормальне a_n, тангенціальне a_τ та повне a прискорення точок ободу диска в момент $t_1 = 2$ с.

1.35. Маховик починає обертатися з постійним кутовим прискоренням. Знайти кут між вектором повного прискорення будь-якої точки маховика та відповідним радіусом в момент, коли маховик здійснив перші N =2 оберти.

Тестові завдання

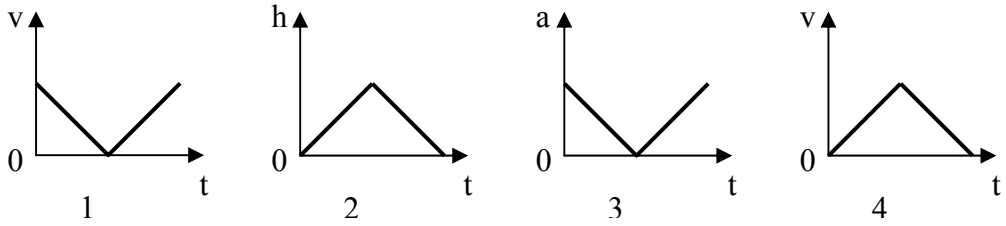
Вибрати вірну відповідь.

1. Траєкторія руху матеріальної точки – це
   1. переміщення матеріальної точки
   2. вектор, проведений від початкового тдо кінцевого положення матеріальної точки
   3. лінія, яку описує матеріальна точка в процесі свого руху
   4. відстань, яку пройшла матеріальна точка за певний проміжок часу
2. Шлях, пройдений матеріальною точкою – це
   1. величина переміщення матеріальної точки
   2. довжина прямої, яка з'єднує початкове та кінцеве положення матеріальної точки
   3. довжина лінії, яку описує матеріальна точка в процесі свого руху
   4. різниця радіус - векторів, проведених до початкового та кінцевого її положення
3. Переміщення матеріальної точки – це
   1. відстань, пройдена матеріальною точкою за певний проміжок часу
   2. довжина лінії, яка з'єднує початкове та кінцеве положення матеріальної точки
   3. довжина лінії, яку описує матеріальна точка в процесі свого руху
   4. вектор, що є різницею радіус - векторів, проведених з початку координат до початкового та кінцевого положення матеріальної точки
4. Величини шляху та переміщення точки співпадають у випадку
   1. руху вздовж будь-якої криволінійної траєкторії
   2. прямолінійного руху при відсутності точки повороту
   3. будь-якого прямолінійного руху
   4. руху вздовж кола
5. Швидкість (миттєва) матеріальної точки – це
   1. величина, що визначається за формулою $v = \frac{S}{t}$
   2. відношення переміщення до часу, за який воно відбулося
   3. похідна радіус - вектора точки за часом
   4. відношення пройденого шляху до часу, за який він був пройдений
6. Матеріальна точка пройшла півкола радіус якого 5м від точки А до точки В протягом 10 с. Величина середнього значення модуля швидкості $\langle v \rangle$ у порівнянні з модулем середньої швидкості $|\langle \bar{v} \rangle|$ точки



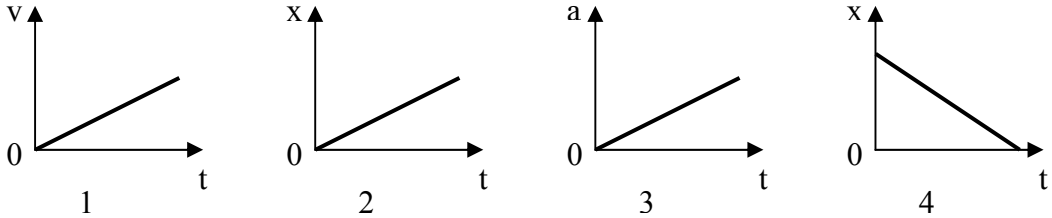
   1. має таке ж значення
   2. більша у 3,14 разу
   3. більша у 1,57 разу
   4. більша у 2 рази

8. Кульку підкинули вертикально вгору. Якщо знехтувати опором повітря, руху цієї кульки відповідає графік (h – висота підйому кульки, v – модуль її швидкості, a – модуль прискорення), зображений на



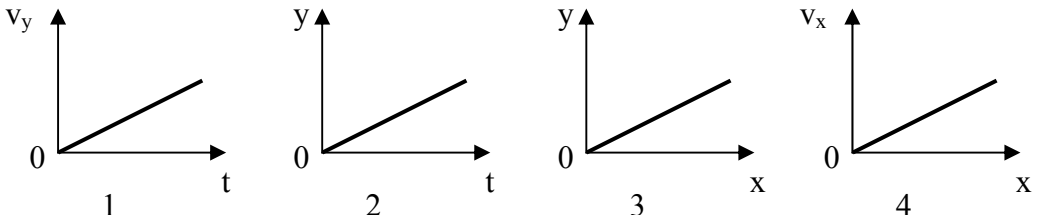
1. рис.1 2. рис.2 3. рис.3 4. рис.4

9. Зображені графіки описують прямолінійний рух. Прямолінійному рівноприскореному руху відповідає графік, зображений на



1. рис.1 2. рис.2 3. рис.3 4. рис.4

10. Тіло рухається у площині XOY. Прямолінійному руху тіла незалежно від його прискорення відповідає графік, зображений на

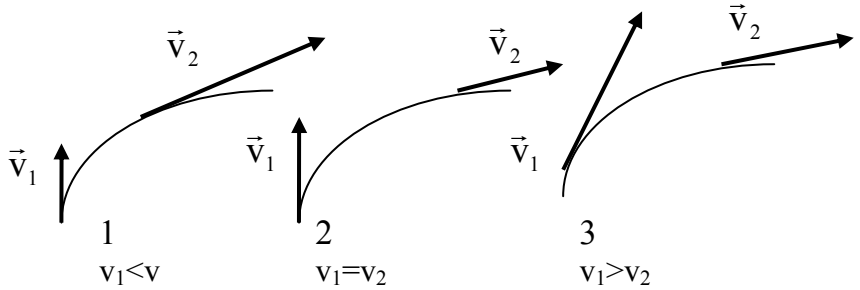


1. рис.1 2. рис.2 3. рис.3 4. рис.4

11. . Кут між векторами швидкості та прискорення для матеріальної точки, рух якої є А) рівносповільненим вздовж прямої, Б) рівноприскореним вздовж прямої, складає

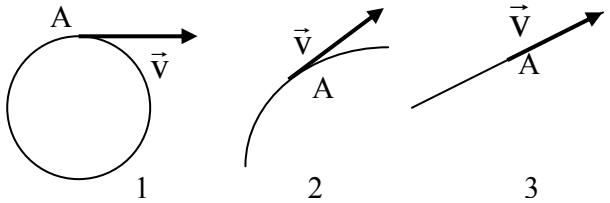
1. 90º 2. 0º 3. 180º 4. 270º

12. На рисунку зображені траєкторії матеріальних точок та вектори їх швидкості у два моменти часу. Встановити відповідність між рисунком та значенням тангенціального прискорення точки.



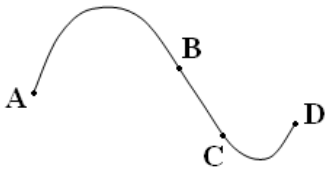
1. Рис. 1 А. тангенціальне прискорення точки $a_\tau>0$
2. Рис. 2 Б. тангенціальне прискорення точки $a_\tau<0$
3. Рис. 3 В. тангенціальне прискорення точки дорівнює нулю ($a_\tau=0$)

13. Матеріальні точки рухаються з однаковою швидкістю вздовж траєкторій, зображених на рисунках.. Установити відповідність між значенням нормальної складової a_n в точці А та номером зображеної на рисунку траєкторії.



1. Рис. 1 А. мінімальне (нульове) значення a_n в точці А
2. Рис. 2. Б. максимальне значення a_n в точці А
3. Рис. 3. В. проміжне значення a_n в точці А

14. **Установити відповідність** між значенням прискорення точки, яка рухається з постійною за величиною швидкістю вздовж траєкторії, зображеній на рисунку, та ділянкою траєкторії.



1. ділянка AB А. нульове значення прискорення $\vec{a}$
2. ділянка BC Б. максимальне значення прискорення $\vec{a}$
3. ділянка CD В. проміжне значення прискорення $\vec{a}$

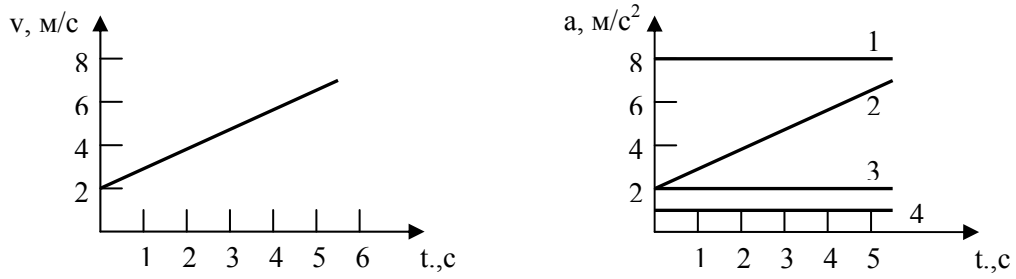
15. **Установити відповідність** між характером руху матеріальної точки та складовими її прискорення.

1. Рівномірний прямолінійний рух А. $\vec{a}_\tau = \text{const}$, $\vec{a}_n = 0$
2. Рівнозмінний прямолінійний рух Б. $\vec{a}_\tau = 0$, $|\vec{a}_n| = \text{const}$
3. Рівномірний криволінійний рух В. $\vec{a}_\tau = \text{const}$, $\vec{a}_n = 0$
4. Рівномірний рух по колу Г. $\vec{a}_\tau = 0$, $\vec{a}_n \neq 0$

Вибрати вірну відповідь.

16. Рівноприскорений прямолінійний рух без початкової швидкості відповідає рівнянню 1. $x = x_0 + v_x t$ 2. $x = v_x t$ 3. $\Delta\vec{r} = \vec{v}t$ 4. $x = x_0 + \frac{at^2}{2}$

17. На рисунку представлений графік залежності проекції швидкості прямолінійного руху тіла від часу. На графіку залежності прискорення від часу цьому руху відповідає



1. пряма 1 2. пряма 2 3. пряма 3 4. пряма 4

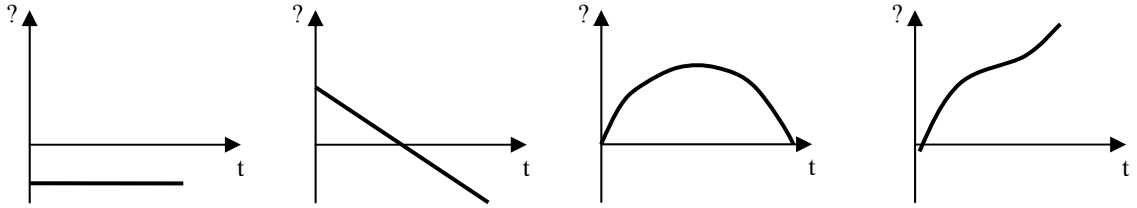
18. Напрям та величину

А) тангенціального прискорення $\vec{a}_\tau$; Б) нормального прискорення $\vec{a}_n$

надає формула:

1. $\frac{d\vec{v}}{dt}$ 2. $\frac{dv}{dt}\vec{\tau}$ 3. $v\frac{d\vec{\tau}}{dt}$ 4. $\frac{v^2}{R}\vec{n}$

19. Тіло, яке кинули вертикально уверх, падає в початкову точку.



1 2 3 4

Установити відповідність між графіком та зображеною на ньому залежністю. (Вісь координат OY напрямлена уверх.)

1. Залежність пройденого шляху від часу — А. графік 1
2. Залежність прискорення від часу — Б . графік 2
3. Залежність швидкості від часу — В. графік 3
4. Залежність величини переміщення від часу — Г. графік 4

Вибрати вірну відповідь.

20. Тіло кинули під кутом до горизонту. У найвищій точці траєкторії

А) найбільше значення має Б) найменше значення має

1. похідна $\frac{d\vec{v}}{dt}$ 2. нормальна складова прискорення $\vec{a}_n$
3. тангенціальна складова прискорення $\vec{a}_\tau$ 4. радіус кривизни траєкторії R

21. Тіло кинули під кутом до горизонту. Незмінним у процесі руху залишається

1. повне прискорення 2. нормальна складова прискорення $\vec{a}_n$
3. тангенціальна складова прискорення $\vec{a}_\tau$ 4. швидкість

(Опором повітря знехтувати).

22. Тіло кинули під кутом до горизонту. Тангенціальна складова прискорення $\vec{a}_\tau$ має найменше значення

1. у початковій точці траєкторії; 2. у кінцевій точці траєкторії;
3. у найвищій точці траєкторії; 4. серед наведених немає вірної відповіді..

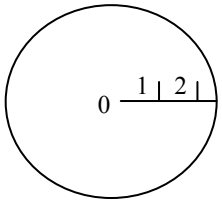
23. Рівноприскорений обертальний рух без початкової швидкості відносно нерухомої осі описує рівняння

1. $\varphi = \varphi_0 + \omega t$ 2. $\Delta\varphi = \omega t$ 3. $\varphi = \varphi_0 + \frac{\varepsilon t^2}{2}$ 4. $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$

24. Нормальне прискорення точки, якщо відстань від осі обертання збільшити у два рази, а кутову швидкість обертання зменшити у два рази,

1. не змінюється; 2. зменшується удвічі;
3. зменшується у 8 разів; 4. удвічі збільшується.

25. Точки 1 і 2 лежать на одному радіусі колеса, яке обертається навколо центра 0 з постійною швидкістю (див. рис.). Для цих точок рівними є:



1. лінійна швидкість та період обертання;
2. період обертання та кутова швидкість;
3. лінійна та кутова швидкості;
4. кутова швидкість та доцентрове прискорення.

26. Не змінюються при рівномірному русі по колу такі характеристики матеріальної точки:

1.вектори кутової та лінійної швидкості 2. кутова швидкість і кінетична енергія
3.вектори кутового та лінійного прискорення 4. лінійна швидкість та момент інерції

27. Лінійна швидкість точки, якщо відстань від осі обертання збільшити у два рази, а кутову швидкість обертання зменшити у два рази:

1. не змінюється 2. зменшується удвічі
3. зменшується у 4 рази 4. удвічі збільшується

28. Кут між векторами швидкості та прискорення для матеріальної точки, яка рівномірно рухається по колу, складає

1. 180º 2. 90º 3. 270º 4. 0º

29. Хвилинна та годинникова стрілки мають однакову довжину. Значення нормальних прискорень кінців годинникової та хвилинної стрілок відрізняються у

1. 24 рази 2. 60 разів 3. 144 рази 4. 3600 разів 5. 12 разів

30. Хвилинна стрілка у 2 рази більша за годинникову. Модулі швидкості кінців годинникової та хвилинної стрілок відрізняються у

1. 24 рази 2. 60 разів 3. 144 рази 4. 3600 разів 5. є рівними

31. У випадку А) рівносповільненого обертального руху; Б) рівноприскореного обертального руху матеріальної точки відносно нерухомої осі вектор кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$ спрямований

1. по дотичній до траєкторії проти вектора лінійної швидкості
2. до центра кола
3. по осі обертання вздовж вектора кутової швидкості
4. по осі обертання проти вектора кутової швидкості

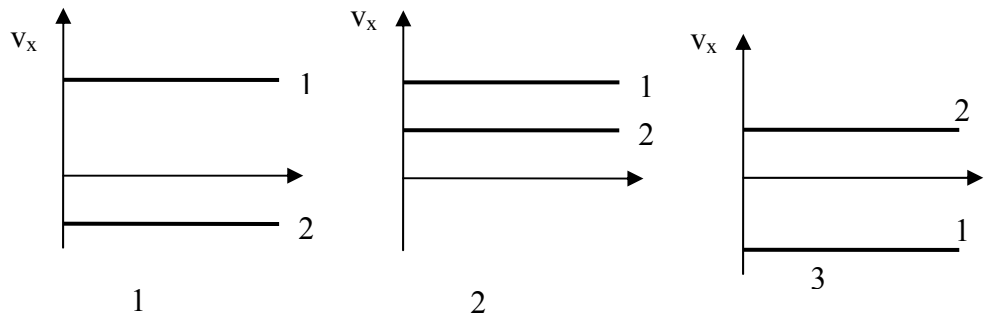
32. Установити відповідність між об'єктом, що рухається, та кількістю його ступенів вільності:

1. матеріальна точка	А. 3 ступені вільності
2. абсолютно тверде тіло при довільному русі	Б. 4 ступені вільності
3. абсолютно тверде тіло, рух якого є плоским	В. 5 ступенів вільності
	Г. 6 ступенів вільності

33. Якщо швидкість руху човна відносно води v_1 у n разів більша за швидкість течії ріки v_2, то відношення часу поїздки на човні між двома пунктами проти течії до часу поїздки за течією становить

1. $\frac{n+1}{n-1}$ 2. $\frac{n+1}{n}$ 3. $\frac{n-1}{n+1}$ 4. $\frac{n+1}{n-2}$ 5. $\frac{n+1}{n-1}$

34. Графіки швидкостей прямолінійного руху двох мотоциклістів, початкові координати яких 200м і –100м, зображені на рисунку.



Зустріч мотоциклістів під час руху можлива у випадку, зображеному на

1. рис.1 2. рис.2 3. рис.3

35. Два тіла починають рухатися по колу з однієї точки в одному напрямку. Період обертання першого тіла 1 с, другого – 2 с. Перше тіло наздожене друге через

1. 4 с 2. 2 с 3. 6 с 4. 1,5 с

Розділ 2. Динаміка матеріальної точки і системи матеріальних точок

Тема: Принцип відносності Галілея. Перший закон Ньютона. Інерціальна система відліку. Маса тіла. Сила. Імпульс. Другий закон Ньютона. Третій закон Ньютона. Сили в механіці. Гравітаційна взаємодія. Закон всесвітнього тяжіння. Сила тяжіння. Вага тіла. Сили пружності. Закон Гука. Сили тертя. Сила опору.

Основні поняття і формули

● **Перший закон Ньютона (**закон інерції**). Тіло зберігає стан спокою або рівномірного прямолінійного руху, якщо на нього не діють інші тіла або дія цих тіл компенсована.**

Це означає, що при $\vec{F} = 0$ прискорення тіла $\vec{a} = 0$, тобто швидкість $\vec{v} = \text{const}$, або $\vec{v} = 0$.

Система відліку, в якій виконується перший закон Ньютона, називається **інерціальною.** Існує безліч інерціальних систем відліку, бо будь-яка система відліку, що рухається рівномірно прямолінійно відносно деякої інерціальної системи, також є інерціальною.

● **Другий закон Ньютона,** (рівняння руху матеріальної точки (поступального руху тіла)).

В інерціальній системі відліку швидкість зміни імпульсу матеріальної точки (тіла) дорівнює рівнодійній усіх сил, що діють на цю точку (тіло).

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}, \qquad (2.1)$$

де $\vec{p} = m\vec{v}$ – імпульс тіла; $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ – **рівнодійна сила.**

Якщо сила, що діє на тіло, постійна за величиною та напрямком, то зміна імпульсу тіла за проміжок часу Δt дорівнює імпульсу сили, тобто добутку сили на час її дії:

$$m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{F}\Delta t. \qquad (2.2)$$

У випадку тіла постійної маси швидкість зміни імпульсу співпадає з добутком маси на прискорення, і другий закон Ньютона можна представити у вигляді:

Прискорення матеріальної точки прямо пропорційне діючій на неї сили і обернено пропорційне масі точки.

$$\vec{F} = m\vec{a}, \text{ або } \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \qquad (2.3)$$

Кожна з величин, які входять в другий закон Ньютона, має свій фізичний зміст.

● В цьому законі **маса** m – міра інертності тіла при поступальному русі.

● **Сила** $\vec{F}$ в механіці – це міра механічної дії на дане матеріальне тіло інших тіл, внаслідок чого тіло змінює швидкість або деформується.

Тільки після встановлення вигляду функції $\vec{F}$ як закону взаємодії матеріальної точки з навколишніми тілами формула (2.1) дозволяє визначити закон руху тіла, тобто залежність його швидкості і координат від часу.

● **Імпульс** або **кількість руху** $\vec{p}$ – векторна міра механічного руху тіла, яка визначає можливість передачі механічного руху від одного тіла до іншого. Величина $\vec{p}$ дорівнює добутку маси тіла на швидкість його руху, а напрям співпадає з напрямом швидкості.

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad (2.4)$$

Повний імпульс системи тіл дорівнює векторний сумі імпульсів окремих тіл:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + ... + \vec{p}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i .$$

● **Третій закон Ньютона** вказує на те, що дія одного тіла на інше носить взаємний характер.

Сили дії тіл одне на одного завжди однакові за значенням і протилежні за напрямом:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} . \qquad (2.5)$$

Сили дії і протидії прикладені до різних тіл і тому не можуть зрівноважувати одна одну.

З іншого боку, за третім законом Ньютона сума всіх внутрішніх сил, що діють у системі матеріальних точок, дорівнює нулю

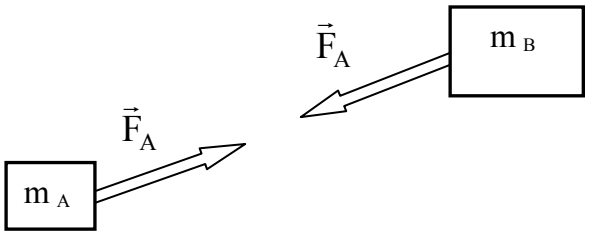


Рис.2.1 Взаємодія двох тіл: $\vec{F}_A = -\vec{F}_B$

$$\vec{F}^{(i)} = \sum_{j,k} \vec{F}^{(i)}_{j,k} = 0, \qquad (2.6)$$

де індекси j, k – номера матеріальних точок, між якими відбувається взаємодія, ($j \neq k$).

Тому зміна повного імпульсу системи матеріальних точок (тіл) визначається дією тільки зовнішніх сил $\vec{F}^{(e)}$:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{(e)} . \qquad (2.7)$$

Звідки зміна імпульсу системи за проміжок часу (t_0, t) дорівнює

$$\Delta\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{F}^{(e)} dt, \quad \text{де} \int_{t_0}^{t} \vec{F}^{(e)} dt \text{ - імпульс сили.} \qquad (2.8)$$

● **Центром мас** системи матеріальних точок називають точку С, положення якої характеризує розподіл мас системи і визначається радіусом-вектором $\vec{r}_c$.

У випадку системи матеріальних точок $\vec{r}_c$ визначається за формулою

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{m}, \qquad (2.9)$$

де m_i та $\vec{r}_i$ – маса і радіус вектор і-ї матеріальної точки, n – кількість матеріальних точок; $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ – повна маса системи.

У класичній механіці внаслідок незалежності маси від швидкості імпульс системи $\vec{p}$ може бути виражений через швидкість її центра мас $\vec{v}_c$:

$$\vec{p}_c = m\vec{v}_c.$$

Теорема про рух центра мас: центр мас системи рухається так, як рухалась би матеріальна точка, в якій зосереджена маса системи, під дією рівнодіючої усіх зовнішніх сил, що діють на систему:

$$m\frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{F}^{(e)}. \qquad (2.10)$$

У випадку замкненої системи ($\vec{F}^{(e)} = 0$) центр мас системи покоїться або рухається рівномірно прямолінійно. Отже **система відліку, зв'язана з центром мас замкненої системи, завжди є інерціальною**.

● Закони Ньютона однакові для всіх інерціальних систем відліку, тобто механічні явища відбуваються однаково в усіх інерційних системах відліку. В цьому полягає **принцип відносності Галілея** і проявляється рівноправність усіх інерційних систем відліку.

Сили в механіці.

● **Сила гравітаційної взаємодії** двох тіл визначається **законом всесвітнього тяжіння** (закон справедливий для точкових тіл або однорідних тіл сферичної форми).**:**

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \qquad (2.11)$$

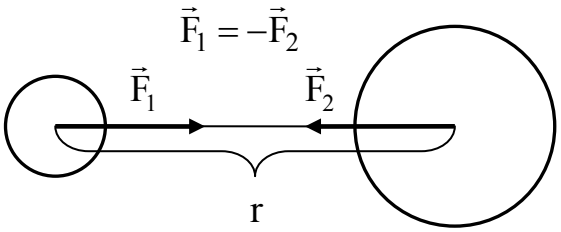


Рис.2.2 Гравітаційні сили

де $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{Н \cdot м^2}{кг^2}$ – гравітаційна стала, яка чисельно дорівнює силі притягання двох тіл масою 1кг кожне, якщо відстань між ними 1м; r – відстань між тілами; m_1 і m_2 – маси тіл.

Гравітаційні сили, прикладені до кожного із взаємодіючих тіл (рис.2.2), протилежні за напрямками, рівні за модулями і діють вздовж прямої, що з'єднує центри цих тіл.

Гравітаційне притягання зумовлене гравітаційним полем, яке існує навколо кожного тіла і пов'язане з його масою. Отже, **маса тіла є не тільки мірою інертності, але й мірою його гравітаційних властивостей**.

● **Сила тяжіння** $\vec{F}_T$ є складовою гравітаційної сили, яка врівноважує реакцію земної поверхні.

$$\vec{F}_T = m\vec{g}, \qquad (2.12)$$

де $\vec{g}$ – прискорення вільного падіння, яке залежить від широти внаслідок добового обертання Землі (див. приклад. 5.2) та її сплющеності біля полюсів.

Якщо знехтувати впливом обертання Землі, то сила тяжіння, яка діє на тіло масою m поблизу поверхні Землі, дорівнює гравітаційній силі

$$F_T = G\frac{mM_3}{R_3^2}. \qquad (2.13)$$

Звідки за другим законом Ньютона отримуємо вираз для прискорення вільного

$$g = G\frac{M_3}{R_3^2}, \qquad (2.14)$$

де M_3 – маса Землі, R_3 – її радіус.

На висоті h прискорення вільного падіння $g = G\frac{M_3}{(R_3 + h)^2}$. (2.14а)

● **Вага тіла** P – сила, з якою тіло внаслідок його притягання до Землі діє на нерухомі відносно нього опору чи підвіс.

За третім законом Ньютона вага тіла за модулем дорівнює прикладеній до тіла силі реакції опори $\vec{N}$, але протилежна за напрямом.

В інерціальній системі відліку (тобто, якщо опора або точка підвісу не рухаються вниз або вгору з прискоренням), вага тіла $\vec{P}$ і сила тяжіння $\vec{F}_T$ чисельно

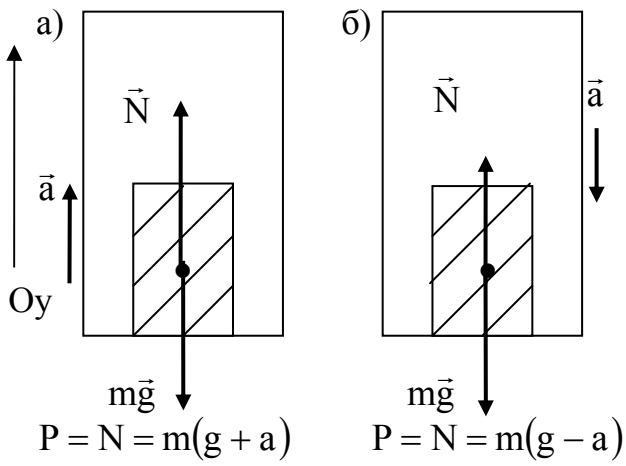


Рис.2.3 Вага тіла при прискореному русі опори.

рівні, однаково напрямлені, але прикладені до різних тіл: вага $\vec{P}$ прикладена до опори або точки підвісу, сила тяжіння $\vec{F}_T$ – до тіла. Якщо тіло разом з опорою рухається вгору або вниз з прискоренням $\vec{a}$, то відповідно до другого закону Ньютона $\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$. Звідки у проекціях на вісь Оу отримуємо $N - mg = \pm ma$.

Коли опора рухається з прискоренням $\vec{a}$, спрямованим угору, вага тіла збільшується (рис.2.3,а), а якщо донизу – зменшується (рис.2.3,б). В останньому випадку при $\vec{a} = \vec{g}$ досягається стан невагомості, тобто P = 0.

Рух супутників навколо Землі відбувається під дією сили гравітаційного притягання, яка надає супутнику у відповідності з другим законом Ньютона доцентрове прискорення. В цьому випадку тіла на супутнику також знаходяться у стані невагомості.

● Найменша швидкість, яку треба надати тілу під час запуску з якої-небудь планети, щоб воно стало її штучним супутником і при цьому рухалось по колу, називається **першою космічною швидкістю**.

$$v_1 = \sqrt{G\frac{M}{R^2}} = \sqrt{gR}$$

Для Землі v_1=7,9·10^3м/с.

Друга космічна швидкість v_2 для Землі – це швидкість, яку слід надати тілу, щоб воно подолало Земне тяжіння і стало супутником Сонця.
$v_2 = 11{,}2 \cdot 10^3$ м/с .

● **Сили пружності** $F_{пр}$ – сили реакції, які виникають у тілах при деформаціях під дією прикладеної зовні сили. Сили пружності зумовлені силами взаємодії між молекулами тіла і мають електромагнітну природу. За III законом Ньютона сила пружності дорівнює прикладеній до тіла силі:

$$\vec{F}_{пр} = -\vec{F}.$$

Деформації називають **пружними,** якщо після припинення дії зовнішніх сил тіло відновлює свої розміри і форму. Для пружних деформацій справедливий **закон Гука,** за яким **величина пружної деформації прямо пропорційна діючій на тіло силі**.

У випадку пружних однобічних **деформацій розтягу або стиску** закон Гука можна записати у такій формі:

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1}{E}\frac{F}{S}, \quad \text{або} \quad \sigma = \varepsilon E, \qquad (2.15)$$

де $\frac{\Delta l}{l_0} = \varepsilon$ – відносна поздовжня деформація тіла ($\Delta l = l - l_0$ – абсолютна деформація розтягу; l_0 і l– довжина до і після деформації відповідно);

$\frac{F}{S} = \sigma$ – механічне напруження, яке дорівнює відношенню модуля сили F, яка розтягує або стискує тіло, до площі поперечного перерізу тіла S;
E – модуль Юнга, який характеризує пружні властивості матеріалу. Модуль Юнга чисельно дорівнює механічному напруженню, при якому довжина тіла збільшилась би у два рази (ε=1), за умовою збереження пружного характеру деформації.

Ураховуючи, що $\vec{F}_{пр} = -\vec{F}$, отримуємо вираз для пружної сили, який також називають законом Гука:

$$F_{пр} = -kx, \qquad (2.16)$$

де $x \equiv \Delta l$; $k = \frac{ES}{l_0}$ – коефіцієнт пружності (у випадку пружини – її жорсткість).

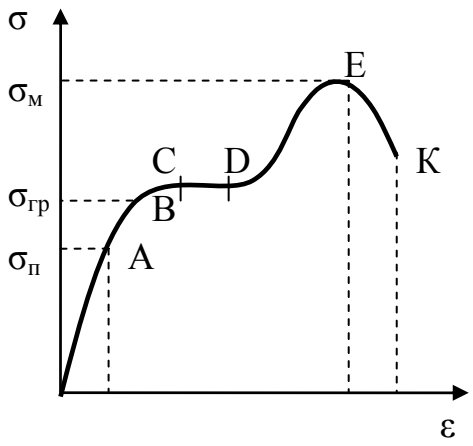


Рис.2.4 Діаграма розтягу

Залежність напруження σ від ε є однією з найважливіших характеристик властивостей твердих тіл. Графічне зображення цієї залежності носить назву діаграми розтягу (рис.2.4). На діаграмі розтягу: $\sigma_п$ (точка A) – межа пропорційності, тобто максимальне напруження, при якому ще виконується закон Гука; $\sigma_{гр}$ (точка B) – межа пружності (максимальне напруження, при якому деформація ще залишається пружною). При напруженнях, більших за $\sigma_{пр}$, деформації набувають залишкового характеру, тобто стають пластичними. CD – область текучості, в якій відбувається неперервне зростання деформації з часом при практично сталому напруженні. Матеріали зі значною областю текучості можуть без руйнування витримати великі деформації, у протилежному випадку матеріали є крихкими (скло, цегла, чавун та ін.), їх руйнування відбувається вже при незначних деформаціях. $\sigma_м$ (точка E) – межа міцності (максимальне напруження, що виникає в тілі перед початком його руйнування).

Деформація розтягу або стиску супроводжується зміною поперечних розмірів тіл, яку характеризують відносним поперечним стиском або розтягом

$$\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d_0},$$

де Δd – абсолютна зміна поперечних розмірів тіла, d_0 – поперечні розміри до деформації. Відношення відносної поперечної деформації до відносної поздовжньої деформації носить назву коефіцієнта Пуассона: $\mu = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$.

● **Сили тертя** – це сили, що виникають в місцях дотику тіл, напрямлені по дотичній до поверхонь і спрямовані проти швидкості їх відносного переміщення. Сили тертя, як і пружності, зумовлені взаємодією молекул і мають електромагнітну природу.

Закон сухого тертя (Закон Амонтона – Кулона): максимальна сила тертя спокою та сила тертя ковзання не залежить від поверхні дотику тіл і пропорційна силі нормального тиску P_n, яка за величиною дорівнює силі реакції опори N:

$$F_{тер.} = \mu N, \qquad (2.17)$$

де μ – коефіцієнт тертя (спокою або ковзання). Це безрозмірний коефіцієнт, який залежить від природи стичних поверхонь та їх шорсткості, а також від відносної швидкості тіл. Залежність сили тертя від відносної швидкості представлена на рис.2.5 кривою 1. При спеціальній обробці поверхонь сила тертя ковзання може не залежати від швидкості (рис. 2.5, пряма 2). Силі тертя спокою $F_{тер.сп.}$, яка при спокої тіла чисельно дорівнює прикладеній до тіла зовнішній силі (тобто при зростанні зовнішньої сили зростає від 0 до максимального значення F_0), на рисунку відповідає вертикальний відрізок $0F_0$.

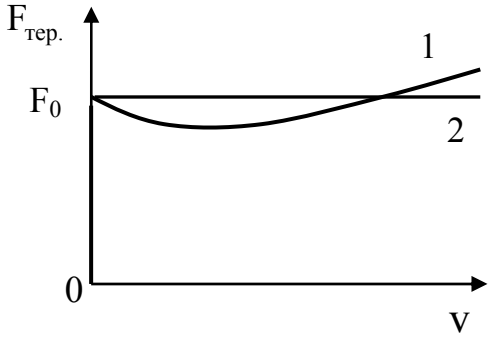


Рис. 2.5 Залежність $F_{тер.}$ від швидкості руху тіл.

На рис.2.6 - 2.8 представлені сили тертя ковзання, які діють на тіла у різних випадках:

а) до тіла на горизонтальній поверхні прикладена сила $\vec{F}$, яка діє горизонтально (рис.2.6)

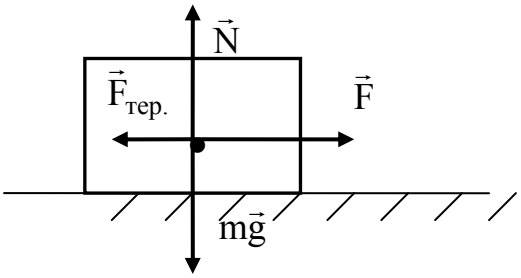


Рис.2.6

$$F_{тер} = \mu N = \mu mg;$$

б) до тіла на горизонтальній поверхні прикладена сила $\vec{F}$, яка діє під кутом α (рис.2.7).

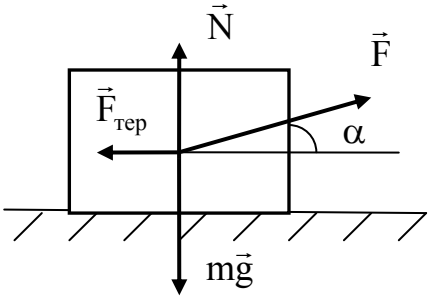


Рис.2.7

$$F_{тер} = \mu N = \mu(mg - F\sin\alpha);$$

в) тіло на похилій площині з кутом α при основі (рис.2.8).

$$F_{тер} = \mu mg\cos\alpha$$

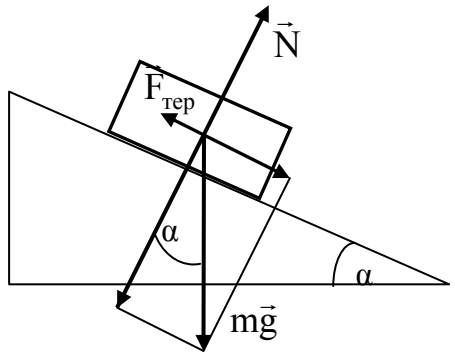


Рис.2.8

Коли тіло рухається рівномірно вздовж похилої площини, чи знаходиться на ній в стані спокою, коефіцієнт тертя дорівнює тангенсу кута нахилу похилої площини: $\mu = tg\alpha$.

У випадку гладких поверхонь помітну роль у формуванні сили тертя відіграє міжмолекулярна взаємодія. Відповідний закон тертя ковзання, набуває форми:

$$F_{тер.} = \mu_{іст}(N + SP_0),$$

де P_0 – додатковий тиск, зумовлений силами міжмолекулярного притягання, які швидко зменшуються при збільшенні відстані між частинками, S – площа дотику тіл, $\mu_{іст.}$ – істинний коефіцієнт тертя ковзання.

Тертя відіграє значну (як позитивну, так і негативну) роль у природі та техніці. Найбільш радикальний спосіб зменшити дію сил тертя – це досягнути зміни тертя ковзання на тертя кочення за допомогою штучних заходів.

Тертя кочення виникає при перекочуванні циліндра або кулі по поверхні іншого тіла. Сила тертя кочення $F_{т.к.}$ – горизонтальна складова сили реакції опори $\vec{F}$, яка внаслідок неабсолютної пружності виниклих деформацій поверхні, по якій котиться тіло, спрямована не строго вертикально (рис.2.9).

$$F_{т.к.} = \frac{kN}{R}. \qquad (2.18)$$

Величину k, яка має розмірність довжини, називають коефіцієнтом тертя кочення. Це плече сили Q_n (нормальної складової сили реакції опори $\vec{F}$), яка за величиною практично дорівнює прикладеному нормальному навантаженню N: $Q_n \cong N$.

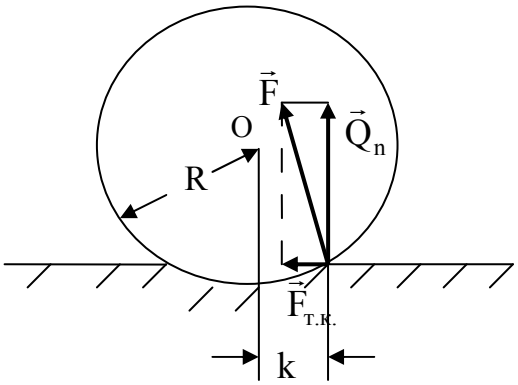


Рис.2.9 Виникнення сили тертя кочення.

2.1. Динаміка прямолінійного руху

Методичні вказівки.

1. При використанні законів Ньютона особливу увагу слід звернути на аналіз сил, які діють на тіло. Основне рівняння руху записують на основі другого закону Ньютона спочатку у векторній формі, а потім, обираючи зручним способом (в залежності від умови задачі) систему координат, – у проекціях на координатні осі. Отриману систему рівнянь доповнюють, у разі необхідності, кінематичними рівняннями та конкретними виразами сил (наприклад, сили тертя або пружності).

2. Розв'язання задач про рух системи зв'язаних тіл зручно здійснювати за такою схемою:

− установити зв'язок між кінематичними характеристиками руху окремих тіл;

− визначити сили, що діють на кожне тіло, і зобразити відповідні вектори сил на рисунку;

− якщо тіла зв'язані ниткою, масою якої можна знехтувати, то силу натягу T вважають однаковою по всій довжині нитки. Якщо нитка перекинута через блок, то сили натягу T_1 і T_2 по різні боки блоку є однаковими за величиною ($T_1 = T_2$) тільки у тому випадку, коли можна знехтувати масою блоку та силою тертя, що виникає при його обертанні;

− записати рівняння руху кожного тіла у векторній формі на основі закону динаміки (II закону Ньютона);

− обрати систему координат таким способом, щоб рівняння руху тіл у проекціях на координатні осі мали найбільш просту форму. (При необхідності для кожного тіла може бути обрана своя система координат);

− записати систему рівнянь у проекціях на координатні осі. При необхідності додати до неї відповідні вирази для сил, що діють на тіла, або кінематичні співвідношення і розв'язати отриману систему рівнянь відносно невідомих величин (змінних), які нас цікавлять.

3. При розв'язуванні задач про рух системи матеріальних точок, слід перш за все, усі сили, що діють на систему, кваліфікувати як внутрішні або зовнішні. Сума внутрішніх сил дорівнює нулю, і прискорення центра мас системи надає тільки рівнодійна зовнішніх сил. Це прискорення визначається теоремою про рух центра мас.

Приклади розв'язання задач

Приклад 2.1. Матеріальна точка масою m =1кг, яка рухається рівномірно по колу радіуса R=1,4 м, описує чверть кола за час Δt = 0,7 с. Знайти зміну імпульсу матеріальної точки.

Розв'язання.

$m = 1$кг
$R = 1{,}4$м
$\Delta t = 2$ с
$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$

Δp – ?

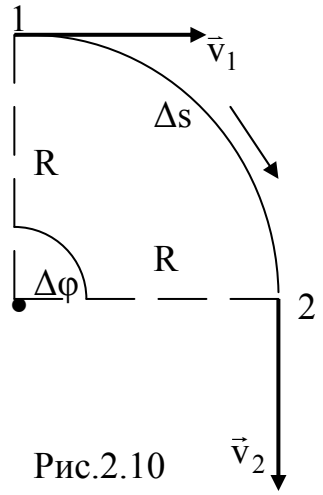


Рис.2.10

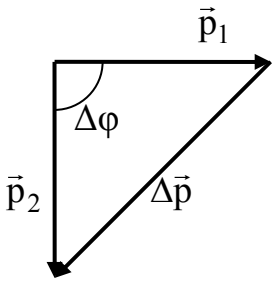


Рис.2.11

Імпульси матеріальної точки в точках 1 і 2 відповідно дорівнюють $\vec{p}_1 = m\vec{v}_1$; $\vec{p}_2 = m\vec{v}_2$ (рис.2.10). Причому згідно з умовою, рух є рівномірним, тому $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v$. Зміна імпульсу $\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ (рис.2.11). З рис.2.11 знаходимо зміну модуля імпульсу матеріальної точки при обертанні на кут Δφ =π/2:

$$\Delta p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} = \sqrt{(mv_1)^2 + (mv_2)^2} = mv\sqrt{2}. \qquad (1)$$

При рівномірному русі $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{R\Delta\varphi}{\Delta t}$ (2), де Δφ – кутове переміщення точки.

З урахуванням співвідношення (2) зміна модулю імпульсу матеріальної точки дорівнює:

$$\Delta p = \frac{mR\Delta\varphi}{\Delta t}\sqrt{2}. \qquad (3)$$

Користуючись формулою (3), отримуємо

$$\Delta p = \frac{1\text{кг} \cdot 1{,}4\text{м} \cdot 3.14}{2\text{с} \cdot 2}\sqrt{2} = 1{,}55\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

Відповідь: $\Delta p = 1{,}55\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$.

Приклад 2.2. М'яч масою m=0,5кг кинули з поверхні землі під кутом $\alpha = 40^\circ$ до горизонту із швидкістю v_0= 15 м/с. Визначити зміну імпульсу м'яча за час його руху. Опором повітря знехтувати.

m=0,5кг v_0= 15 м/с $\alpha = 40^o$ g = 9,8м/с^2 $\Delta\vec{p}$-?	Розв'язання. 1-й спосіб. Імпульси м'яча на початку і наприкінці руху відповідно дорівнюють $\vec{p} = m\vec{v}_0$; $\vec{p} = m\vec{v}$. Аналогічно розв'язку попередньої задачі знайдемо зміну імпульсу $\Delta\vec{p}$. Почнемо з побудови векторів імпульсу в початковий і кінцевий моменти руху. При побудові векторної діаграми (рис.2.12) врахуємо, що у випадку, коли опором повітря можна знехтувати, вектор швидкості $\vec{v}$ у момент падіння дорівнює за модулем початковій швидкості v_0 і утворює з горизонтом кут $-\alpha$.

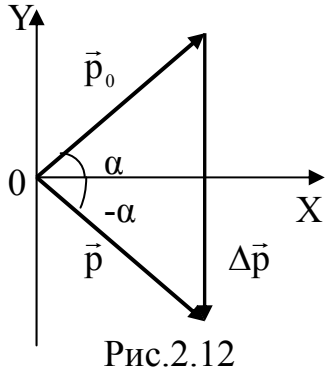


Рис.2.12

Зміна імпульсу дорівнює $\Delta\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0 = m\vec{v} - m\vec{v}_0$. З трикутника, утвореного векторами $\vec{p}_0$, $\vec{p}$ і $\Delta\vec{p}$, визначаємо модуль вектора $|\Delta\vec{p}|$: $|\Delta\vec{p}| = 2mv_0 \sin\alpha$.

Чисельний розрахунок дає: $\Delta p = 2 \cdot 0{,}5 \cdot 15 \cdot 0{,}6428 = 9{,}64\,(\frac{кг \cdot м}{с})$.

Оскільки вектори $\vec{p}_0$ та $\vec{p}$ рівні за величиною і утворюють рівні за величиною кути з горизонтом, вектор $\Delta\vec{p}$ є перпендикулярним до горизонту і направлений вертикально донизу, тобто протилежно осі 0Y.

Відповідь: $\Delta\vec{p} = -9{,}64\vec{j}$ кг·м/с, де $\vec{j}$ − координатний орт (одиничний вектор), напрямлений вздовж осі 0Y.

2-й спосіб. Оскільки на м'яч діє постійна за величиною та напрямом сила тяжіння $\vec{F}_т = m\vec{g}$, то зміна імпульсу тіла за проміжок часу Δt, як випливає із формули (2.2) дорівнює імпульсу сили, тобто добутку сили тяжіння на час її дії:

$$\Delta\vec{p} = m\vec{v} - m\vec{v}_0 = m\vec{g}\Delta t.$$

Час руху м'яча знаходимо за допомогою співвідношення $\Delta t = t_n = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$ (див. приклад 1.7).

Остаточно знаходимо: $\Delta\vec{p} = \frac{2m\vec{g}v_0 \sin\alpha}{g} = -2mv_0 \sin\alpha\vec{j} = -9{,}64\vec{j}$ (кг·м/с).

Приклад 2.3. На нерухоме тіло масою m=5кг діє у горизонтальному напрямі сила F_1=2Н. У протилежному напрямі починає діяти сила, яка зростає пропорційно часу за законом F_2 = kt, де k=0,1. Коефіцієнт тертя між тілом і горизонтальною поверхнею μ=0,10. Побудувати графік залежності сили тертя від часу. Записати закон, за яким із часом змінюється прискорення тіла.

Розв'язання

m=5кг F_1=2Н F_2 = kt k = 0,1 μ=0,10	
$F_{тер.}$=f(t) - ?	

За другим законом Ньютона рівняння руху тіла має вигляд:

$$\vec{N} + \vec{F}_т + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_{тер.} = m\vec{a}\ , \qquad (1)$$

де сила тяжіння $F_т = mg$.

В початковий момент $\vec{F}_2$=0, тіло знаходиться у стані спокою (рис.2.13). При t=0 проекція рівняння (1) на вісь Ох має вигляд: $-F_1 + F_{тер.} = 0$. Отже, сила тертя спокою у початковий момент дорівнює силі F_1 і її проекція на вісь Ох має знак «+»: $F_{тер} = F_1 = 2Н$.

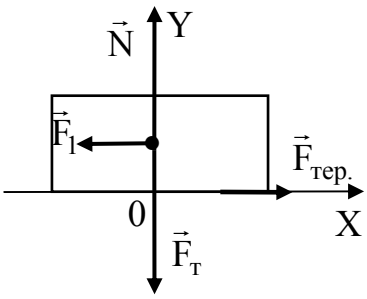


Рис.2.13

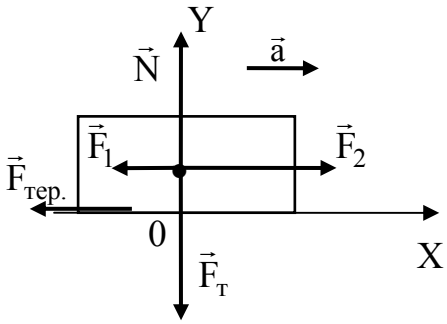


Рис.2.14

З урахуванням сили $\vec{F}_2$ до початку руху тіла рівняння (1) набуває вигляду:

$$-F_1 + F_{тер.x} + F_2 = 0 \quad або \quad -F_1 + F_{тер.x} + kt = 0\,. \qquad (2)$$

Із зростанням модулю сили $\vec{F}_2$, рівнодійна сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, зменшується за модулем. Відповідно, зменшується сила тертя спокою. В момент t_1, коли $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$ сила тертя обертається на нуль. Момент часу t_1 знаходимо за умовою: F_1=F_2=0,1t_1. Звідси отримуємо $t_1 = \frac{2}{0{,}1} = 20с$.

В момент часу t_1 внаслідок подальшого зростання сили F_2 рівнодійна $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ змінює напрям. Відповідно змінюється напрям дії сили тертя і знак її проекції $F_{тер.x}$ на вісь 0X (рис.2.14). Модуль сили тертя спокою зростає внаслідок зростання сили $\vec{F}_2$ доти, доки в деякий момент часу t_2 сягає максимального значення:

$$F_{тер.} = \mu N = \mu mg = 0{,}1 \cdot 5 \cdot 9{,}8 = 4{,}9Н \qquad (3)$$

Це значення дорівнює силі тертя ковзання, яка залишається незмінною в процесі руху тіла, тобто при $t > t_2$.

Момент t_2 визначаємо з рівняння (2) з урахуванням виразу (3):

$$-F_1 - \mu mg + kt_2 = 0\,. \qquad (4)$$

Звідки знаходимо $t_2 = \frac{\mu mg + F_1}{k}$. $t_2 = \frac{0{,}1 \cdot 5 \cdot 9{,}8 + 2}{0{,}1} = 69c$.

Користуючись вище визначеним, будуємо графік залежності сили тертя $F_{тер}$ від часу (рис.2.15).

З моменту часу t_2 тіло починає рухатися з прискоренням, яке можна визначити за допомогою закону руху тіла (1), записаного в проекції на вісь 0X:

$$-F_1 - \mu mg + kt = ma. \quad (5)$$

Визначимо залежність прискорення від часу. У рівнянні (5) представимо силу F_2 у тотожній формі $F_2 = kt = kt_2 + k(t - t_2)$ та використаємо умову (4). Отримуємо:

$$k(t - t_2) = ma.$$

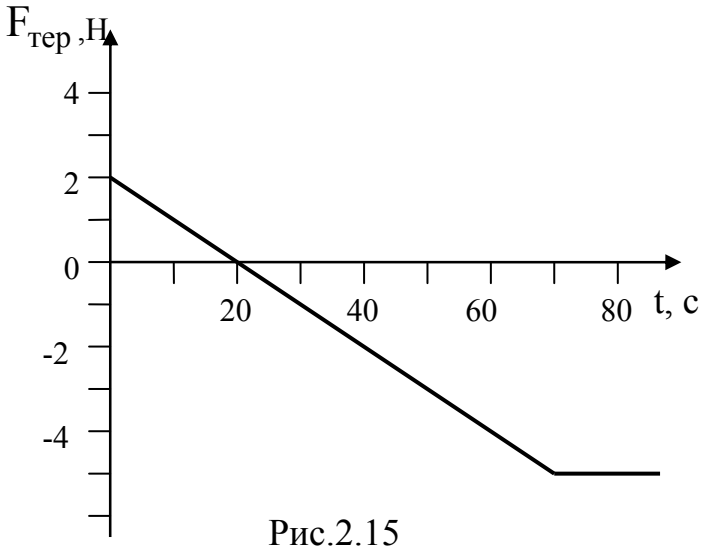


Рис.2.15

Звідси маємо:

$$a = \begin{cases} 0; & 0 < t < t_2 \\ \frac{k(t - t_2)}{m} = 0{,}02(t - t_2); & t > t_2 \end{cases}.$$

Приклад 2.4. На тіло маси m діє пропорційна часу сила $F = kt$. Знайти рівняння руху тіла за умови, що при t=0 швидкість тіла дорівнювала $\vec{v}_0$, а сила діє у напрямі початкового руху тіла.

Розв'язання.

$F = kt$
$\vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$
$m = const$
$x(t) - ?$

При $m = const$ рівняння II закону Ньютона має вигляд:

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

В проекції на вісь OX, яку направимо вздовж вектора початкової швидкості $\vec{v}_0$, $ma = kt$.

За означенням прискорення $a = \frac{dv}{dt}$. Тоді $m\frac{dv}{dt} = kt$, звідки отримуємо $dv = \frac{ktdt}{m}$. Інтеграл від обох частин останнього рівняння є елементарним:

$$\int_{v_0}^{v} dv = \frac{k}{m}\int_{t_0}^{t} tdt.$$

Отже, отримуємо $v - v_0 = \frac{kt^2}{2m}$ та $v = v_0 + \frac{kt^2}{2m}$.

За означенням швидкості $v = \frac{dx}{dt}$. Звідси маємо $dx = v \cdot dt = \left(v_0 + \frac{kt^2}{2m} \right) dt$.

Виконуючи інтегрування, знаходимо закон руху тіла:

$$x = \int_{t_0}^{t} v dt = \int_{0}^{t} \left(v_0 + \frac{kt^2}{2m} \right) dt = v_0 t + \frac{kt^3}{6m}.$$

Відповідь: $x = v_0 t + \frac{kt^3}{6m}$.

Розглянемо, як впливає врахування різних факторів на характер і результат руху тіла на прикладі руху тіла вздовж похилої площини.

Приклад 2.5. Два тіла сковзають без початкової швидкості ($v_0 = 0$) з похилих площин 1 та 2 (рис.2.16), які мають однакову висоту h і різні кути нахилу α_1 та α_2 ($\alpha_2 > \alpha_1$). Порівняти швидкості тіл наприкінці площин у випадку, коли дією сили тертя та опору повітря можна знехтувати.

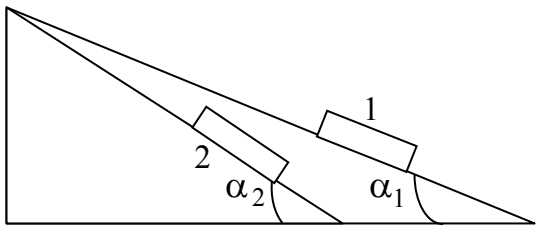


Рис. 2.16

Задачу можна розв'язати різними способами: на основі рівняння динаміки; на основі теореми про кінетичну енергію та на основі закону збереження енергії.

Розглянемо розв'язання задачі на основі рівняння динаміки поступального руху (II закону Ньютона).

$h_1 = h_2 = h$ $\alpha_2 > \alpha_1$	Розв'язання. Рух тіл є поступальним. Згідно з умовою задачі форма та розмір тіл не впливають на характер їх руху, тому достатньо описати рух однієї точки – центра мас тіла, вважаючи, що в ній зосереджена вся маса тіла, і до неї прикладені всі сили.
$\frac{v_2}{v_1}$ - ?	

Сили, що діють на тіло, зображені на рис. 2.17. За відсутності сил тертя та опору на тіло діють сила тяжіння $\vec{F}_T = m\vec{g}$, (m – маса тіла, $\vec{g}$ – прискорення вільного падіння) та сила реакції опори $\vec{N}$. Рівняння руху тіла, яке записуємо на основі II закону Ньютона, має вигляд:

$$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}. \qquad (1)$$

У проекції на вісь OX маємо

$$mg\sin\alpha = ma.$$

Звідси знаходимо, що прискорення тіла дорівнює: $a = g\sin\alpha$.

Із законів кінематики прямолінійного рівноприскореного руху $v^2 - v_0^2 = 2aS$, де $S = \frac{h}{\sin\alpha}$ (2) – довжина шляху тіла, тобто довжина похилої площини. Остаточно, з урахуванням виразів для a та S, отримуємо

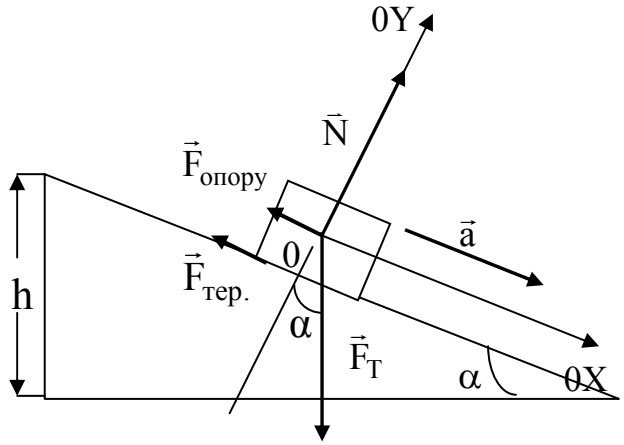


Рис.2.17

$$v = \sqrt{2aS} = \sqrt{2g\sin\alpha \cdot \frac{h}{\sin\alpha}} = \sqrt{2gh}.$$

Отже, за відсутності дії сили тертя (точніше, нехтуючи дією цієї сили) кінцева швидкість тіла не залежить від кута нахилу похилої площини і визначається лише її висотою. Тому швидкості тіл, які сковзають з похилих площин однакової висоти та різних кутів нахилу, наприкінці руху будуть однаковими: $v_1 = v_2$.

Відповідь: $\frac{v_2}{v_1} == 1$.

Приклад 2.6. Розв'язати попередню задачу про рух тіла вздовж похилої площини (приклад 2.5) з урахуванням сили тертя, яка діє на тіло.

Розв'язання.

Оскільки за законом Амонтона – Кулона сила тертя не залежить від площі стичних поверхонь, як і у попередньому випадку, будемо вивчати рух центра мас тіла.

З урахуванням сили тертя $\vec{F}_{тер.}$ рівняння руху тіла набуває такої форми: $m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тер.} = m\vec{a}$. (1)

У проекції на вісь 0X (див.рис.2.17) маємо: $mg\sin\alpha - F_{тер.} = ma$; (2)

Відповідно у проекції на вісь 0Y отримуємо: $N - mg\cos\alpha = 0$. (3)

Сила тертя дорівнює $F_{тер.} = \mu N$ (4)

Рівняння (2), (3) та (4) утворюють систему, з якої визначаємо

$$F_{тер.} = \mu mg\cos\alpha, \quad (5)$$

та прискорення тіла $a = g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$.

Відповідно швидкість тіла наприкінці руху дорівнює

$$v = \sqrt{2aS} = \sqrt{2g(\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha)\frac{h}{\sin\alpha}} = \sqrt{2gh(1 - \mu ctg\alpha)}. \quad (6)$$

Аналіз формули (6) приводить до висновку, що при незмінній висоті збільшення кута нахилу α похилої площини приводить то збільшення швидкості тіла, оскільки $\mathrm{ctg}\alpha$ зменшується із збільшенням кута (у межах першої координатної чверті). З фізичної точки зору це зрозуміло і пояснюється зменшенням шляху тіла та відповідним зменшенням витрат енергії на роботу проти сили тертя (вона, у свою чергу, також зменшується).

Відповідь: $\frac{v_2}{v_1} == \sqrt{\frac{1-\mu\mathrm{ctg}\alpha_2}{1-\mu\mathrm{ctg}\alpha_1}}$.

Приклад 2.7. Розв'язати задачу про рух тіла вздовж похилої площини (приклад 2.5) з урахуванням сили тертя та сили опору повітря, які діють на тіло. Силу опору вважати пропорційною швидкості руху тіла ($\vec{F}_{оп.} = -r\vec{v}$, де r – коефіцієнт опору, залежить від форми і розмірів тіла).

Розв'язання.

Рівняння руху тіла (див. рис.2.17) з урахуванням $\vec{F}_{оп.}$, набуває вигляду:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тер.} + \vec{F}_{оп.}. \qquad (1)$$

У проекції на вісь OX, користуючись отриманим вище виразом для сили тертя (див. формулу (5), приклад 2.6), маємо:

$$ma = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha - rv.$$

Замінюючи прискорення a на $\frac{dv}{dt}$, записуємо диференціальне рівняння першого порядку відносно v із змінними, які розділяються:

$$\frac{dv}{dt} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - \frac{r}{m}v, \qquad (2)$$

Переписуємо (2) у такому вигляді: $\frac{dv}{g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - \frac{r}{m}v} = dt$.

При використанні заміни $g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - \frac{r}{m}v = z$ попереднє рівняння приводить до рівняння $\frac{dz}{z} = -\frac{r}{m}dt$, елементарний розв'язок якого має вигляд: $\ln z = \ln(g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - \frac{r}{m}v) = -\frac{r}{m}t + C_1$.

Сталу інтегрування знаходимо із початкової умови: v=0 при t =0:

$$C_1 = \ln(g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

Тоді $\ln\frac{g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - \frac{r}{m}v}{g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)} = -\frac{r}{m}t$, звідки остаточно отримуємо

$$\frac{g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)-\frac{r}{m}v}{g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)}=e^{-\frac{r}{m}t};\ \rightarrow\quad v=\frac{mg}{r}(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)\left(1-e^{-\frac{r}{m}t}\right)\quad(3).$$

Розв'язок (3) рівняння (2) указує на нелінійний характер залежності швидкості від часу. На відміну від двох попередніх випадків, рух тіла не є рівноприскореним. До того ж, швидкість при $t\to\infty$ асимптотично прямує до деякого граничного значення, яке є максимальним.

Зауважимо, що навіть при порівняно невеликих значеннях часу $t>\frac{m}{r}$, $e^{-\frac{r}{m}t}<<1$, наближено нехтуючи експонентою у формулі (3), для v_{max} отримуємо: $v=\frac{mg}{r}(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)$. (4)

З (4) випливає, що при достатній довжині похилої площини з деякого моменту часу рух тіла стає практично рівномірним. При цьому величина швидкості залежить від коефіцієнтів тертя та опору.

Із збільшенням кута нахилу α значення $\sin\alpha$ зростає, а $\cos\alpha$ зменшується. Відповідно у формулі (4) зростає швидкість руху тіла v_{max}.

Відповідь: $\frac{v_2}{v_1}=\frac{\sin\alpha_2-\mu\cos\alpha_2}{\sin\alpha_1-\mu\cos\alpha_1}$.

Приклад 2.8. Тягарці однакової маси $m_1=m_2=1$ кг з'єднані ниткою, перекинутою через блок, закріплений наприкінці столу. Коефіцієнт тертя тягарця, що рухається по столу, μ=0,1. Визначити прискорення, з яким рухаються тягарці та сили натягу ниток. Блок вважати невагомим, нитки – нерозтяжними. Вагою нитки знехтувати.

Розв'язання.

$m_1=1$ кг
$m_2=1$ кг
$g=9{,}8$м/с^2
μ=0,1

a - ? T_1-?
T_2 - ?

Розглянемо сили, які діють на тіла, що входять у систему, та відповідний рух. Тіла рухаються поступально, тіло 1 – вниз, тіло 2 – вправо (див. рис.2.18). На тіло m_1 діє сила тяжіння $m_1\vec{g}$ і сила натягу нитки $\vec{T}_1$. На тіло m_2 – сила тяжіння $m_2\vec{g}$, сила натягу нитки $\vec{T}_2$, сила тертя $\vec{F}_{тер}$ та сила реакції опори $\vec{N}$. На блок – сили натягу нитки $\vec{T}_1'$ і $\vec{T}_2'$. Згідно із третім законом Ньютона $\vec{T}_1=-\vec{T}_1'$, $\vec{T}_2=-\vec{T}_2'$. Відповідно до умов задачі маємо знехтувати масами блоку і нитки. Тоді сили натягу задовольняють умову $T_1=T_2$. На основі другого закону Ньютона запишемо рівняння динаміки для кожного з тягарців: $m_1\vec{g}+\vec{T}_1=m_1\vec{a}$; $\vec{T}_2+\vec{F}_{тр}=m_2\vec{a}$.

В проекції на напрямок руху відповідного тягарця попередні рівняння мають вигляд:

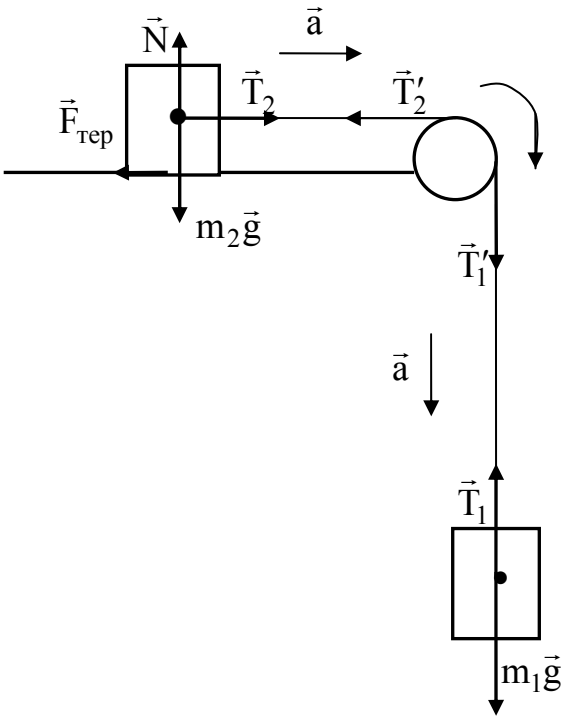


Рис.2.18

$$m_1g - T_1 = m_1a;$$
$$T_2 - F_{тр} = m_2a.$$

З урахуванням виразу для сили тертя $F_{тр} = \mu N = \mu m_2 g$ та за умови рівності сил натягу $T_1 = T_2 = T$ перепишемо ці рівняння у такому вигляді:

$$m_1g - T = m_1a;$$
$$T - \mu m_2 g = m_2a.$$

Складаючи рівняння, знаходимо величину прискорення a:

$$a = g\frac{m_1 - \mu m_2}{m_1 + m_2}.$$

З рівняння руху першого тягарця отримуємо силу натягу:

$$T = m_1(g - a).$$

Чисельний розрахунок дає

$a = 9{,}8 \cdot \frac{1 - 0{,}1 \cdot 1}{1 + 1}$ м/с^2=4,41 м/с^2; T = 5,4 Н.

Приклад 2.9. Потяг, що складається з n однакових вагонів, рухається з місця з прискоренням a. Вагони між собою зчеплені пружинами, коефіцієнт пружності яких дорівнює k. Коефіцієнт тертя між колесами і рейками − μ, маса кожного вагону – m. Знайти силу тяги локомотива та деформацію (видовження) кожної пружини.

$m_1 = m_2 = \ldots = m$
n
μ
$k_1 = k_2 = \ldots = k$
$F_{тяги}$ - ? Δx_i - ?

Розв'язання.

Прискорення системи тіл (вагонів потягу) визначається дією зовнішніх сил: силою тяги $\vec{F}_{тяги}$, тертя $\vec{F}_{тер.}$, тяжіння $\vec{F}_т$ і силою реакції опори $\vec{N}$. Векторна сума внутрішніх сил пружності, які діють на окремі вагони, внаслідок третього закону Ньютона дорівнює нулю.

Рівняння другого закону Ньютона для всього потягу має вигляд:

$$\vec{F}_{тяги} + \vec{F}_{тер.} + \vec{F}_т + \vec{N} = nm\vec{a}, \qquad (1)$$

де $\vec{F}_т = n\vec{F}_{т1} = nm\vec{g}$; $\vec{F}_{тер.} = n\vec{F}_{тер.1}$; $\vec{N} = n\vec{N}_1$ - сумарні сили, що діють на всі n вагонів.

Запишемо рівняння (1) в проекціях на координатні осі (див. рис.2.19) і додамо до системи рівнянь співвідношення для сили тертя:

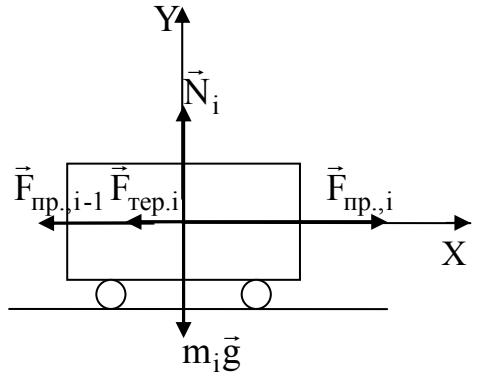


Рис.2.19

$$\begin{cases} F_{тяги} - nF_{тер.1} = nma; \\ -nmg + nN_1 = 0; \\ F_{тер.1} = \mu N_1. \end{cases}$$

Звідси визначаємо, що сила тертя, яка діє на один вагон, має дорівнювати

$$F_{тер.1} = \mu mg.$$

А сила тяги, відповідно, має вигляд: $F_{тяги} = nm(a + \mu g)$. (2)

Для визначення видовження пружин розглянемо рівняння руху певної кількості (i) вагонів (відлік вагонів починаємо з кінця потягу). Роль зовнішньої сили, що надає прискорення вагонам, відіграє сила пружності $F_{пр.i} = k\Delta x_i$, яка діє на найближчий (з розглянутих) до голови потягу вагон з номером i. За другим законом Ньютона рівняння руху цих вагонів в проекції на вісь 0X з урахуванням співвідношень для сил пружності і тертя має вигляд: $k\Delta x_i - i\mu mg = ima$. (3)

З (3) отримуємо вираз для видовження i- ї (відраховуючи з кінця потягу) пружини:

$$\Delta x_i = \frac{im(a + \mu g)}{k}.$$

Відповідь: $F_{тяги} = nm(a + \mu g)$; $\Delta x_i = \dfrac{im(a + \mu g)}{k}$.

Приклад 2.10. На висоті h =30м над землею зависнув вертоліт масою M=1200 кг. З вертольоту опущені мотузяні сходини, по яким спускається на землю людина масою m = 80кг. Яку довжину повинні мати сходини, щоб людині не довелось зістрибувати з них на землю? Масою сходин знехтувати.

M =1200 кг
m = 80кг
h =30м

L - ?

Розв'язання.

Розглянемо систему тіл, яку складають вертоліт, сходини та людина. Сили взаємодії між цими тілами є внутрішніми, їх сума дорівнює нулю. Оскільки сила тяжіння урівноважена силою реакції струменя повітря, яке відштовхують гвинти вертольота, сума зовнішніх сил також дорівнює нулю. За теоремою про рух центра мас, прискорення системи також дорівнює нулю, і координати центру мас системи не будуть змінюватися, бо у момент t = 0 його швидкість $\vec{v}_c$ дорівнювала нулю.

Зв'яжемо систему координат з Землею, і вісь OY спрямуємо вздовж вертикалі. Тоді, до початку руху людини координата центра мас дорівнює

$$(y_c)_1 = h.$$

Наприкінці спуску людини координата центра набирає значення

$$(y_c)_2 = \frac{M \cdot L + m \cdot 0}{M + m} = \frac{M \cdot L}{M + m} .$$

Оскільки $(y_c)_1 = (y_c)_2$, звідси можна знайти довжину сходин: $L = \frac{(M+m)h}{M}$.

Чисельний розрахунок дає L = 32м. Відповідь: L = 32м.

Зауважимо, що задачу можна розв'язати також за допомогою закону збереження імпульсу (див. приклад 3.1, розд.3).

Задачі для самостійного розв'язування

2.1. Хлопчик масою m=40 кг стрибає з кручі висотою h =3,2 м зі швидкістю v=5 м/с в горизонтальному напрямку. Визначити а) імпульс сили F, що діє на хлопчика протягом стрибка; б) зміну імпульсу $\Delta\vec{p}$ хлопчика.

2.2. На лобове скло автомобіля падають вертикально краплі дощу. Щільність дощу $n = 5 \cdot 10^4$ крапель у кубічному метрі. Маса однієї краплі $m_1 = 40$ мг, швидкість її падіння v = 4,5 м/с. Обчислити тиск P дощу на поверхню скла, якщо скло утворює кут $\alpha = 60^0$ з горизонтом. Вважати, що краплі не відскакують від поверхні скла.

2.3. Вертоліт масою m = 3,2 т з ротором, діаметр якого d =16 м, „зависає" в повітрі. З якою швидкістю ротор відштовхує вертикально вниз струмінь повітря? Діаметр струменя вважати рівним діаметру ротора. Густина повітря за нормальними умовами ρ=1,29 кг/м^3.

2.4. Електровоз тягне два вагони, маси яких $m_1 = 60$ т, $m_2 = 40$ т, надаючи їм прискорення $a = 0{,}2$ м/с^2. Коефіцієнт тертя $\mu = 0{,}005$. З якими силами F_1 і F_2 розтягуються пружини буферів між вагоном та електровозом і між вагонами?

2.5. Визначити жорсткість k пружини, за допомогою якої по похилій площині рівномірно тягнуть тіло масою $m = 0{,}5$ кг, якщо вона розтягнулася на $\Delta x = 2$ см. Коефіцієнт тертя $\mu = 0{,}1$.

2.6. Яким має бути мінімальний коефіцієнт тертя між шинами коліс велосипеда і дорогою, щоб велосипедист міг рухатися вгору з прискоренням $a = 0{,}1$ м/с^2? Кут нахилу дороги $\alpha = 20^0$.

2.7. Тіло рухається з постійною швидкістю по горизонтальній поверхні під дією сили F. Коефіцієнт тертя тіла μ = 0,4. Який кут з горизонтом повинна утворювати ця сила, щоб її значення було мінімальним?

2.8. Яким повинен бути найменший нахил даху, щоб дощова вода з нього стікала якнайшвидше?

2.9. По покритому льодом схилу пагорба, який утворює кут $\alpha = 30^0$ з горизонтом, пустили знизу уверх каміння, яке за час t =1,6с проходить відстань s = 12м, після чого починає сковзати униз. Визначити час спуску каміння та коефіцієнт тертя.

2.10. Яку силу тяги розвиває автомобіль, якщо він рухається з постійною швидкістю під гору, схил якої складає 1м на кожні 50м шляху. Маса автомобіля $m = 1$т, сила тертя дорівнює 0,1 від сили тяжіння автомобіля.

2.11. Верьовка з двома однаковими за масою m вантажами перекинута через блок, закріплений на вершині похилої площини (рис.2.20). Коефіцієнт тертя між вантажами і похилою площиною дорівнює μ, кут нахилу похилої площини – α . Визначити силу тиску на вісь блока. Тертям в осі блока і масою блока знехтувати.

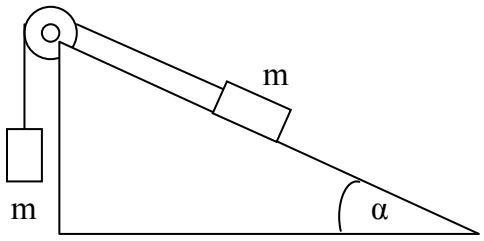


Рис.2.20

2.12. На гладкій горизонтальній поверхні лежить брусок масою M=2кг, на якому знаходиться інший брусок масою m=1кг. Обидва бруски з'єднані ниткою, перекинутою через невагомий блок (рис.2.21). Яку силу необхідно прикласти до нижнього бруска, щоб він почав рухатися з постійним прискоренням a=g/2?

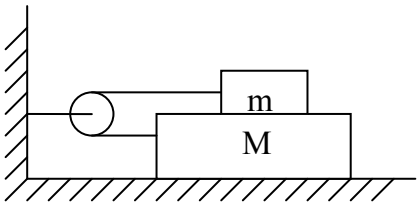


Рис.2.21

2.13. З яким максимальним прискоренням можна піднімати на сталевому дроті діаметром $d = 2{,}4$ мм вантаж масою $m = 350$ кг? Межа міцності сталі $\sigma_м = 785$ МПа.

2.14. На стрижні довжиною $l = 1{,}2$ м і діаметром $d = 0{,}2$ см, який закріплений на стелі підйомника, висить вантаж масою $m = 2{,}0$ т. Підйомник рухається вгору з прискоренням $a = 1$ м/с^2. Чому дорівнює модуль пружності (модуль Юнга) матеріалу стрижня, якщо довжина стрижня збільшилась на $\Delta l = 1{,}2$ мм?

2.15. Вантажний автомобіль взяв на буксир легковий автомобіль масою $m = 2{,}0$ т і , рухаючись рівноприскорено (початкова швидкість дорівнює нулю) за час t =40с проїхав шлях s = 320м. Знайти здовження троса, який з'єднує автомобілі, якщо коефіцієнт пружності k = 2,0 МН/м. Тертям і силою опору знехтувати.

2.16. Визначити коефіцієнт жорсткості пружини, якщо відомо, що на Місяці під дією тіла масою $m = 6$ кг її довжина збільшилася б на $\Delta l = 4$ см. Маса Місяця в 81 раз менша за масу Землі, радіус Місяця в 3,6 разу менший за радіус Землі.

2.17. За значеннями гравітаційної сталої, відстані від Землі до Сонця та періоду обертання Землі навколо Сонця визначити масу Сонця.

2.18. На якій відстані від Землі знаходиться точка, в якій рівнодійна гравітаційна сила, що діє на космічний корабель з боку Землі і Місяця, дорівнює нулю?

2.2. Динаміка криволінійного руху

Методичні вказівки. При розв'язуванні задач цього розділу перш за все необхідно визначити, які сили діють на тіло і які саме з них призводять до криволінійного руху, тобто надають тілу нормальне (доцентрове) прискорення. Далі записують рівняння руху у векторній формі, а потім у проекціях на координатні осі. Осі координат зручно вибрати так, щоб вісь 0X була направлена вздовж радіуса кривизни і співпадала з напрямом нормального прискорення, вісь 0Y була спрямована перпендикулярно до неї. Отриману систему рівнянь, у разі необхідності, доповнюють виразами для сил, що діють на тіл, або кінематичними співвідношеннями і знаходять невідомі величини.

Приклади розв'язання задач

Приклад 2.11. Якою повинна бути швидкість руху мотоцикліста вздовж горизонтального кола внутрішньої поверхні вертикального циліндра радіуса R = 5м, щоб він не впав униз? Коефіцієнт тертя дорівнює μ=0,4.

$\mu = 0{,}4$
$R = 5$м

v - ?

Розв'язання.

На мотоцикліста в процесі руху діють сили тяжіння $\vec{F}_т = m\vec{g}$; тертя $\vec{F}_{тер.}$ і реакції $\vec{N}$. Остання надає мотоциклісту нормальне прискорення $\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}$, спрямоване до осі циліндра вздовж його радіуса (див. рис.2.22).

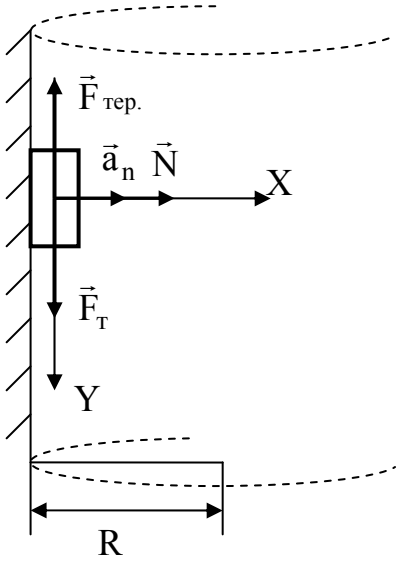


Рис.2.22

Рівняння динаміки, яке описує рух мотоцикліста, має вигляд:

$$\vec{F}_{тер.} + \vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}_n .$$

У проекціях на осі OX і OY, з урахуванням співвідношень для нормального прискорення та сили тертя ковзання, отримуємо систему трьох рівнянь:

$$N = \frac{mv^2}{R}; \quad mg - F_{тер.} = 0; \quad F_{тер.} = \mu N.$$

Звідки випливає: $N = \frac{mg}{\mu}$ і $v = \sqrt{\frac{NR}{m}} = \sqrt{\frac{gR}{\mu}}$.

Чисельний розрахунок за отриманими формулами дає $v = 11{,}1$ м/с.

Відповідь: $v = 11{,}1$ м/с.

Приклад 2.12. Математичний маятник масою m та довжиною нитки l обертається в горизонтальній площині з періодом τ (рис. 2.23). Визначити силу натягу нитки T і кут α, який вона утворює з вертикаллю.

m, l, τ
T, α − ?

Розв'язання.

На маятник діють дві сили: сила тяжіння $m\vec{g}$ і сила натягу нитки $\vec{T}$. Рівняння другого закону Ньютона у векторній формі має такий вигляд:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}.$$

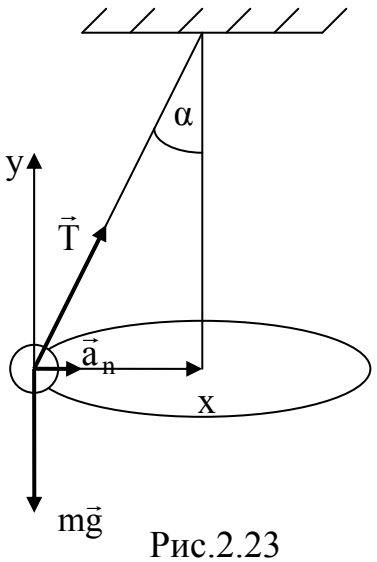


Рис.2.23

У проекціях на осі координат рівняння утворює систему:

$$ma_n = T\sin\alpha \qquad (1)$$

$$0 = -mg + T\cos\alpha. \qquad (2)$$

Нормальне (доцентрове) прискорення визначається за формулою: $a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$, (3)

де кутова швидкість маятника

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} \quad (4), \text{ а } \quad R = l\sin\alpha. \qquad (5)$$

Із співвідношень (1) - (5) знаходимо

$$T = \frac{4\pi^2 ml}{\tau^2}. \qquad (6)$$

Користуючись (2) з урахуванням (6) отримуємо: $\cos\alpha = \frac{g\tau^2}{4\pi^2 l}$.

Відповідь: $T = \frac{4\pi^2 ml}{\tau^2}$; $\alpha = \arccos\frac{g\tau^2}{4\pi^2 l}$.

Приклад 2.13. Ковзаняр на льодяній доріжці намагається пройти віраж якнайближче до внутрішньої бровки. Велосипедист на велотреку проходить віраж якомога далі від внутрішньої бровки. Як пояснити цю різницю у тактиці ковзаняра й велосипедиста?

Розв'язання.

1. За умови, що величина швидкості ковзаняра не змінюється, векторна сума сил, що діють у напрямі руху, дорівнює нулю. Тоді, за другим законом Ньютона, рівняння руху ковзаняра має вигляд:

$$\vec{F}_т + \vec{N} + \vec{F}_{тер.} = m\vec{a}_n, \quad (1)$$

де $F_т = mg$ – сила тяжіння; N – реакція опори; $F_{тер.} = \mu N$ – сила тертя;

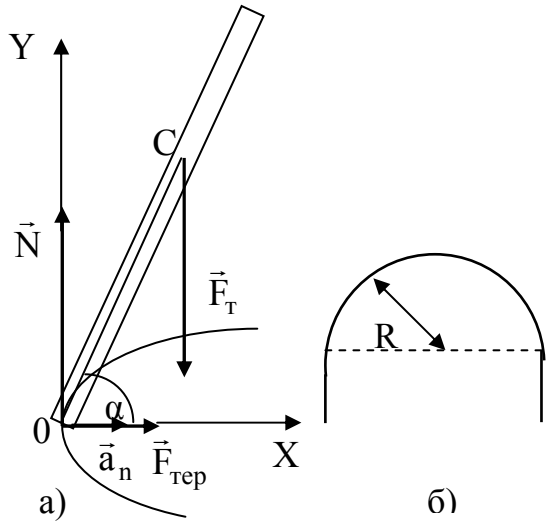


Рис.2.24

$a_n = \frac{v^2}{R}$ – нормальне (доцентрове) прискорення (рис. 2.24,а).

Оскільки ковзаняр не має прискорення у вертикальному напрямі, рівняння (1) у проекції на вісь OY породжує: $N - mg = 0$. Відповідно сила тертя дорівнює $F_{тер.} = \mu mg$.

Проектуючи рівняння (1) на вісь OX отримуємо:

$$F_{тер.} = ma_n, \quad \mu mg = \frac{mv^2}{R}. \qquad (2)$$

Отже, оскільки льодяна доріжка не має нахилу, ковзаняру на віражі, нормальне прискорення надає сила тертя. Користуючись (2), знаходимо $v = \sqrt{\mu gR}$. На повороті ковзаняр рухається вздовж півкола, довжина якого дорівнює $s = \pi R$ (рис.2.24,б). Відповідно, час, який він витрачає на поворот, буде дорівнювати

$$t = \frac{\pi R}{v} = \pi\sqrt{\frac{R}{mg}}.$$

Чим більший радіус R, тим більший час витрачає ковзаняр. Тому він намагається пройти поворот якнайближче до внутрішньої бровки.

Кут нахилу ковзаняра на віражі можна визначити за допомогою співвідношення

$$tg\alpha = \frac{F_{тер.}}{N} = \frac{\mu mg}{mg} = \mu.$$

2. Розглянемо тепер рух велосипедиста. Велотрек має нахил, кут α якого збільшується із збільшенням відстані від внутрішнього краю. При незмінній величині швидкості рівняння руху велосипедиста на повороті має вигляд аналогічний рівнянню (1) (рис. 2.25):

$$\vec{F}_т + \vec{N} + \vec{F}_{тер.} = m\vec{a}_n. \qquad (3)$$

В проекціях на вісі 0X і 0Y (3) призводить до:

$$F_{тер}\cos\alpha + N\sin\alpha = \frac{mv^2}{R}; \qquad (4)$$

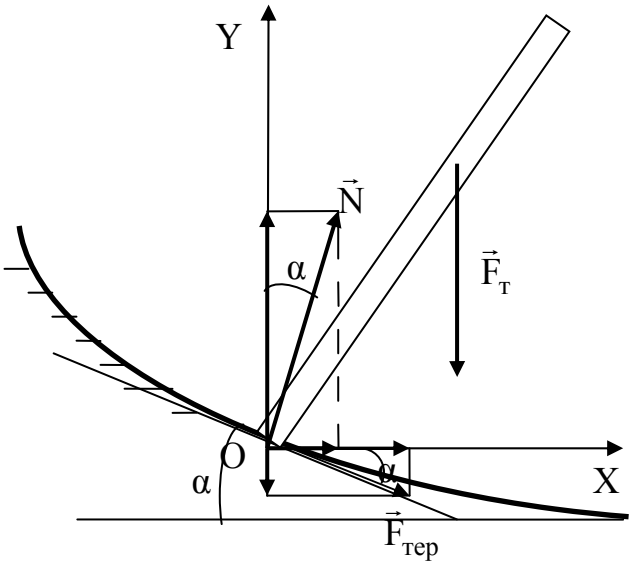


Рис.2.25

$$N\cos\alpha - F_{тер}\sin\alpha - mg = 0. \quad (5)$$

Таким чином, велосипедисту, який проходить віраж, нормальне прискорення надає сума горизонтальних складових сили тертя $\vec{F}_{тер.}$ і сили реакції опори $\vec{N}$.

Із рівняння (5), користуючись $F_{тер.} = \mu N$, знаходимо силу реакції $N = \dfrac{mg}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}$. З урахуванням отриманого рівняння (4) набуває форми:

$$\frac{mg}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}(\mu\cos\alpha + \sin\alpha) = \frac{mv^2}{R}.$$

Звідки для максимальної швидкості, з якою може рухатися велосипедист, отримуємо:

$$v = \sqrt{gR \cdot \frac{\mu\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}} = \sqrt{gR \cdot \frac{\mu + tg\alpha}{1 - \mu tg\alpha}}.$$

Час, необхідний велосипедисту для проходження повороту (півкола радіуса R), дорівнює

$$t = \frac{\pi R}{v} = = \pi\sqrt{\frac{R}{g} \cdot \frac{1 - \mu tg\alpha}{\mu + tg\alpha}}.$$

Коли велосипедист проходить поворот по велотреку якомога далі від бровки, зростає не тільки радіус R, але й кут нахилу α (відповідно, зростає $tg\alpha$), що таким чином приводить до зменшення часу проходження повороту.

Задачі для самостійного розв'язування.

2.19. Визначити, при якому радіусі орбіти R супутник може рухатися в площині екватора так, щоб весь час знаходитися "зависати" над тією самою точкою поверхні Землі.

2.20. Конічний маятник на нитці довжиною 1,47м рівномірно обертається по колу в горизонтальній площині. Визначити період обертання маятника, якщо кут, утворений ниткою з вертикаллю дорівнює $\alpha = 60^\circ$.

2.21. Людина стоїть на краю круглої горизонтальної платформи радіусом R= 3м. Скільки обертів за хвилину навколо вертикальної осі повинна робити платформа, щоб людина не могла утриматися на ній, якщо коефіцієнт тертя дорівнює μ=0,25?

2.22. Камінь масою m = 0,5кг прив'язали до мотузки довжиною l=0,5м і розкрутили так, що сила натягу мотузки у найнижчій точці траєкторії T=45H. На яку висоту підійметься камінь, якщо мотузка обірветься в момент, коли швидкість направлена вертикально уверх?

2.23. Трамвай масою m = 4,5 т йде по закругленню радіусом R = 110м зі швидкістю v=10 км/год. Визначити силу бокового тиску коліс на рейки.

2.24. Поїзд рухається по закругленню радіусом 765м зі швидкістю v=72км/год. Наскільки зовнішня рейка повинна бути вищою за внутрішню, якщо відстань між рейками дорівнює l=1,5м?

2.25. При виході з піке винищувач рухається зі швидкістю 720км/год вздовж дуги радіусом 400м. Яке максимальне перевантаження відчуває пілот (перевантаження визначається відношенням ваги пілота до його сили тяжіння)?

2.26. Визначити силу натягу нитки математичного маятника масою m і довжиною L, якщо в момент, коли нитка утворює кут α з вертикаллю, його швидкість дорівнює v.

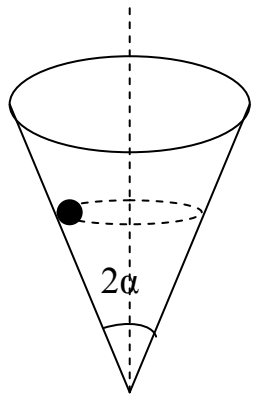


Рис.1.42

2.27. Кулька з масою m рухається з постійною кутовою швидкістю ω по внутрішній поверхні перевернутого конуса (рис.1.42) по горизонтальному колу. Кут при вершині конуса 2α. Знайти радіус кола. Тертям знехтувати.

2.28. На внутрішній поверхні перевернутого конуса з кутом 2α при вершині на висоті h знаходиться тіло. При якій мінімальній швидкості обертання конуса відносно вертикальної осі тіло залишиться нерухомим відносно поверхні конуса?

Тестові завдання

Вибрати вірну відповідь.

1. Два тіла однакової маси рухаються рівномірно: перше – по горизонтальній поверхні; друге –по похилій площині, яка утворює з горизонтом кут $\alpha=60^0$. Коефіцієнт тертя μ в обох випадках однаковий. Сили тертя, що діють на тіла задовольняють співвідношенню

1. $F_1 = F_2$ 2. $F_1 = 2F_2$ 3. $F_1 = 0,5F_2$ 4. $F_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}F_2$

2. За третім законом Ньютона натяг каната буде найбільшим, якщо
   1. канат розтягують із протилежних кінців дві людини із силами $F_1 = F_2$
   2. один кінець закріплений, із другого тягнуть із силою F_1
   3. один кінець закріплений, із другого тягнуть із силою $2F_1$

3. Внаслідок взаємодії двох тіл швидкість першого тіла збільшилась у 3 рази у порівнянні зі швидкістю другого тіла. Співвідношення між масами тіл має вигляд

1. $m_1 = 3m_2$ 2. $m_1 = \frac{1}{3}m_2$ 3. $m_1 = 0,3m_2$ 4. $m_1 = m_2$

4. Одиницею вимірювання імпульсу в Міжнародній системі одиниць (СІ) є

1. $\text{кг}\cdot\text{м}/\text{с}$ 2. $\text{кг}\cdot\text{м}/\text{с}^2$ 3. $\text{кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}^2$ 4. $\text{кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}^3$

5. Одиниця вимірювання сили, виражена через основні одиниці системи СІ:

1. $\text{кг}\cdot\text{м}/\text{с}$ 2. $\text{кг}\cdot\text{м}/\text{с}^2$ 3. $\text{кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}^2$ 4. $\text{кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}^3$

6. За законом Гука при заміні стального дроту дротом тієї самої довжини, але удвічі більшого діаметру (за умови незмінного навантаження)

А) абсолютна деформація розтягу Δl; Б) відносна деформація розтягу $\frac{\Delta l}{l}$

1.не зміниться 2.збільшиться у 2рази
3.зменшиться у 2рази 4.зменшиться у 4рази

7. За законом Гука при заміні стального дроту дротом того самого перерізу, але удвічі більшої довжини з постійним навантаженням

А) абсолютна деформація розтягу Δl; Б) відносна деформація розтягу $\frac{\Delta l}{l}$

1.не зміниться 2.збільшиться у 2рази
3.зменшиться у 2рази 4.зменшиться у 4рази

8. Щоб пасажир у ліфті знаходився у стані невагомості, ліфт повинен:
1. підійматися вгору рівномірно 2. опускатися вниз рівномірно
3. підійматися з прискоренням $g=9{,}8 м/с^2$ 4. опускатися з прискоренням $g=9{,}8 м/с^2$

9. Щоб вага пасажира у ліфті зменшилась удвічі, ліфт повинен:
1. підійматися вгору рівномірно 2. опускатися з прискоренням $g=4{,}9 м/с^2$
3. опускатися з прискоренням $g=9{,}8 м/с^2$ 4. підійматися з прискоренням $g=4{,}9 м/с^2$

10. Характер руху окремої матеріальної точки, яка належить до системи матеріальних точок, визначається дією
1. рівнодіючої зовнішніх сил, що діють на систему
2. рівнодіючої зовнішніх сил, що діють на матеріальну точку
3. рівнодіючої усіх сил, що діють на матеріальну точку
4. рівнодіючої внутрішніх сил, що діють на матеріальну точку

11. Характер руху системи матеріальних точок як цілого визначається дією
1. рівнодіючої зовнішніх сил, що діють на систему
2. рівнодіючої усіх сил, що діють на матеріальні точки системи;
3. рівнодіючої внутрішніх сил, що діють у системі

12. Сума внутрішніх сил замкненої системи
1.залежить від системи відліку 2. дорівнює нулю 3. залежить від природи сил

13. Центр мас замкненої системи тіл
1. покоїться або рухається рівномірно прямолінійно
2. рухається рівномірно криволінійно
3. рухається з постійним прискоренням
4. серед наведених немає вірної відповіді

14. Сумарний імпульс системи частинок
1. дорівнює нулю
2. є завжди більший від нуля
3. залежить від характеру руху частинок
4. дорівнює добутку швидкості $\vec{v}_c$ центра мас на масу системи

15. Якщо сумарний імпульс системи частинок дорівнює нулю, центр мас цієї системи
1. рухається рівномірно прямолінійно 2. рухається рівномірно криволінійно
3. рухається з постійним прискоренням 4. залишається нерухомим

16. Система тіл, які взаємодіють між собою, знаходиться у полі тяжіння поблизу поверхні Землі. Якщо знехтувати опором повітря, центр мас цієї системи тіл
1. залишається нерухомим
2. рухається рівномірно прямолінійно
3. рухається з прискоренням $\vec{g}$

17. У загальному випадку рівняння руху

А) системи матеріальних точок як цілого

Б) рівняння руху окремої матеріальної точки системи

має вигляд 1. $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{(i)} + \vec{F}^{(e)}$ 2. $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{(i)}$ 3. $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{(e)}$

($\vec{F}^{(i)}$ і $\vec{F}^{(e)}$- відповідно рівнодійні зовнішніх і внутрішніх сил, що діють на матеріальну точку)

18. Рух тіла змінної маси можна описати за допомогою рівняння:

1. $m\vec{a} = \vec{F}$ 2. $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ 3. $m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x$

19. На рисунку А) представлені напрямки векторів швидкості $\vec{v}$ і прискорення $\vec{a}$ м'яча. Напрям вектора рівнодійної всіх сил, що діють на м'яч, на рис. Б) збігається з напрямом вектора

1. 1 2. 2; 3. 3; 4. 4; 5. 5.

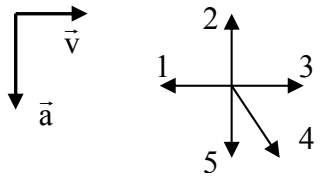


Рис. А) Рис. Б)

20. Зміна імпульсу тіла $\Delta\vec{p}$ дорівнює

1. $m\vec{a}$ 2. $\frac{mv^2}{2}$ 3. mgh 4. $\vec{F}\Delta t$

21. Тіло рухається прямолінійно. Залежність його модуля швидкості від часу представлена на рисунку А). На рисунку Б) графік залежності модуля рівнодійної сил, що діють на тіло, від часу надає лінія

1. 1; 2. 2; 3. 3; 4. 4.

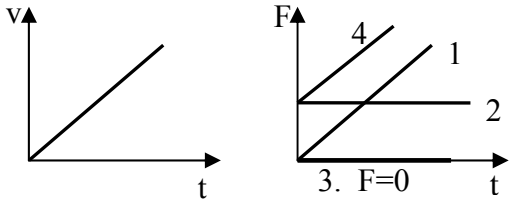


Рис. А) Рис. Б)

22. Вантаж, підвішений на мотузці до повітряної кулі, підіймається рівномірно уверх із швидкістю $\vec{v}$. Якщо мотузку перерізати, рух вантажу (нехтуючи опором повітря) буде

1. вільним падінням без початкової швидкості;
2. рівномірним;
3. вільним падінням з початковою швидкістю $\vec{v}$, спрямованою уверх;
4. падінням з початковою швидкістю $\vec{v}$, спрямованою униз.

23. Відстань, на якій сила земного тяжіння у 16 разів менша, ніж біля поверхні Землі, дорівнює

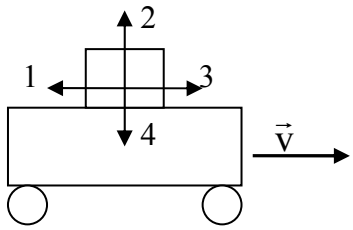
1. 2 R 2. 3 R 3. 8 R 4. 9 R (R – радіус Землі)

24. Біля поверхні Землі на тіло діє сила тяжіння, яка дорівнює 72 Н. На відстані 2R від поверхні Землі (R –радіус Землі) на тіло буде діяти сила

1. 36 Н 2. 12 Н 3. 18 Н 4. 8 Н 5. 4 Н

25. Брусок лежить нерухомо на горизонтальній платформі, яка рухається рівномірно прямолінійно із швидкістю $\vec{v}$. Вектор сили тертя $\vec{F}_{тер}$, що діє на брусок, спрямований уздовж напряму

1. 1 2. 2 3. 3 4. 4



26. Тіло масою m кинули під кутом 30^0 до горизонту з початковою швидкістю $\vec{v}_0$. У момент падіння модуль зміни імпульсу тіла $|\Delta\vec{p}|$ складає

1. mv_0 2. $2mv_0 \sin\alpha$ 3. $2mv_0$ 4. $2mv_0 \cos\alpha$ 5. $\frac{1}{2}mv_0$

27. Тіло масою m кинули під кутом α до горизонту із швидкістю $\vec{v}_0$. Через проміжок часу τ тіло впало на землю. Якщо знехтувати опором повітря,

А) зміна імпульсу тіла $\Delta\vec{p}$ за час польоту

Б) середній імпульс $\langle\vec{p}\rangle$ тіла за час польоту τ становить

$2mv_0$ 2. $m\vec{g}\tau$ 3. $-2mv_0$ 4. $m\vec{v}_0 + \frac{m\vec{g}\tau}{2}$

28. Мірою інертних властивостей при поступальному русі тіла є його

1. маса 2. імпульс 3. момент інерції 4. прискорення 5. кінетична енергія

29. Навантажена та порожня вантажівки на момент відключення двигуна рухалися з однаковою швидкістю. Коефіцієнт тертя однаковий, опір повітря не враховувати. При відключених гальмах гальмівний шлях

1.більший у першої вантажівки 2.більший у другої вантажівки 3.є однаковим

30. На підлозі стоїть на легких колесах дошка. Людина, що стоїть на одному кінці дошки, переходить на другий її кінець. При цьому відносно підлоги центр мас системи

1. не змінює свого положення
2. зміщується у напрямку руху людини
3. зміщується у напрямку, протилежному руху людини

31. Під дією сили F=20 Н тіло рухається за законом $s = (6 - 3t + t^2)$м. Маса тіла дорівнює

1. 20кг 2. 10кг 3. 2кг 4. 5кг

32. Тіло масою m=0,5 кг рухається прямолінійно за законом $x = (5 - 2t^3)$м. Сила, яка діє на тіло наприкінці першої секунди, дорівнює

1. -6 Н 2. 12 Н 3. –12 Н 4. -3 Н

33. Матеріальна точка маси m=100 г рухається прямолінійно за законом $x = (3 + 0,05t^3)$м. У момент часу $t = 2$с імпульс точки дорівнює

1. 0, 06 $кг \cdot м/с$ 2. 0, 03 $кг \cdot м/с$ 3. 0, 6 $кг \cdot м/с$ 4. 0, 15 $кг \cdot м/с$

34. За будь-який проміжок часу протягом 0,1с модуль імпульсу тіла зростає на 6 $кг \cdot м/с$. При цьому модуль рівнодійної усіх сил, що діють на тіло, дорівнює

1. 0,6 Н 2. 6 Н 3. 60 Н 4. 0,06 Н

35. Тіло кинуте зі швидкістю 20 м/с під кутом 60^0 до горизонту. Відношення модуля імпульсу тіла у початковий момент до модуля імпульсу у верхній точці траєкторії становить

1. 1 2. 1,3 3. 1,7 4. 2

36. Гальмівний шлях автомобіля , який рухається із швидкістю 60 км/год., складає 10м. При швидкості руху 90 км/год. гальмівний шлях автомобіля становитиме

1. 15м 2. 20м 3. 22,5м 4. 45м

37. Швидкість руху тіла масою 0,5кг змінюється за законом $v = (5 + 3t^2)$м/с. Сила, що діє на тіло у момент часу t = 2 с, дорівнює

1. 3 Н 2. 6 Н 3. 9 Н 4. 12 Н

Розділ 3. Закони збереження у механіці.

Тема: Закон збереження імпульсу. Механічна робота. Потужність. Кінетична енергія, зв'язок із роботою. Консервативні сили і потенціальна енергія. Закон збереження енергії у механіці. Закони збереження при абсолютно пружному та абсолютно непружному ударах.

Закони збереження у механіці є фундаментальними законами природи, які відображують основні властивості простору і часу, а саме – однорідність і ізотропність простору (закони збереження імпульсу і моменту імпульсу), однорідність часу (закон збереження енергії). Ці закони можна визначити шляхом інтегрування динамічних рівнянь, тому їх називають першими інтегралами руху. Використання законів збереження дозволяє спростити отримання інформації про кінцевий стан системи за початковими характеристиками стану без розгляду фізичних процесів, які відбуваються між ними.

Основні поняття і формули

- Імпульсом або кількістю руху тіла називають величину $\vec{p} = m\vec{v}$.
- Для замкнутої системи тіл виконується **закон збереження імпульсу**: повний імпульс замкнутої системи тіл є величина стала, тобто

$$\sum_{j=1}^{m} \vec{F}_j^{(e)} = 0; \quad \vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \text{const}, \tag{3.1}$$

де $\sum_{j=1}^{m} \vec{F}_j^{(e)}$ – рівнодійна усіх зовнішніх сил, n – кількість тіл системи.

- З використанням поняття центра мас системи тіл закон збереження імпульсу записується у такій формі:

$$\sum_{j=1}^{r} \vec{F}_j^{(e)} = 0; \qquad M\vec{v}_c = \text{const}, \tag{3.2}$$

де M – сумарна маса системи, $\vec{v}_c$ – швидкість центра мас.

- Закон збереження імпульсу дозволяє отримати рівняння динаміки у випадку, коли маса системи змінюється в процесі руху (рівняння Мещерського):

$$m\frac{dv}{dt} = F - \mu u, \tag{3.3}$$

де m – змінна маса системи, $\mu = \frac{dm}{dt}$ – швидкість зміни маси, u – відносна швидкість частин, які відділяються або приєднуються до тіла змінної маси, μu – реактивна сила.

● Елементарна робота визначається скалярним добутком сили $\vec{F}$ на переміщення $d\vec{r}$:

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = Fdr\cos\left(\vec{F},\hat{}\, d\vec{r}\right) = F_s ds, \qquad (3.4)$$

де ds – модуль елементарного переміщення $d\vec{r}$, $F_s = F\cos\alpha$ – проекція сили на напрям елементарного переміщення,

● Роботу змінної сили на шляху s можна визначити інтегруванням виразу для елементарної роботи

$$A = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r} = \int_s F_s ds. \qquad (3.5)$$

У випадку постійної сили, що діє під кутом α до переміщення, вираз (3.5) спрощується:

$$A = Fs\cos\alpha. \qquad (3.5a)$$

● Миттєва потужність характеризує швидкість виконання роботи:

$$P = \frac{dA}{dt} = \vec{F}\vec{v} = Fv\cos\alpha, \qquad (3.6)$$

де α – кут між векторами сили і швидкості.

● Кінетична енергія тіла є скалярною мірою його кількості руху. Кінетична енергія тіла маси m при поступальному русі із швидкістю $\vec{v}$ дорівнює:

$$W_k = \frac{mv^2}{2}. \qquad (3.7)$$

Кінетична енергія – суттєво додатна адитивна величина, а її значення залежить від вибору системи відліку, оскільки відносною величиною є швидкість руху тіла.

Приріст кінетичної енергії тіла (теорема про кінетичну енергію)

$$W_{k2} - W_{k1} = A, \qquad (3.8)$$

де A – **робота** рівнодійної **всіх сил**, що діють на частинку.

● **Консервативні сили** – сили, робота яких не залежить від форми шляху, а визначається тільки початковою і кінцевою конфігурацією тіл системи (сили гравітаційної взаємодії, сила пружності, кулонівська сила).

● Робота консервативної сили вздовж замкненої траєкторії дорівнює нулю:

$$\oint_{(L)} \vec{F}d\vec{r} = 0,$$

де $\oint_{(L)}$ – криволінійний інтеграл уздовж замкненої кривої L, яка співпадає з траєкторією.

● У випадку дії консервативних сил стан системи можна охарактеризувати потенціальною енергією.

Потенціальна енергія системи в деякому стані дорівнює роботі консервативних сил з переведенню системи із зазначеного стану на нульовий рівень (початок відліку):

$$W_{p1} = A_{10}\,. \qquad (3.9)$$

Зв'язок між роботою консервативних сил і потенціальною енергією системи (тіла) у початковому та кінцевому станах

$$A = -\left(W_{p2} - W_{p1}\right) = W_{p1} - W_{p2}\,. \qquad (3.10)$$

● Зв'язок між консервативною силою і потенціальною енергією має вигляд:

$$\vec{F} = -\mathrm{grad}W_p\,, \qquad (3.11)$$

де $\mathrm{grad}W_p \equiv \nabla W_p = \frac{\partial W_p}{\partial x} + \frac{\partial W_p}{\partial y} + \frac{\partial W_p}{\partial z}$ – градієнт потенціальної енергії.

Знак «–» у формулі (1.32) вказує на те, що вектор сили завжди має напрям, протилежний напряму найшвидшого збільшення потенціальної енергії у просторі.

● Потенціальна енергія тіла в однорідному полі сили тяжіння Землі

$$W_p = mgh\,, \qquad (3.12)$$

де g – прискорення вільного падіння, h– відстань між тілом і поверхнею Землі. За початок відліку потенціальної енергії, тобто її нульовий рівень, взята поверхня Землі.

● Потенціальна енергія гравітаційної взаємодії двох тіл

$$W_p = -G\frac{m_1 m_2}{r}\,, \qquad (3.13)$$

знак „–" відповідає тому, що потенціальна енергія двох взаємодіючих тіл дорівнює нулю при $r = \infty$ і зменшується при їх наближенні (тобто за початок відліку взята потенціальна енергія $W_{p_0} = 0$ при $r = \infty$.

● Потенціальна енергія при пружній деформації тіла (пружини)

$$W_p = \frac{kx^2}{2}\,. \qquad (3.14)$$

● **Закон збереження механічної енергії** для консервативної системи: повна механічна енергія замкненої системи, в якій діють тільки консервативні сили, є величина стала.

$$W_k + W_p = \mathrm{const}\,.$$

Повною механічною енергією називають суму кінетичної і потенціальної енергій.

● Зміна повної механічної енергії системи дорівнює сумі роботи внутрішніх дисипативних сил, що діють у системі, та роботи всіх зовнішніх сил, які діють на систему

$$\Delta W = W_2 - W_1 = A_{12}^{\text{дис}} + A_{12}^{\text{зовн}}\,. \qquad (3.15)$$

Дисипативні сили – це сили, повна робота яких у системі завжди є від'ємною величиною (сила тертя, сила опору середовища).

● Застосування законів збереження енергії і імпульсу до прямого центрального удару двох тіл.

Удар називають прямим, якщо швидкості тіл до удару паралельні лінії удару. Удар – центральний, якщо лінія удару проходить через центри тяжіння тіл. (Лінія удару – спільна нормаль до поверхні тіл в точці їх дотику при ударі.)

1. При **абсолютно непружному ударі** деформації, що виниклі в тілах в момент удару, після удару повністю зберігаються. Виконується закон збереження імпульсу. Частина механічної енергії системи переходить у внутрішню.

а) Після абсолютно непружного удару тіла рухаються як єдине ціле зі швидкістю

$$v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \qquad (3.16)$$

де m_1 і m_2 – маси тіл, v_1 і v_2 – проекції швидкостей тіл на вибраний напрямок, який збігається з напрямом руху одного з тіл до удару.

б) Робота (приріст внутрішньої енергії) при ударі абсолютно непружних тіл дорівнює втраті кінетичної енергії:

$$A = -\Delta W_k = \left(W_{k1} + W_{k2}\right) - W_k, \qquad (3.17)$$

де $\left(W_{k1} + W_{k2}\right) = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}$ – кінетична енергія тіл перед непружним ударом; $W_k = \frac{\left(m_1 + m_2\right) v'^2}{2}$ – кінетична енергія цієї системи після удару.

2. **Абсолютно пружний удар** – удар, після якого тіла повністю відновлюють свою початкову форму та розміри.

При абсолютно пружному ударі зберігаються імпульс і кінетична енергія системи. Проекції швидкості тіл після удару на виділений напрямок, який збігається з напрямом руху одного з тіл до удару:

$$v_1' = -v_1 + 2\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}; \qquad v_2' = -v_2 + 2\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \qquad (3.18)$$

3. Можуть виконуватися також частково пружні (непружні) зіткнення. Коли зіткнення не можна віднести до абсолютно пружного (або абсолютно непружного) удару, швидкості після зіткнення можна знайти за формулами:

$$v_1' = v_1 + \left(1 + e\right)\frac{m_2}{m_1 + m_2}\left(v_2 - v_1\right);$$

$$v_2' = v_2 + \left(1 + e\right)\frac{m_1}{m_1 + m_2}\left(v_1 - v_2\right),$$

де e – коефіцієнт непружних втрат (e =1 у випадку абсолютно пружного удару; e = 0, якщо зіткнення абсолютно непружне).

3.1. Закон збереження імпульсу.

Методичні вказівки. Використання при розв'язуванні задач закону збереження імпульсу, який дозволяє зв'язати початкове і кінцеве значення імпульсу замкненої системи, дає можливість виключити із розгляду внутрішні сили, що діють між частинами системи. Це особливо важливо у тих випадках, коли взаємодії між тілами носять складний характер або взагалі невідомі, як це, наприклад, відбувається при зіткненні тіл.

При розв'язуванні задач за допомогою закону збереження імпульсу необхідно:

1) дослідити, чи є система тіл замкненою (або чи існує напрямок, на якому проекція зовнішніх сил, що діють на систему, дорівнює нулю). У останньому випадку проекція імпульсу системи на цей напрямок зберігається.

Зауважимо, що у випадку, коли у системі, на яку діють зовнішні сили (наприклад, сила тяжіння) , відбуваються процеси, що призводять до швидкої зміни імпульсу за короткий час (удар, вибух), то зміною імпульсу за рахунок дії цих зовнішніх сил можна знехтувати і вважати імпульс незмінним.

2) рух усіх тіл слід розглядати в одній і тій же інерціальній системі відліку, оскільки імпульс і кінетична енергія залежать від її вибору.

У неінерціальній системі відліку діють сили інерції, які є зовнішніми відносно даної системи тіл, отже система не є ізольованою, і її повний імпульс і енергія не зберігаються.

Якщо в умові задачі задана відносна швидкість двох частинок, що рухаються вздовж однієї прямої, систему відліку зручно зв'язати з однією з них. Тоді одна з частинок залишається нерухомою, а швидкість другої буде дорівнювати відносній швидкості $v_{відн.}$;

3) систему координат необхідно вибрати так, щоб система тіл була замкнутою хоча б відносно однієї осі, а проекції векторів імпульсу тіл на координатні осі визначалась найпростішим способом (при необхідності зробити рисунок);

4) записати рівняння збереження імпульсу спочатку у векторній формі, а потім у проекціях на координатні осі;

5) якщо кількість невідомих величин перевищує кількість рівнянь, додати до системи відповідні кінематичні або динамічні співвідношення.

Приклади розв’язання задач

Приклад 3.1. На нерухомій воді озера стоїть човен довжиною L= 3м і масою M= 150кг. На кормі човна стоїть хлопчик масою m = 50кг. На яку відстань s відносно берега переміститься човен, якщо людина перейде з корми на ніс човна?

L= 3м
M= 150кг
m = 50кг
s - ?

Розв’язання.

Розглянемо систему відліку, яка пов'язана з берегом. Припустимо для простоти, що людина рухається відносно човна з постійною швидкістю $\vec{u}$. Тоді човен також буде рухатися рівномірно, а його переміщення s відносно берега дорівнює:

$$s = v \cdot t, \qquad (1)$$

де v – швидкість човна відносно берега, t – час руху людини (й човна).

На початку руху людини човен є нерухомим. Закон збереження імпульсу має такий вигляд:

$$M\vec{v} + m(\vec{u} + \vec{v}) = 0,$$

де $(\vec{u} + \vec{v})$- швидкість переміщення людини відносно берега.

У проекції на напрямок руху людини останнє рівняння виглядає як:

$$m(u - v) - Mv = 0.$$

Звідки для швидкості човна отримуємо $v = \dfrac{mu}{m + M}$. (2)

Час руху човна дорівнює часу руху людини вздовж човна, тобто

$$t = \frac{L}{u}. \qquad (3)$$

Підставляємо отримані для v і t вирази (2) і (3) у формулу (1) і знаходимо переміщення човна.

$$s = \frac{mu}{m + M} \cdot \frac{L}{u} = \frac{m}{m + M} \cdot L. \qquad (4)$$

Чисельні розрахунки за формулою (4) дають значення s = 0,75м.

Зауважимо, що задачу можна розв’язати також за допомогою теореми про рух центра мас (див. приклад 2.10, розд.2).

Відповідь: s = 0,75м.

Приклад 3.2. Снаряд, випущений з гармати під кутом α=30º до горизонту із швидкістю v_0=200 м/с, у верхній точці траєкторії внаслідок вибуху розірвався на два осколки, маси яких відносяться як 1:3. Швидкість меншого осколка v_1=40м/с і спрямована вертикально уверх. Визначити модуль і напрям швидкості $\vec{v}_2$ другого осколка. Опором повітря в момент розриву знехтувати.

$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}$
v_0=200 м/с
α=30º
v_1=40м/с
β=90º

v_2 ; γ – ?

Розв'язання.

Розглянемо фізичну систему, яка містить снаряд і ядро. Земля і повітря по відношенню до виділеної системи – зовнішні тіла. Система, таким чином, незамкнена. Але законом збереження імпульсу можна наближено скористатися в момент розриву, коли сила тяжіння за досить короткий проміжок часу не встигає змінити імпульс.

Систему відліку зв'яжемо з землею і будемо вважати інерціальною, осі координат вибираємо вздовж горизонтального і вертикального напрямків (рис.3.1).

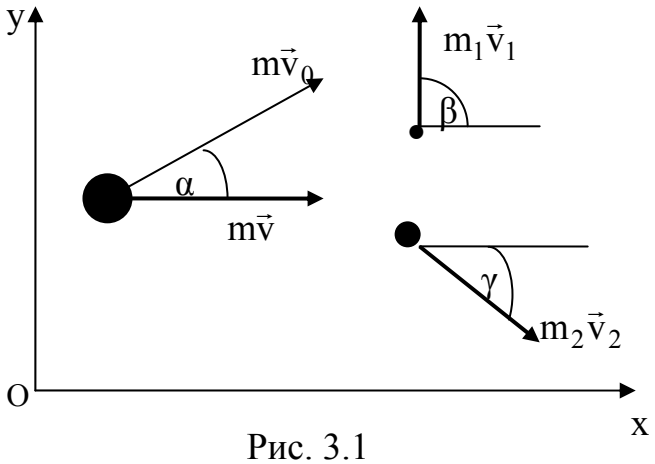


Рис. 3.1

Виділимо два моменти часу: початок і кінець вибуху. Імпульс фізичної системи безпосередньо перед вибухом дорівнює $\vec{p} = m\vec{v}$ і спрямований горизонтально, оскільки вибух відбувся у верхній точці траєкторії, де вертикальна складова швидкості снаряда дорівнює нулю. Кінцевий імпульс $\vec{p}' = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$. Згідно закону збереження імпульсу $\vec{p} = \vec{p}'$, або $m\vec{v} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$. (1)

У проекціях на координатні осі з урахуванням того, що у верхній точці траєкторії $v = v_0 \cos\alpha$, отримуємо

$$mv_0 \cos\alpha = m_2 v_2 \cos\gamma;$$
$$0 = m_1 v_1 - m_2 v_2 \sin\gamma.$$

Звідки маємо

$$v_2 = \frac{\sqrt{m_1^2 v_1^2 + m^2 v_0^2 \cos^2\alpha}}{m_2}; \quad (2) \qquad \mathrm{tg}\gamma = \frac{m_1 v_1}{m v_0 \cos\alpha}. \quad (3)$$

Якщо виразити маси осколків m_1 і m_2 через масу снаряду m ($m_1 = \frac{1}{4}m$; $m_2 = \frac{3}{4}m$), вирази (2) і (3) для v_2 і tg γ набувають такого вигляду:

$$v_2 = \frac{1}{3}\sqrt{v_1^2 + 16 v_0^2 \cos^2\alpha}; \quad (4)$$

$$\mathrm{tg}\gamma = \frac{v_1}{4 v_0 \cos\alpha}. \quad (5)$$

Чисельний розрахунок за формулами (4) і (5) дає v_2 = 349 м/с; $\mathrm{tg}\gamma = 0{,}115$.

Відповідь: v_2 = 349 м/с; γ=6,6º.

Приклад 3.3. Маса метеорологічної ракети в момент запуску m_0=0,30кг, маса пального заряду в ній $m_з$=0,20кг. Швидкість виходу продуктів згорання відносно ракети u=30 м/с. Кожну секунду ракета здійснює викид речовини масою μ=60г/с. Знайти швидкість ракети в момент повного згорання пального заряду. Опором повітря та зміною сили тяжіння з висотою знехтувати.

m_0=0,30кг
$m_з$=0,20 кг
u=30 м/с
μ=0,06кг/с

v - ?

Розв'язання.

1. Шукаємо розв'язок задачі у припущенні, що на ракету діє лише реактивна сила μu, тобто силою тяжіння нехтуємо. Для розв'язання задачі скористуємося рівнянням динаміки руху тіла змінної маси (рівнянням Мещерського), яке за відсутності дії зовнішніх сил виглядає як $m\frac{dv}{dt} = -\mu u$.

Ураховуючи, що швидкість зміни маси $\mu = \frac{dm}{dt}$, попереднє рівняння набирає вигляду $mdv = -udm$, і, відповідно, $\frac{dv}{u} = -\frac{dm}{m}$. Інтегруючи ліву частину останнього рівняння від нуля до кінцевої швидкості v, а праву – від m_0 до маси ракети після вигорання запалу, яка дорівнює $m_к=m_0 - m_з$:

$$\frac{1}{u}\int_0^v dv = -\int_{m_0}^{m_к} \frac{dm}{m},$$

отримуємо $v = u\ln\frac{m_0}{m_к}$. Підстановка чисельних даних у формулу дає $v = 30\ln\frac{0,30}{0,10} = 33$ м/с.

2. Знайдемо швидкість ракети, враховуючи дію силу тяжіння на ракету в процесі руху.

Рівняння руху ракети в цьому випадку набуває вигляду:

$$m\frac{dv}{dt} = -\mu u - mg.$$

Переписуючи його у тотожній формі $m\frac{d}{dt}(v + gt) = -\frac{dm}{dt}u$ або $d(v + gt) = -\frac{dm}{m}u$ та інтегруючи останнє рівняння у границях, що характеризують початковий і кінцевий стани, отримуємо: $v + gt = u\ln\frac{m_0}{m_к}$,

де час вигорання запалу $t = \frac{m_з}{\mu}$.

Остаточно знаходимо $v = u \ln \frac{m_0}{m_к} - \frac{m_з}{\mu} g$.

Чисельний розрахунок дає v =0,33 м/с.

Отже, урахування сили тяжіння суттєво вплинуло на отриманий результат, і її урахування є обов'язковим при розв'язуванні подібної задачі.

3.2. Закон збереження та зміни механічної енергії.

Методичні вказівки. Використання закону збереження механічної енергії спрощує розв'язання задач, у яких розглядається два стани системи взаємодіючих між собою тіл, і дозволяє не розглядати діючі між тілами сили.

Перш, ніж скористатися законом збереження та перетворення енергії, необхідно:

− визначити початковий і кінцевий стан системи;

− визначити, чи є система тіл замкнутою, які сили є зовнішніми, а які внутрішніми;

− з'ясувати характер внутрішніх сил – які з них консервативні, які ні;

− вибрати нульовий рівень відліку потенціальної енергії. Зазвичай нульовий рівень зв'язують з найменшим значенням потенціальної енергії. Наприклад, у полі тяжіння – це найнижче положення тіла, яке рухається.

Зауважимо, що при розв'язанні задач про рух тіла у полі тяжіння Землі, ізольованою системою, до якої можна застосовувати закон збереження енергії, виступає система "тіло + Земля". Але, оскільки кінетична енергія, яку отримують тіла внаслідок взаємодії, обернено пропорційна масам тіл, зміною енергії Землі при її взаємодії з падаючим тілом, можна знехтувати і розглядати тільки зміну потенціальної і кінетичної енергії тіла.

Якщо при переході системи тіл із початкового в кінцевий стан у системі діяли сили тертя (окрім сили тертя спокою) або на неї діяли зовнішні сили і сили непружних деформацій, то механічна енергія не зберігається. У цьому випадку для розв'язання задачі зручно скористатися теоремою про кінетичну енергію.

Розв'язування великої групи задач потребує одночасного використання закону збереження імпульсу і закону збереження або зміни механічної енергії. Це, перш за все, задачі про пружний або непружний удар, до яких зводяться задачі про зіткнення або розпад тіл. Оскільки енергія – скалярна величина, а імпульс – векторна , то рівняння закону збереження імпульсу при цьому найчастіше записують у проекціях на координатні осі, обираючи систему координат найзручнішим способом.

У випадках, коли кількість рівнянь, записаних за законами збереження недостатня для визначення усіх невідомих величин, систему рівнянь слід доповнити основним рівнянням динаміки та необхідними кінематичними рівняннями.

Приклади розв'язання задач

Приклад 3.4. Велосипедист повинен проїхати по замкненому колу радіуса R=3м. З якої висоти (див. рис.3.2) він має скотитися, щоб не зірватися в процесі руху? Тертям знехтувати.

R=3м

h - ?

Розв'язання.

На тіло у верхній точці кола діють дві сили, які спрямовані вертикально донизу: сила тяжіння $\vec{F}_T = m\vec{g}$ і реакція опори $\vec{N}$. Вони надають тілу нормальне (доцентрове) прискорення:

$$a_n = \frac{mv^2}{R}.$$

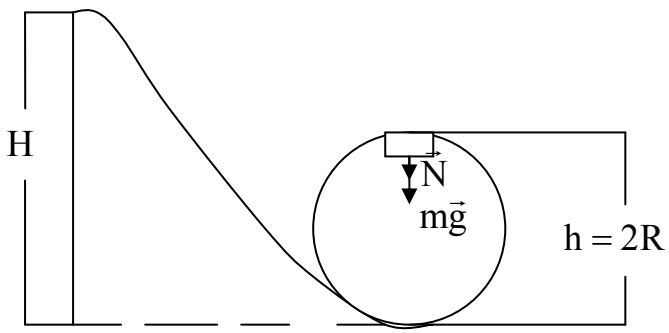


Рис.3.2

За другим законом Ньютона $m\vec{a}_n = m\vec{g} + \vec{N}$.

У проекції на напрямок прискорення, з урахуванням виразу для нього, отримуємо $\frac{mv^2}{R} = mg + N$. Таким чином, щоб не впасти, велосипедист повинен мати швидкість, при якій задовольняється умова $\frac{mv^2}{R} \geq mg$, або

$$mv^2 \geq mgR. \qquad (1)$$

Необхідної швидкості велосипедист набуває, скотившись із гірки висотою H. За законом збереження механічної енергії його повна енергія W_1 на початку руху дорівнює повній енергії W_2 у верхній точці кола.

$$W_1 = mgH; \qquad W_2 = mgh + \frac{mv^2}{2} = mg \cdot 2R + \frac{mv^2}{2}.$$

Користуючись критерієм (1), отримуємо:

$$mgH \geq mg \cdot 2R + \frac{1}{2}mgR = \frac{5}{2}mgR.$$

Звідки, остаточно, маємо $H \geq= \frac{5}{2}R$.

Відповідь: $H \geq 7{,}5$ м.

Приклад 3.5. Гиря, покладена на верхній кінець пружини, стискає її на x_0=1,0мм. Наскільки стисне пружину та сама гиря, якщо її кинути з висоти h=0,3м зі швидкістю v=1,0м/с?

$x_0=1{,}0\cdot10^{-3}$м h=0,3м v=1,0м/с	Розв'язання.
x - ?	

Величина деформації пружини x визначає потенціальну енергію пружини, тому для розв'язання задачі скористуємося законом збереження енергії. Оскільки на гирю діє сила тяжіння, розглядаємо замкнену систему „пружина - гиря - Земля “. За відсутністю дії сили тертя повна механічна енергія цієї системи буде зберігатися.

У початковому стані енергія системи W_1 складається з потенціальної і кінетичної енергії гирі. Якщо вибрати за початок відліку висоти найнижче положення гирі, яке відповідає стиснутій пружині (рис.3.3), то

$$W_1 = mg(h + x) + \frac{mv^2}{2}. \qquad (1)$$

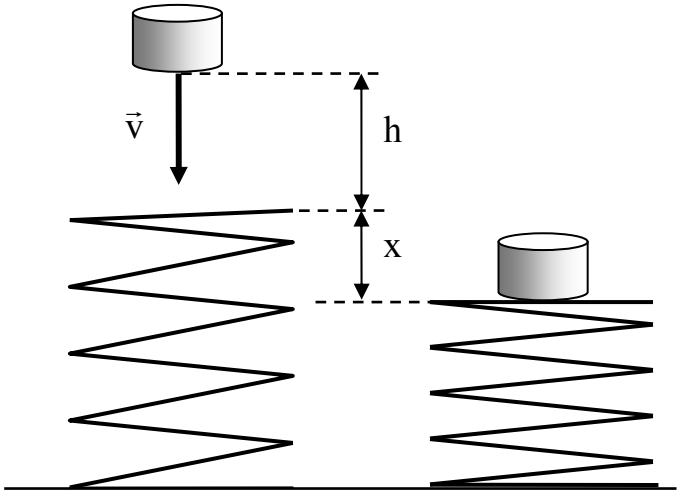


Рис. 3.3.

У кінцевому стані гиря зупиняється, і енергія системи W_2 – енергія деформованої пружини, дорівнює

$$W_2 = \frac{kx^2}{2}, \qquad (2)$$

де коефіцієнт пружності k визначається за допомогою співвідношення $kx_0 = mg$:

$$k = \frac{mg}{x_0}. \qquad (3)$$

Враховуючи закон збереження енергії, прирівнюємо праві частини виразів (1) і (2). З урахуванням (3) для коефіцієнта пружності отримуємо квадратне рівняння відносно x:

$$x^2 - 2gx_0x - \left(2gx_0h + v^2x_0\right) = 0.$$

Його розв'язок має вигляд:

$$x_{1,2} = gx_0 \pm \sqrt{g^2x_0^2 + 2gx_0h + v^2x_0}. \qquad (4)$$

Від'ємний корінь рівняння (4) відповідає розтягненню пружини і таким чином не задовольняє умову задачі. Чисельний розрахунок дає $x=9{,}3\cdot10^{-2}$м.

Відповідь: $x=9{,}3\cdot10^{-2}$м.

Приклад 3.6. Ланцюжок довжиною L = 1,8м лежить на столі так, що один його кінець звисає зі столу. Якщо довжина частини, яка звисає, перевищує $L_0 = \frac{1}{3}L$, ланцюжок зісковзує зі столу. Визначити швидкість ланцюжка v в момент його відриву від столу.

Розв'язання.

L = 1,8м
$L_0 = \frac{1}{3}L$
v - ?

1. Ланцюжок, стіл і Земля утворюють замкнену систему, в якій окрім сили тертя діють консервативні сили - сили тяжіння та сили реакції опори (пружні сили). Сила тертя – дисипативна сила, яка приводить до дисипації (втрат) механічної енергії. Тому рівняння балансу енергії системи набуває вигляду:

$$\Delta W = \Delta W_p + \Delta W_k = A^{дис.} \qquad (1)$$

З урахуванням того, що початкова швидкість ланцюжка $v_0 = 0$, зміна кінетичної енергії складає:

$$\Delta W_k = W_k - W_{k0} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2}.$$

Масу одиниці довжини ланцюжка означимо через ρ_l. Тоді маса ділянки ланцюжка довжиною l складає $\rho_l l$, а повна маса дорівнює $\rho_l L$. Звідси

$$\Delta W_k = \frac{\rho_l L v^2}{2}. \qquad (2)$$

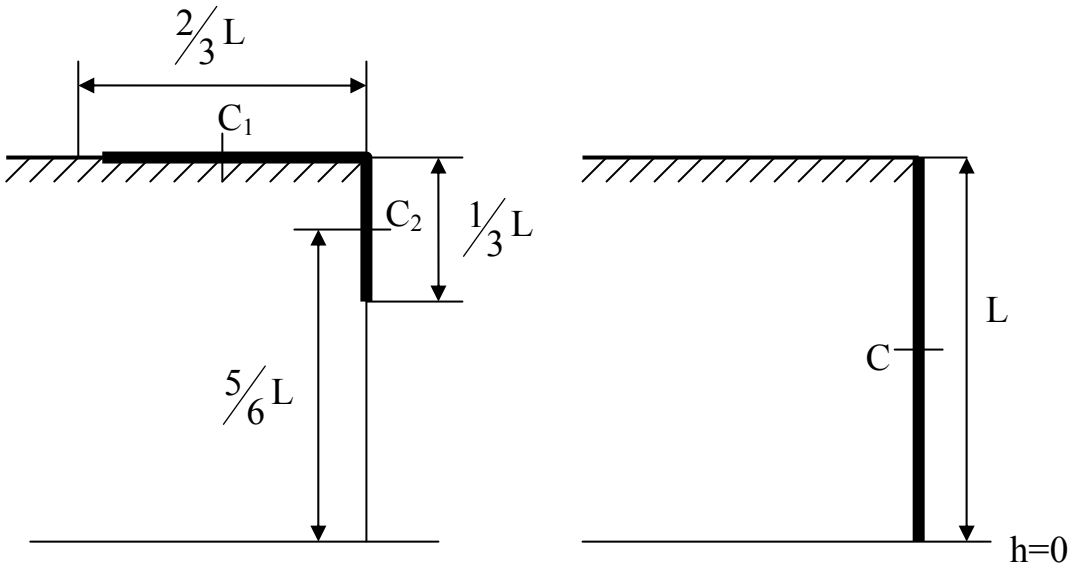


Рис. 3.4,а Рис. 3.4,б

Визначимо зміну потенціальної енергії ланцюжка $\Delta W_p = W_p - W_{p0}$. За початок відліку беремо рівень, на якому знаходиться нижній кінець ланцюжка в момент відриву від столу.

Потенціальна енергія ланцюжка в момент початку руху складається з двох доданків – потенціальної енергії частини довжиною $\frac{2}{3}L$, яка лежить на столі (її центр мас C_1 знаходиться на висоті $h_{10}= L$), і потенціальної енергії частини довжиною $\frac{1}{3}L$, що звисає зі столу (висота знаходження її центра мас C_2 дорівнює $h_{20} = \frac{5}{6}L$) (див. рис. 3.4,а). Користуючись формулою для визначення потенціальної енергії тіла у полі тяжіння Землі $W_p = mgh$ отримуємо:

$$W_{p0} = \frac{2}{3}\rho_1 L^2 g + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{3}\rho_1 L^2 g = \frac{17}{18}\rho_1 L^2 g. \qquad (3)$$

Потенціальна енергія ланцюжка в момент відриву від столу (див. рис.3.4,б):

$$W_p = \frac{1}{2}\rho_1 L^2 g. \qquad (4)$$

Отже, зміна потенціальної енергії ланцюжка має наступний вигляд:

$$\Delta W_p = W_{p2} - W_{p_1} = \frac{1}{2}\rho_1 l^2 g - \frac{17}{18}\rho_1 l^2 g = -\frac{4}{9}\rho_1 l^2 g. \qquad (5)$$

Робота дисипативної сили – це робота сили тертя, яка змінюється в процесі руху, бо діє тільки на частину ланцюжка, яка рухається вздовж столу (рис.3.5). Якщо позначити довжину частини ланцюжка, що звисає зі столу, у деякий довільний момент руху через x, то сила тертя буде діяти лише на його частину довжиною (L–x). За формулою $F_{тер.} = \mu N = \mu mg$ з урахуванням того, що маса частини ланцюжка, яка лежить на столі, дорівнює $\rho_1(L - x)$, сила тертя дорівнюватиме $F_{тер.} = \mu\rho_1(L - x)g$.

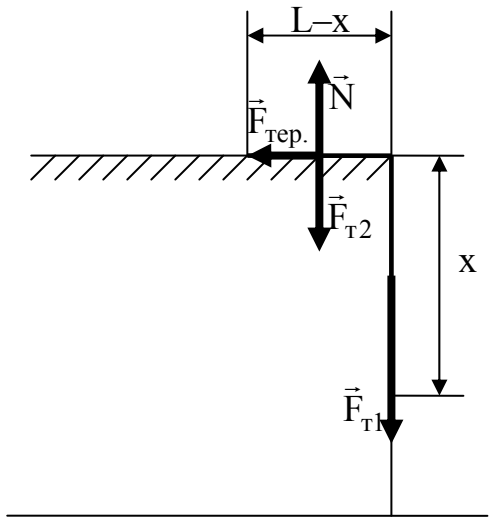


Рис. 3.5

Елементарна робота, яка виконується цією силою, на переміщенні dx є від'ємною величиною, оскільки сила утворює з напрямом переміщення кут 180º, і дорівнює:

$$dA = -F_{тер.}dx = -\mu\rho_1 g(L - x)dx. \qquad (6)$$

Повну роботу визначаємо шляхом інтегрування співвідношення (6) за змінною x у межах від початкового значення $x_1 = \frac{1}{3}L$ до кінцевого $x_2 = L$:

$$A_{тер.} = -\mu\rho_1 g \int_{1/3 L}^{L} (L - x)dx = -\mu\rho_1 g \left(\left(Lx\Big|_{1/3 L}^{L} \right) - \frac{x^2}{2}\Bigg|_{1/3 L}^{L} \right) = \tag{7}$$

$$= -\mu\rho_1 g \left(\frac{2}{3}L^2 - \frac{4}{9}L^2 \right) = -\frac{2}{9}\mu\rho_1 g L^2.$$

З урахуванням (2), (5), (7) рівняння балансу енергії (1) набере вигляд:

$$\frac{\rho_1 L v^2}{2} - \frac{4}{9}\rho_1 g L^2 = -\frac{2}{9}\mu\rho_1 g L.$$

Після скорочення на ρ_l отримуємо для v:

$$v = \frac{2}{3}\sqrt{gL(2 - \mu)}. \tag{8}$$

Значення коефіцієнта тертя μ знаходимо, користуючись умовою початку руху ланцюжка, з якої випливає, що максимальне значення сили тертя спокою, яка діє на $\frac{2}{3}$ довжини ланцюжка, дорівнює силі тяжіння, що діє на його третину: $\frac{2}{3}\mu\rho_1 g L = \frac{1}{3}\rho_1 g L$. Звідки маємо $\mu = \frac{1}{2}$.

Скористуємося знайденим значенням коефіцієнту тертя для розрахунку за формулою (8) і отримуємо значення для швидкості ланцюжка в момент відриву v = 3,4 м/с.

Зауважимо, що оскільки у даному випадку сила тертя зв'язана з переміщенням лінійним законом, її роботу можна було б визначити, користуючись середнім значенням сили, яке дорівнює

$$\langle F_{тер.} \rangle = \frac{F_{початк.} + F_{кінц.}}{2} = \frac{\frac{2}{3}\mu\rho_1 g L + 0}{2} = \frac{1}{3}\mu\rho_1 g L.$$

Відповідно робота середньої сили тертя на шляху $\frac{2}{3}L$ дорівнює (див. (7)):

$$A_{тер.} = -\frac{1}{3}\mu\rho_1 g L \cdot \frac{2}{3}L = -\frac{2}{9}\mu\rho_1 g L^2.$$

2. Задачу можна також розв'язати за допомогою основного рівняння динаміки, яке в проекції на напрям прискорення тіла має вигляд:

$$m\frac{dv}{dt} = F_{т1} - \mu N = F_{т1} - \mu F_{т2}.$$

Якщо x – довжина частини, що звисає зі столу, а ρ_l - маса одиниці довжини, тоді $m = \rho v L$; $F_{т1} = \rho_1 x g$; $F_{тер.} = \mu\rho_1 (L - x) g$.

Представимо похідну $\frac{dv}{dt}$ у вигляді $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$.

Після підстановки наведених виразів у рівняння динаміки і скорочення на ρ_l отримуємо диференціальне рівняння зі змінними, які розділяються:

$$Lv\frac{dv}{dx} = g[x - \mu(L - x)] = g[x(1+\mu) - \mu L],$$

$$vdv = \frac{g}{L}[x(1+\mu) - \mu L]dx.$$

Після інтегрування отриманого рівняння маємо:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{g}{L}\left[x^2\frac{(1+\mu)}{2} - \mu Lx\right] + C.$$

Константу інтегрування знаходимо, користуючись початковою умовою $v\big|_{x=\frac{L}{3}} = 0$:

$$0 = \frac{g}{L}\left(\frac{L^2}{9}\cdot\frac{1+\mu}{2} - \mu\frac{L^2}{3}\right) + C, \quad \text{звідки маємо:} \quad C = gL\frac{5\mu - 1}{18}.$$

Швидкість при будь-якій довжині x звислої частини ланцюжка дорівнює:

$$v = \sqrt{2g\left(\frac{1+\mu}{L}\cdot\frac{x^2}{2} - \mu x + L\frac{5\mu - 1}{18}\right)}. \qquad (9)$$

Для моменту відриву ланцюжка від столу після підстановки значення $x = L$ в (9) маємо вираз $v = \frac{2}{3}\sqrt{gL(2-\mu)}$, який співпадає із (8).

Приклад 3.7. Молот масою m = 10кг вдаряє по залізному виробу, який лежить на ковадлі. Маса ковадла разом із виробом дорівнює M=120кг. Чому дорівнює к. к. д. процесу кування при заданих умовах?

m = 10кг
M=120кг

η - ?

Розв'язання.

Внаслідок того, що час, за який відбувається удар, є малим, а сили ударної взаємодії тіл навпаки – великими, систему можна вважати замкнутою і для розв'язання задачі скористатися законами збереження енергії і імпульсу.

Коефіцієнт корисної дії системи η визначається відношенням корисної енергії до повної (витраченої) енергії: $\eta = \frac{W_{кор.}}{W_{повн.}}$. (1)

За умов задачі корисна енергія – це енергія, яка витрачається на кування виробу. Вона дорівнює різниці кінетичних енергій системи до і після удару, оскільки зміною потенціальної енергії при незначному переміщенні тіл під час удару можна знехтувати. Отже маємо:

$$W_{кор.} = W_{деф.} = \frac{mv^2}{2} - \frac{(m+M)v'^2}{2}, \qquad (2)$$

де v – швидкість молоту перед ударом, v' - загальна швидкість обох тіл після абсолютно непружного удару. Цю швидкість знаходимо, користуючись законом збереження імпульсу. Враховуючи, що швидкість ковадла перед ударом дорівнювала нулю, рівняння має вигляд: $mv = (m + M)v'$. Звідки отримуємо:

$$v' = \frac{mv}{m + M}. \qquad (3)$$

Підстановка (2) у формулу (1) надає:

$$W_{деф.} = \frac{mv^2}{2} \cdot \frac{M}{m + M}. \qquad (4)$$

Витрачена енергія – це кінетична енергія молоту перед ударом, яка дорівнює

$$W_{повн.} = \frac{mv^2}{2}. \qquad (5)$$

Користуючись (4) і (5), згідно з (1) отримуємо

$$\eta = \frac{M}{m + M}. \qquad (6)$$

Із співвідношення (6) випливає, що к. к. д. процесу кування η тим більший, чим більша маса ковадла порівняно з масою молота.
Чисельний розрахунок за формулою (6) дає η = 0,92.
Відповідь: η = 0,92.

Приклад 3.8. Бойок (ударна частина) молоту для забивання палів масою m=500кг падає на палю масою M=120кг. Чому дорівнює к. к. д. процесу забивання палі при заданих умовах?

m = 500кг M=120кг	Розв’язання. Аналогічно попередньому аналізу (див. приклад 3.7), систему можна вважати замкнутою і для розв’язання задачі скористатися законами збереження енергії і імпульсу. Але, на відміну від попередньої задачі, корисною слід вважати кінетичну енергію W'_k руху бойка і палі, витрачену на заглиблення палі у ґрунт.
η - ?	

Оскільки удар абсолютно непружний, бойок і паля після удару рухаються як єдине ціле з однаковою швидкістю. Внаслідок опору ґрунту ця швидкість швидко гаситься, а кінетична енергія витрачається на заглиблення палі. Отже, коефіцієнт корисної дії η дорівнюватиме відношенню кінетичної енергії W'_k системи після удару до кінетичної енергії бойка перед ударом W_k, яка є витраченою (повною) енергією:

$$\eta = \frac{W_{кор.}}{W_{повн.}} = \frac{W'_k}{W_k}. \qquad (1)$$

Кінетична енергії бойка до удару дорівнює

$$W_k = \frac{mv^2}{2}, \qquad (2)$$

де v – швидкість бойка перед ударом.

Швидкість бойка і палі після удару знаходимо, користуючись законом збереження імпульсу $mv = (m + M)v'$, з якого отримуємо $v' = \frac{mv}{m + M}$. Кінетична енергія W'_k дорівнює:

$$W_{кор.} = W'_k = \frac{(m + M)v'^2}{2} = \frac{m^2 v^2}{2(m + M)}. \qquad (3)$$

Підставляємо (2) і (3) в (1), після скорочення отримуємо:

$$\eta = \frac{m}{m + M}. \qquad (4)$$

З формули (4) можна зробити висновок, що к. к. д. процесу забивання палі тим більший, чим більша маса бойка m порівняно з масою палі M.
Розрахунок за наведеними в умові задачі даними дає η = 0,81.
Відповідь: η = 0,81.

Приклад 3.9. Кулька масою m, рухаючись зі швидкістю v, налітає на нерухому кульку масою $\frac{m}{2}$. Після пружного удару перша кулька продовжує рухатися під кутом α = 30º до напрямку початкової швидкості. Знайти швидкості кульок після удару.

$m_1 = m$
$m_2 = \frac{m}{2}$
$v_1 = v$
$v_2 = 0$
$\alpha = 30^o$

v'_1-?
v'_2-?

Розв'язання.

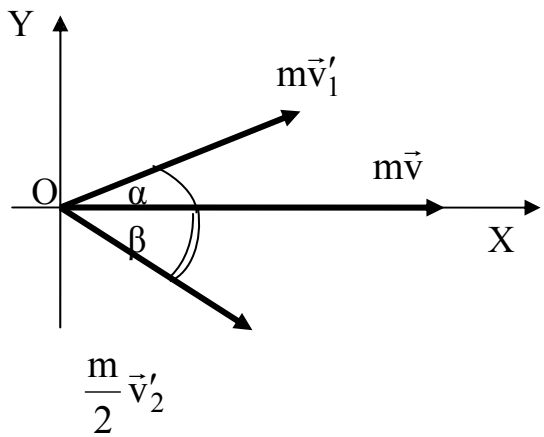


Рис.3.6

Удар абсолютно пружний. Система замкнута. Для розв'язання задачі можна скористатися законами збереження енергії і імпульсу:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv'^2_1}{2} + \frac{m}{2} \cdot \frac{v'^2_2}{2}; \quad (1)$$

$$m\vec{v} = m\vec{v}'_1 + \frac{m}{2}\vec{v}'_2. \qquad (2)$$

Знаходимо проекції рівняння (2) на координатні осі, які вибрані таким чином, що вісь OX спрямована вздовж імпульсу $m\vec{v}$ (див. рис. 3.6). Проекції рівняння (2) мають вигляд:

$$mv = mv_1' \cos\alpha + \frac{m}{2} v_2' \cos\beta; \qquad (3)$$

$$0 = mv_1' \sin\alpha - \frac{m}{2} v_2' \sin\beta. \qquad (4)$$

Рівняння (1), (3), (4) утворюють систему трьох рівнянь з трьома невідомими. Розв'язання цієї системи (з урахуванням значення кута $\alpha = 30°$) приводить до квадратного рівняння

$$3v_1' - 2\sqrt{3}vv_1' + v^2 = 0,$$

з якого визначаємо v_1', за значенням якого знаходимо v_2':

$$v_1' = \frac{\sqrt{3}}{3} v; \qquad v_2' = \frac{2\sqrt{3}}{3} v.$$

Задачі для самостійного розв'язування.

3.1. Візок масою $m_1 = 15$кг рухається із швидкістю $v_1 = 5$ м/с. З нього під кутом $\alpha = 30^0$ до горизонту в напрямку руху зістрибує людина масою $m = 65$ кг. Яку швидкість має людина в момент стрибка, якщо швидкість візка внаслідок стрибка зменшилась до $v_1^{/} = 4$ м/с?

3.2. Снаряд масою m = 12кг розірвався на два осколки в верхній точці траєкторії. Швидкість снаряда в цей момент v = 240 м/с. Менший осколок масою m_1= 4кг полетів уперед під кутом α=30° до горизонту зі швидкістю v_1=360 м/с. З якою швидкістю і в якому напрямку полетіла більша частина снаряда?

3.3. Нейтрон зіткнувся з атомом кисню. Маса атома кисню у 16 разів перевищує масу нейтрона (m_0=16m_n). У скільки разів зменшилась кінетична енергія нейтрона при зіткненні, якщо удар є центральним і абсолютно пружним?

3.4. Куля масою m_1 =1кг при зіткненні з кулею більшої маси відскочила від неї, втративши 30% своєї кінетичної енергії. Визначити масу більшої кулі. Удар вважати центральним, абсолютно пружним.

3.5. В човні масою $m_1 = 150$ кг, який рухається зі швидкістю v = 2м/с, стоїть хлопчик масою m_2= 50кг. Хлопчик зістрибує в горизонтальному напрямку з швидкістю v_2 = 4м/с (відносно човна). Визначити швидкість човна v_1 після стрибка хлопчика: а) в напрямку руху човна; б) в протилежному напрямку.

3.6. З гармати, яка закріплена на залізничній платформі, вистрілили вздовж полотна залізничної дороги під кутом α = 45° до горизонту. Визначити швидкість v_1, з якою відкочується платформа, якщо швидкість снаряда при

пострілі v_2 = 500 м/с. Маса платформи з гарматою та снарядом m_1 = 15 т, маса снаряда m_2 = 60кг.

3.7. Визначити імпульс $\vec{p}$, отриманий стінкою при зіткненні з нею молекули кисню масою $m_0 = 5{,}32 \cdot 10^{-26}$ кг. Молекула рухалась із швидкістю v=500 м/с під кутом α=60° до стінки. Удар вважати абсолютно пружним.

3.8. Вздовж похилої площини з кутом $\alpha = 30^\circ$ при основі рівномірно сковзає ящик з піском зі швидкістю v = 0,8м/с. Коли в ящик влучає куля масою m=10г, що летіть горизонтально, він зупиняється. Маса ящика M=10 кг. Визначити швидкість кулі.

3.9. На висоті h =32м над землею зависнув вертоліт масою M =1500кг. З вертольота опущені мотузяні сходини, по яких спускається на землю людина масою m = 90кг. Яку довжину повинні мати сходини, щоб, ступивши на останню сходинку, людина торкнулася землі?

3.10. Куля, яка рухалась із швидкістю v = 6 м/с, зіткнулась з нерухомою кулею. Удар центральний, абсолютно непружний. Визначити швидкість кожної кулі після зіткнення і роботу деформації в двох випадках: а) маса рухомої кулі $m_1 = 1$кг, нерухомої – m_2 = 4кг; б) маса рухомої кулі $m_1 = 4$кг, нерухомої – m_2 = 1кг.

3.11. Ковзаняр масою $M = 60$ кг, стоячи на льоду, кидає під кутом $\alpha = 30^0$ до горизонту камінь масою $m_1 = 2$ кг із швидкістю $v = 10$ м/с. На яку відстань відкотиться ковзаняр, якщо коефіцієнт тертя ковзанів по льоду $\mu = 0{,}01$?

3.12. Пістолетна куля масою $m_1 = 10$г, яка рухається із швидкістю $v_1 = 250$ м/с, влучає в дерев'яну кулю масою $m_2 = 1{,}5$ кг, підвішену на нитці довжиною l = 1м і застрягає в ній. Визначити: а) кут α, на який відхилиться нитка з дерев'яною кулею при зіткненні; б) кількість тепла, яке виділиться при зіткненні. Масою нитки знехтувати.

3.13. М'яч падає на гладку підлогу з висоти $h = 6$м. Яку початкову швидкість необхідно надати м'ячу, щоб після двох ударів о підлогу він піднявся до початкової висоти, якщо при кожному ударі о підлогу м'яч втрачає $k = 30\%$ своєї енергії?

3.14. Акробат масою $m = 60$ кг плигає з висоти $h = 5$м на батут. З якою середньою силою $\langle F \rangle$ він тисне на сітку батута, якщо вона прогинається на $\Delta h = 0{,}5$ м?

3.15. Санки спускаються з гірки висотою h = 10м та довжиною l = 40м , а потім проходять по горизонтальній поверхні шлях s = 80м і зупиняються. Визначити коефіцієнт тертя μ, якщо він на обох відрізках шляху є однаковим.

3.16. Автомобіль з виключеним двигуном спускається по ділянці шосе з уклоном 1м на кожні 25м шляху з постійною швидкістю $v = 72$ км/год. Визначити потужність, яку розвиває двигун автомобіля при підійманні по цьому уклону з тією ж самою швидкістю. Маса автомобіля m = 1,5 т.

3.17. Невеличке тіло зісковзує з вершини гладкої півсфери радіусом R=1,5м. На якій висоті h від її основи тіло відірветься від поверхні?

3.18. Ланцюжок довжиною L = 1,6м лежить на столі. Якщо довжина частини, що звисає зі столу більша за ¼ L, ланцюжок зісковзує зі столу. Визначити швидкість v ланцюжка в момент відриву від столу.

3.19. Визначити потужність N повітряного потоку перерізом s =0,6 $м^2$ при швидкості руху повітря v = 20 м/с. Густина повітря $\rho = 1{,}29$ $кг/м^3$.

3.20. Вагон масою m = 18 т, який рухається з швидкістю v = 1 м/с, гальмує при зіткненні з двома пружинними буферами. Визначити найбільше стиснення кожної пружини , якщо відомо, що кожен з буферів можна стиснути на 1см силою в 10^4 Н.

3.21. У скільки разів кінетична енергія W_k штучного супутника, який обертається по коловій орбіті навколо Землі, менша за його потенціальну енергію W_p?

Тестові завдання.

Вибрати вірну відповідь.

1. Закон збереження імпульсу є наслідком

1. однорідності простору 2. ізотропності простору
3. однорідності часу 4. серед наведених немає вірної відповіді

2. Кулька маси m, що рухалася із швидкістю $\vec{v}$, зіткнулася з нерухомою кулькою такої самої маси. Удар – абсолютно пружний, центральний. Швидкість першої кульки після зіткнення дорівнюватиме

1. $-2\vec{v}$ 2. $-\vec{v}$ 3. 0 4. $-\frac{\vec{v}}{2}$ 5. $\frac{\vec{v}}{2}$

3. Кулька маси m, що рухалася із швидкістю $\vec{v}$, зіткнулася з нерухомою кулькою такої самої маси. Удар – абсолютно непружний, центральний. Швидкість кожної з кульок після зіткнення дорівнюватиме

1. $-2\vec{v}$ 2. $-\vec{v}$ 3. 0 4. $-\frac{\vec{v}}{2}$ 5. $\frac{\vec{v}}{2}$

4. Кулька маси m, що рухалася із швидкістю $\vec{v}$, зіткнулася з нерухомою кулькою з такою ж самою масою. Удар – абсолютно пружний, центральний. Швидкість другої кульки після зіткнення дорівнюватиме

1. $\vec{v}$ 2. $-\vec{v}$ 3. 0 4. $-\frac{\vec{v}}{2}$ 5. $\frac{\vec{v}}{2}$

5. Відбувається центральний, абсолютно пружний удар кулі маси m_1, яка рухається із швидкістю $\vec{v}$, із нерухомою кулею маси m_2. Перша куля зупиниться, якщо

1. $m_1 >> m_2$ 2. $m_1 = m_2$ 3. $m_1 = 2m_2$ 4. $m_1 < m_2$

6. Відбувається прямий центральний абсолютно пружний удар кулі маси m_1, що рухається із швидкістю $\vec{v}$, із нерухомою кулею маси m_2. Швидкість першої кулі після удару буде дорівнювати $-\vec{v}$, якщо

1. $m_1 > m_2$ 2. $m_1 = m_2$ 3. $m_1 = 2m_2$ 4. $m_1 << m_2$

7. Куля маси m, що летить горизонтально, влучивши у підвішене на нитці тіло такої самої маси, застрягає в ньому і надає швидкість v. Якщо, при тих же умовах, збільшити масу тіла удвічі, швидкість, яку набуває тіло, дорівнюватиме

1. $\frac{v}{2}$ 2. $\frac{3v}{2}$ 3. $\frac{v}{3}$ 4. $\frac{2v}{3}$

8. При підійманні тіла масою 5 кг на висоту 1 м з прискоренням 2 м/с^2 людина виконує роботу (взяти g = 10м/с^2, опором повітря знехтувати)

1. 100 Дж; 2. 60 Дж; 3. 50 Дж; 4. 10 Дж.

9. Куля, що має швидкість 300 м/с, заглибилась у стіну на відстань 2см. Якщо швидкість кулі збільшити удвічі, відстань, на яку заглибиться куля

1. не зміниться 2. збільшиться у 4 рази
3. збільшиться удвічі 4. збільшиться у $\sqrt{2}$ раз

10. Мопед масою 40кг на початковій ділянці шляху рухається за законом $x = \left(20 + 0{,}5t^2\right)$м/с. Потужність двигуна в момент часу t= 2 с складає

1. 10 Вт 2. 20 Вт 3. 40 Вт 4. 80 Вт

11. Одиниця вимірювання енергії, виражена через основні одиниці Міжнародної системи одиниць (СІ):

1. $кг \cdot м^2/с$ 2. $кг \cdot м/с^2$ 3. $кг \cdot м^2/с^2$ 4. $кг \cdot м/с$

12. Умовою рівноваги системи у механіці є:

1. замкненість системи 2. відсутність сил тертя
3. мінімум потенціальної енергії 4. серед наведених немає вірної відповіді

13. Сила тяжіння не виконує роботу у випадку:

1. руху тіла вертикально вгору 2. руху тіла по похилій площині
3. руху штучного супутника по коловій орбіті 4. руху тіла вертикально вниз

14. Сила тяжіння не виконує роботу у випадку:

1. руху тіла вертикально вгору 2. руху тіла по похилій площині
3. руху тіла вертикально вниз 4. руху тіла в горизонтальному напрямку

15. Одиниця вимірювання роботи, виражена через основні одиниці Міжнародної системи одиниць (СІ):

1. $кг \cdot м^2/с$ 2. $кг \cdot м/с^2$ 3. $кг \cdot м^2/с^2$ 4. $кг \cdot м/с$

16. Одиниця вимірювання потужності, виражена через основні одиниці Міжнародної системи одиниць (СІ):

1. $кг \cdot м/с$; 2. $кг \cdot м^2/с^3$ 3. $кг \cdot м/с^2$ 4. $кг \cdot м^2/с^2$

17. Механічна робота консервативної сили залежить від

1. траєкторії руху тіла 2. початкового і кінцевого положення тіла
3. швидкості переміщення тіла 4. кінетичної енергії тіла

18. В консервативній механічній системі тіло після переміщення повернулось в початкове положення. Робота сил, що діють на тіло:

1. дорівнює нулю 2. залежить від вибору системи відліку
3. залежить від траєкторії руху 4. швидкості переміщення тіла

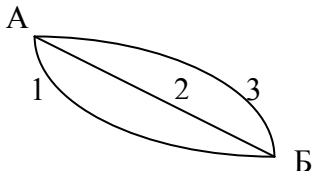
19. Тіло масою m підіймають вертикально на висоту h із прискоренням a. Робота, яку виконує при цьому сила натягу канату, дорівнює

1. A=m(g-a)h 2. A=mgh 3.A=m(g+a)h 4.A=mah.

20. Сила не виконує роботи, якщо кут між векторами сили і переміщення дорівнює

1. нулю 2. 45^0 3. 90^0 4. 180^0

21. Тіло переміщується з точки А у точку Б у вертикальній площині за різними траєкторіями. Робота сили тяжіння при цьому задовольняє співвідношення

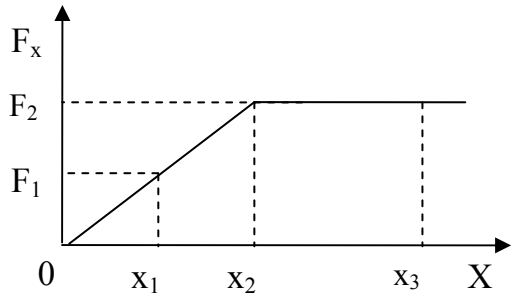


1. $A_1 < A_2 < A_3$ 2. $A_1 > A_2 > A_3$
3. $A_1 < A_2 = A_3$ 4. $A_1 = A_2 = A_3$

22. З нижче перелічених сил неконсервативною є сила

1. пружності; 2. гравітаційної взаємодії; 3. кулонівська сила; 4. сила тертя.

23. Тіло переміщується вздовж осі 0X. На рисунку показана залежність проекції F_x сили, що діє на тіло, від координати x.



А) Робота сили на ділянці шляху (x_1, x_2) визначається за формулою

1. $A = F_1 \cdot (x_2 - x_1)$
2. $A = F_2 \cdot (x_2 - x_1)$
3. $A = \frac{1}{2}(F_1 + F_2) \cdot (x_2 - x_1)$

Б) Робота сили на ділянці шляху (x_2, x_3) визначається за формулою

1. $A = F_2 \cdot (x_3 - x_2)$ 2. $A = \frac{1}{2} F_2 \cdot x_3$ 3. $A = \frac{1}{2} F_2 \cdot (x_3 - x_2)$ 4. $A = \frac{1}{2} F_2 \cdot x_2$

24. Кран потужністю 2кВт підіймає вантаж з постійною швидкістю 0,5м/с. Максимальна маса вантажу, який може підняти цей кран, дорівнює ($g = 10 м/с^2$).

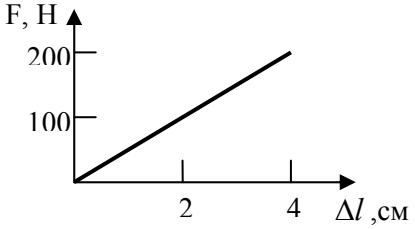
1. 400кг 2. 100кг 3. 4000кг 4. 1000кг

25. Вантаж масою 100кг підняли за допомогою канату вертикально вгору на висоту 5 метрів. Робота, виконана силою натягу каната,

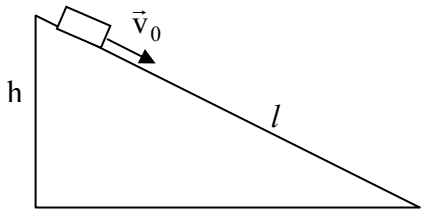
1. дорівнює 5 кДж 2. дорівнює 2,5 кДж
3. дорівнює 10 кДж 4. залежить від характеру руху вантажу

26. На рисунку наведено графік залежності сили пружності від видовження пружини. Потенціальна енергія пружини, яка розтягнута на 2см, дорівнює

1. 0,5 Дж 2. 1,0 Дж 3. 50 Дж 4. 100 Дж.



27. Тіло маси m зісковзує з похилої площини з початковою швидкістю v_0. У нижній точці траєкторії швидкість тіла має початкове значення v_0. У процесі руху на тіло діє сила тертя. Робота сили тертя на усьому шляху руху тіла дорівнює



1. 0 2. mgh 3. $-mgh$ 4. $-mgl$ 5. $\frac{mv_0^2}{2}$

28. Механічна енергія системи зберігається, якщо
1. система замкнена
2. у системі діють тільки консервативні сили
3. система замкнена й у ній діють консервативні та дисипативні сили
4. система замкнена й у ній діють тільки консервативні сили

29. За теоремою про кінетичну енергію зміна кінетичної енергії системи тіл дорівнює роботі:
1. тільки консервативних сил, що діють у системі
2. тільки дисипативних сил, що діють у системі
3. тільки зовнішніх сил, що діють на систему
4. усіх сил, що діють на систему

30. Градієнт потенціальної енергії тіла в полі тяжіння Землі
1. дорівнює mgh і є скалярною величиною
2. дорівнює mg і спрямований вертикально униз
3. дорівнює mg і спрямований вертикально уверх

31. Градієнт потенціальної енергії пружно деформованої пружини
1. дорівнює kx і спрямований від положення рівноваги
2. дорівнює $\frac{kx^2}{2}$ і є скалярною величиною
3. дорівнює kx і спрямований до положення рівноваги

32. Під час прискореного руху тіла його кінетична енергія збільшилася у 4 рази. Імпульс тіла при цьому збільшився у

1. 2 рази 2. 4 рази 3. 16 разів

33. Для замкненої системи тіл, у якій діють тільки консервативні сили, рівняння збереження та перетворення механічної енергії має вигляд

1. $W = W_k + W_p$ 2. $\Delta W = 0$ 3. $\Delta W = A^{дис.}$ 4. $\Delta W = A^{зовн.}$

34. Для замкненої системи тіл, у якій діють консервативні та дисипативні сили, рівняння збереження і перетворення механічної енергії має вигляд

1. $W = W_k + W_p$ 2. $\Delta W = 0$ 3. $\Delta W = A^{дис.}$ 4. $\Delta W = A^{зовн.}$

35. Для незамкненої системи тіл, внутрішні сили у якій є тільки консервативними, рівняння збереження і перетворення механічної енергії має вигляд

1. $W = W_k + W_p$ 2. $\Delta W = 0$ 3. $\Delta W = A^{дис.}$ 4. $\Delta W = A^{зовн.}$

36. З наведених стверджень не справджується для кінетичної енергії таке:
1. суттєво додатна величина 2. є відносною величиною
3. не залежить від системи відліку 4. є адитивною величиною

37. З наведених тверджень не справджується для потенціальної енергії таке:
1. суттєво додатна величина 2. вводиться тільки у випадку дії консервативних сил
3. є алгебраїчною величиною 4. залежить від вибору нульового рівня

38. Робота, яка виконується при підійманні літака на висоту 5км, більша за роботу надання йому при цьому швидкості 360км/год у
1. 20 разів 2. 10 разів 3. 5 разів 4. 12 разів
(Прискорення вільного падіння вважати рівним 10 м/с^2).

39. На катер діє сила опору, пропорційна квадрату його швидкості. Для збільшення швидкості човна у 2 рази потужність його двигуна необхідно збільшити у
1. 8 разів 2. 4 рази 3. 2 рази 4. $\sqrt{2}$ раз.

40. Тіло масою 10кг рухається за законом $x = \left(5 + 2t^3\right)$м. Через 1 с після початку руху кінетична енергія тіла дорівнюватиме
1. 360Дж 2. 180Дж 3. 90Дж 4. 120Дж

41. Для збільшення швидкості тіла масою 2кг від 3 м/с до 5 м/с треба виконати роботу, яка дорівнює
1. 4Дж 2. 8Дж 3. 16Дж 4. 32Дж

42. Сила тяги двигунів літака при швидкості польоту 650м/с дорівнює 200кН. Потужність двигунів при такому режимі польоту дорівнює
1. 650 кВт 2. 1300 кВт 3. 130 МВт 4. 65 МВт 5. 13 МВт.

43. Максимальна висота підйому тіла масою 1кг, кинутого з поверхні Землі зі швидкістю 10 м/с складає 3м. Якщо знехтувати опором повітря, кінетична енергія тіла у верхній точці траєкторії дорівнює (вважати g = 10м/с^2)
1. 10Дж 2. 20Дж 3. 50Дж 4. 0

44. При переміщенні тіла по горизонтальній поверхні на відстань 5м силою 20Н була виконана робота 50Дж. Кут між напрямами сили та переміщення складає
1. 0^0 2. 30^0 3. 45^0 4. 60^0

45. При переведенні системи з початкового у кінцевий стан зовнішніми силами була виконана робота 13Дж. Потенціальна енергія системи зросла на 19Дж. Тертя відсутнє. Зміна кінетичної енергії системи при цьому дорівнює
1. 32 Дж 2. 6 Дж 3. -6Дж 4. -32 Дж

46. Для підйому однорідного стриженя довжиною 2м та масою 120кг у вертикальне положення необхідно виконати роботу (вважати g = 10м/с^2)
1. 0,6 кДж 2. 1,2 кДж 3. 2,4 кДж 4. 4.8 кДж

47. Тіло кинули уверх зі швидкістю 20 м/с. На висоті 10м відношення кінетичної енергії тіла до потенціальної становить (вважати g = 10м/с^2)
1. 0,5 2. 1 3. 1,5 4. 2

48. Якщо кінетична енергія тіла масою 2 кг у деякий момент часу дорівнює 25Дж, модуль його імпульсу у цей момент дорівнює
1. 5 $кг \cdot м/с$ 2. 10 $кг \cdot м/с$ 3. 12.5 $кг \cdot м/с$ 4. 50 $кг \cdot м/с$

49. На моторний човен діє сила опору, пропорційна його швидкості. Для збільшення швидкості човна у 2 рази потужність його двигуна необхідно збільшити у
1. 8 разів 2. 4 рази 3. 2 рази 4. $\sqrt{2}$ разів

Розділ 4. Динаміка обертального руху твердого тіла

Тема: Момент інерції як міра інертних властивостей тіла при обертальному русі. Залежність моменту інерції від розмірів, форми тіла та осі обертання. Момент сили відносно полюсу і відносно осі. Момент імпульсу відносно полюсу і відносно осі. Рівняння моментів. Момент імпульсу абсолютно твердого тіла. Основний закон динаміки обертального руху твердого тіла. Закон збереження моменту імпульсу. Кінетична енергія обертального руху абсолютно твердого тіла. Робота сили при обертальному русі тіла. Умови рівноваги тіл, що мають вісь обертання.

Основні поняття і формули

● **Момент інерції I** є мірою інертних властивостей тіла при обертальному русі.

Момент інерції I матеріальної точки відносно довільної осі

$$I = mr^2 \tag{4.1}$$

де m – маса точки; r – відстань від точки до осі.

Момент інерції тіла є адитивною величиною, тобто дорівнює сумі моментів інерції матеріальних точок, з яких воно складається:

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 , \tag{4.2}$$

де n – кількість матеріальних точок.

При суцільному розподілі мас з урахуванням виразу елементарної маси dm через густину речовини ρ, момент інерції знаходиться за формулою:

$$I = \int_V r^2 dm = \int_V \rho r^2 dV . \tag{4.2a}$$

Моменти інерції деяких тіл, знайдені за формулою(5.3):

а) тонкостінного циліндра (тонкого кільця) відносно осі, яка збігається з віссю циліндра (кільця),

$$I = mR^2, \tag{4.3}$$

де R – радіус циліндра (кільця), m – його маса;

б) товстостінного циліндра (кільця) відносно осі, яка збігається з віссю циліндра (кільця),

$$I = \frac{1}{2} m\left(R_1^2 + R_2^2\right), \tag{4.4}$$

де R_1 і R_2– відповідно внутрішній і зовнішній радіуси циліндра (кільця), m – його маса;

б) суцільного однорідного циліндра (диска) радіуса R відносно його осі

$$I = \frac{1}{2} mR^2; \tag{4.5}$$

в) однорідного стрижня масою m і довжиною l, відносно осі, яка проходить через центр мас перпендикулярно до осі стрижня,

$$I = \frac{1}{12} ml^2; \qquad (4.6)$$

г) однорідної кулі масою m і радіуса R відносно осі, яка проходить через центр кулі, тобто збігається з діаметром кулі

$$I = \frac{2}{5} mR^2. \qquad (4.7)$$

Теорема Гюйгенса – Штейнера дозволяє виразити момент інерції тіла I відносно довільної осі O′O′, якщо завдано момент інерції I_0 відносно осі OO, що проходить через центр мас тіла C паралельно даній осі,

$$I = I_0 + ml_0^2, \qquad (4.8)$$

де m – маса тіла; l_0 – відстань між осями (рис.1.49).

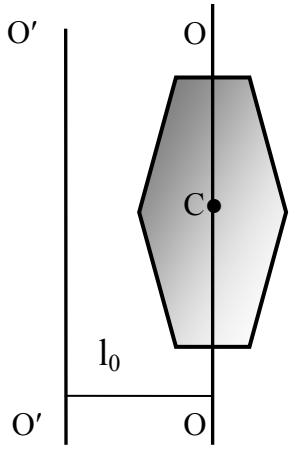


Рис.4.1 До теореми Гюйгенса-Штейнера

● **Момент сили** характеризує обертальну дію сили, прикладеної до тіла, яке має центр або вісь обертання.

Моментом сили $\vec{M}$ **відносно точки** (полюса) O називають векторний добуток радус-вектора $\vec{r}$, проведеного від полюса до точки прикладання сили, на вектор сили:

$$\vec{M} = \left[\vec{r} \cdot \vec{F}\right]. \qquad (4.9)$$

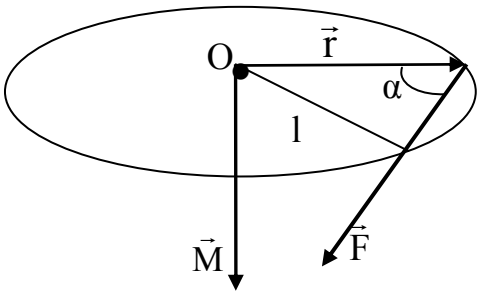


Рис.4.2 Момент сили відносно полюсу.

Вектор моменту сили $\vec{M}$ завжди перпендикулярний до площини, в якій лежать вектори $\vec{r}$ і $\vec{F}$, а його напрям визначається за правилом правого свердлика (рис.1.50).

Величину моменту сили можна визначити як добуток модуля сили на плече 1:

$$M = Fl \qquad (4.9a)$$

Плече сили - найкоротша відстань від осі обертання до лінії дії сили:

$$l = r \sin\alpha \qquad (4.10)$$

де α - кут між напрямом дії сили та радіус-вектором точки прикладення сили $\vec{r}$.

Моментом сили відносно осі називають проекцію моменту сили відносно точки, яка лежить на осі, на цю вісь:

$$M_z = \left[\vec{r} \cdot \vec{F}\right]_z. \qquad (4.11)$$

Величину моменту сили M_z відносно деякої осі 0Z можна визначити за формулою

$$M_z = F_\perp l, \qquad (4.11a)$$

де $F_\perp$ – проекція сили $\vec{F}$ на площину, яка є перпендикулярною до осі 0Z, l – плече проекції $F_\perp$ відносно точки перетину цієї площини з віссю.

У випадку дії сили по дотичній до поверхні тіла, переріз якого має форму кола (колесо, циліндр, куля і т. ін.), а вісь обертання збігається з віссю симетрії, плече сили – це радіус кола (рис.1.51).

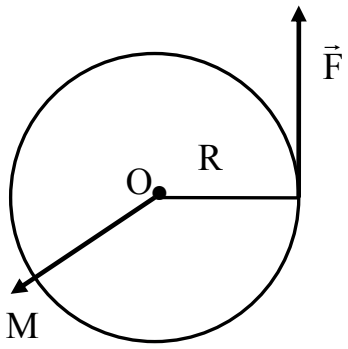


Рис.4.3 Момент сили, що діє по дотичній.

● **Момент імпульсу** $\vec{L}$ є векторною мірою руху при обертальному русі тіла.

Моментом імпульсу $\vec{L}$ **матеріальної точки відносно полюса О** називають векторний добуток радус-вектора $\vec{r}$, проведеного від полюса до матеріальної точки, на вектор її імпульсу:

$$\vec{L} = [\vec{r} \cdot \vec{p}]. \qquad (4.12)$$

Напрям вектора $\vec{L}$ визначається за правилом **правого** свердлика.

В окремому випадку руху матеріальної точки по колу радіуса r, момент її імпульсу за величиною дорівнює:

$$L = mrv. \qquad (4.13)$$

Моментом імпульсу відносно осі називають проекцію моменту імпульсу відносно точки, що лежить на осі на цю вісь:

$$L_z = [\vec{r} \cdot \vec{p}]_z.$$

Величина моменту імпульсу L_z **твердого тіла** відносно осі обертання 0Z знаходиться за формулою:

$$L_z = I_z \omega, \qquad (4.14)$$

де I_z – момент інерції тіла відносно осі OZ, ω – кутова швидкість.

● **Рівняння динаміки обертального руху** твердого тіла навколо нерухомої осі 0Z має вигляд:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^{(e)}, \qquad (4.15)$$

де $M_z^{(e)}$ – алгебраїчна сума моментів усіх зовнішніх сил, що діють на тіло, відносно осі 0Z.

Якщо момент інерції залишається постійним у процесі руху, рівняння (4.15) набуває вигляду:

$$I_z \varepsilon = M_z^{(e)}, \qquad (4.16)$$

де ε – кутове прискорення.

● Зміна моменту імпульсу твердого тіла при обертанні відносно нерухомої осі згідно (4.15) з урахуванням виразу (4.14) дорівнює:

$$d(I_z\omega) = M_z dt. \qquad (4.17)$$

Якщо $M_z^{(e)} = 0$ (система замкнена або рівнодійна моментів зовнішніх сил дорівнює нулю), виконується закон збереження моменту імпульсу відносно осі 0Z:

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} I_{zi}\omega_i = const. \qquad (4.18)$$

● **Умови рівноваги** тіла, яке має вісь обертання:

А) Векторна сума усіх зовнішніх сил, що діють на тіло дорівнює нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{(e)} = 0. \qquad (4.19)$$

Б) Векторна сума моментів усіх зовнішніх сил, що діють на тіло дорівнює нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i^{(e)} = 0. \qquad (4.20)$$

● **Робота сили при обертанні твердого тіла** визначається за формулою:

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_\omega d\varphi \qquad (4.21)$$

де M_ω – проекція моменту сили на напрям вектора кутової швидкості $\vec{\omega}$, φ–кут, на який повертається тіло.

У випадку дії постійного моменту сили вираз (1.57) набуває вигляду:

$$A = M_\omega(\varphi_2 - \varphi_1) = 2\pi M_\omega N, \qquad (4.21a)$$

де N – кількість обертів тіла.

● **Миттєва потужність** при обертальному русі твердого тіла дорівнює:

$$P = M_\omega \cdot \omega \qquad (4.22)$$

● **Кінетична енергія** тіла, яке обертається навколо нерухомої осі, обчислюється за формулою:

$$W_k = \frac{I\omega^2}{2}. \qquad (4.23)$$

Кінетична енергія тіла, що котиться без ковзання, дорівнює:

$$W_k = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2}, \qquad (4.24)$$

де $v_c = \omega R$ – швидкість центра мас, R – радіус тіла; I_c – момент інерції тіла відносно осі, яка проходить через центр мас паралельно миттєвій осі обертання.

Методичні вказівки. Розв'язання задач про обертальний рух тіл за допомогою законів динаміки зручно здійснювати за такою схемою:

− установити кількість тіл, що рухаються, та характер руху кожного тіла (поступальний чи обертальний);

− розглянути сили і моменти сил, які діють на кожне тіло (при необхідності зробити рисунок);

− записати рівняння руху кожного тіла: на основі другого закону Ньютона (для тіл, які рухаються поступально) і на основі закону динаміки обертального руху (для тіл, що обертаються).

− якщо тіло одночасно бере участь у поступальному та обертальному русі, для нього можна записати або два рівняння (поступального руху центра мас і обертального руху відносно осі, яка проходить через центр мас і є паралельною миттєвій осі обертання), або одне рівняння (обертального руху відносно миттєвої осі обертання);

− до системи рівнянь слід додати співвідношення, які надають зв'язок між кінематичними характеристиками поступального і обертального рухів.

У запропонованих для розв'язання задачах розглядається або плоский рух тіл, при якому вісь обертання переміщується у просторі паралельно сама собі, або обертання тіл навколо нерухомої осі. При цьому у більшості випадків моменти сил спрямовані вздовж осі обертання, що спрощує перехід до запису рівнянь у проекціях на координатні осі.

У деяких випадках використання законів збереження, зокрема закону збереження енергії, дозволяє виключити з розгляду сили і моменти сил, визначити які іноді досить складно, що спрощує розв'язування задач. Але такий метод потребує попереднього аналізу правомірності застосування законів збереження.

Приклади розв'язання задач

Приклад 4.1. Плоский маховик завтовшки h=0,02 м і радіусом R_1=0,5м закріплений на осі двигуна. Маховик має чотири циліндричні вирізи радіусом r = 0,1м, які симетрично розташовані на відстані R_2=0,3м від осі (рис.4.4). Визначити момент інерції маховика відносно осі. Маховик виготовлений із сталі, густина якої ρ=7800 кг/м^3.

h=0,02 м R_1=0,5м r = 0,1м R_2=0,3м N=4 ρ=7800 кг/м^3	Розв'язання. Момент інерції тіла є адитивною величиною. Це дозволяє визначити момент інерції маховика як момент інерції суцільного диска I_0 без моментів інерції чотирьох вирізаних частин.
I − ?	

Момент інерції суцільного диска визначається за формулою $I_0 = \frac{1}{2} m_0 R_1^2$. Маса суцільного диска дорівнює $m_0 = \rho V = \rho \pi R_1^2 h$. Звідси маємо:

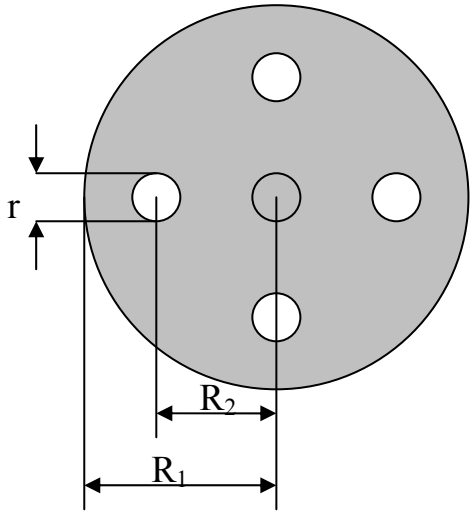


Рис.4.4

$$I_0 = \frac{1}{2} \pi \rho R_1^4 h. \qquad (1)$$

Момент інерції однієї з вирізаних частин диска I_1' знаходимо за теоремою Гюйгенса - Штейнера: $I_1' = I_1 + m_1 l_0^2$, де $I_1 = \frac{1}{2} m_1 r^2$, $l_0 = R_2$; $m_1 = \rho \pi r^2 h$ – маса вирізаної з отвору частини диска. Отже, маємо:

$$I_1' = \pi \rho r^2 h \left(\frac{1}{2} r^2 + R_2^2 \right). \qquad (2)$$

Користуючись (1) і (2), отримуємо формулу для моменту інерції маховика відносно осі валу:

$$I = I_0 - 4I_1' = \pi \rho h \left(\frac{1}{2} R_1^4 - 4r^2 \left(\frac{1}{2} r^2 + R_2^2 \right) \right).$$

Чисельний розрахунок дає:

$$I = 3{,}14 \cdot 7800 \cdot 0{,}02 \left(0{,}5 \cdot 0{,}5^4 - 4 \cdot 0{,}1^2 \left(0{,}5 \cdot 0{,}1^2 + 0{,}3^2 \right) \right) = 13{,}4 \, (\text{кг} \cdot \text{м}^2).$$

Відповідь: I=13,4 кг·м^2.

Приклад 4.2. Маховик, момент інерції якого I=13,4 кг·м^2 (див. приклад 4.1), розкручують так, що його кутова швидкість змінюється з часом за законом $\omega = \omega_0 \sin^2\left(\frac{2\pi}{\tau} t\right)$, де τ = 8 с, ω_0= 25,12 рад/с. Знайти: а) момент зовнішніх сил, що діють на маховик через 2 секунди після початку руху; б) кінетичну енергію, яку маховик запасає на цей момент часу.

I=13,4 кг·м^2

$\omega = \omega_0 \sin^2\left(\frac{2\pi}{\tau} t\right)$

τ = 8 с

ω_0= 4π рад/с

M_z; W_k – ?

Розв’язання.

За законом динаміки обертального руху твердого тіла момент сил M_z, що діють на нього, зв’язаний з кутовим прискоренням ε рівнянням

$$I_z \varepsilon = M_z^{(e)}, \qquad (1)$$

де I_z – момент інерції тіла відносно осі обертання.

Кутове прискорення маховика знаходимо за означенням:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{4\pi}{\tau}\omega_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\tau}t\right)\cos\left(\frac{2\pi}{\tau}t\right) = \frac{2\pi}{\tau}\omega_0 \sin\left(\frac{4\pi}{\tau}t\right). \qquad (2)$$

З (1) з урахуванням (2) визначаємо момент сил, що діють на маховик:

$$M_z = I_z \frac{2\pi}{\tau}\omega_0 \sin\left(\frac{4\pi}{\tau}t\right).$$

Обчислення дає $M_z = 13{,}4 \cdot \frac{2 \cdot 3{,}14}{8} \cdot 4 \cdot 3{,}14 \sin\left(\frac{4\pi}{8} \cdot 2\right) = 132 \sin\pi = 0.$

Отже, через дві секунди після початку руху момент сил, що діють на маховик, буде дорівнювати нулю.

Кінетичну енергію маховика обчислюємо за формулою $W_k = \frac{I\omega^2}{2}$, або

$$W_k = \frac{I\omega_0^2}{2}\sin^4\left(\frac{2\pi}{\tau}t\right).$$

Чисельний розрахунок дає

$$W_k = \frac{13{,}4 \cdot 16 \cdot 3{,}14^2}{2}\sin^4\left(\frac{2\pi}{8} \cdot 2\right) = 1057 \sin^4\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1057 \text{ (Дж)}.$$

Кінетична енергія маховика дорівнює роботі, яку він може виконати після відключення двигуна. Ця властивість маховиків використовується в інерційних двигунах.

Відповідь: $M_z = 0$; $W_k = 1057$ Дж.

Приклад 4.3. Блок масою m = 1кг закріплений наприкінці столу. Тягарці однакової маси $m_1 = m_2 = 1$ кг з'єднані ниткою, яка перекинута через блок. Коефіцієнт тертя тягарця 2 об стіл дорівнює μ=0,1. Визначити прискорення a, з яким рухаються тягарці. Блок вважати однорідним диском. Тертям у блоці та вагою нитки знехтувати.

$m = 1$ кг $m_1 = 1$ кг $m_2 = 1$ кг $g = 9{,}8$м/с^2 μ=0,1	Розв'язання. Обидва тягарця рухаються поступально, а рух блоку – це обертальний рух навколо нерухомої осі. Рівняння руху тягарців, які записані на основі другого закону Ньютона, мають вигляд (див. приклад 2.8):
a-?	$\vec{m}_1\vec{g} + \vec{T}_1 = m_1\vec{a}$; (1) $\vec{T}_2 + \vec{F}_{тр} = m_2\vec{a}$. (2)

Рух блока описує основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла:

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = I \cdot \vec{\varepsilon}, \qquad (3)$$

де $\vec{M}_1$ і $\vec{M}_2$ - моменти сил $\vec{T}_1'$ і $\vec{T}_2'$, що діють на блок з боку нитки (див. рис. 4.5); I – момент інерції блока; $\vec{\varepsilon}$ - кутове прискорення.

За третім законом Ньютона маємо: $\vec{T}_1 = -\vec{T}_1'$, $\vec{T}_2 = -\vec{T}_2'$. Якщо радіус блока дорівнює R, моменти $\vec{M}_1$ і $\vec{M}_2$ відповідно дорівнюють $M_1 = T_1 \cdot R$; $M_2 = T_2 \cdot R$. З урахуванням вище отриманого рівняння (3) в проекції на вісь О набуває вигляду:

$$(T_1 - T_2)R = I\varepsilon. \qquad (4)$$

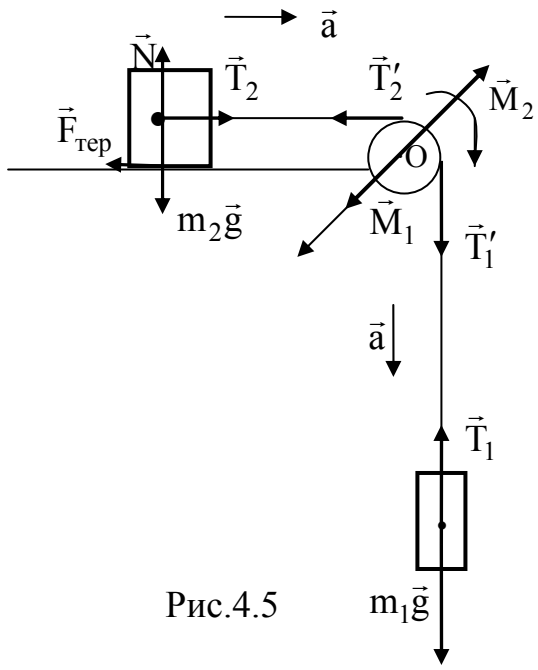


Рис.4.5

Момент інерції блоку, який має форму диска, надає формула $I = \frac{1}{2}mR^2$.

Кутове прискорення ε, з яким рухається блок, пов'язано з лінійним прискоренням a співвідношенням

$$a = \varepsilon R.$$

Після підстановки ε та I у (4) отримуємо:

$$T_1 - T_2 = \frac{ma}{2}. \qquad (5)$$

Рівняння руху (1) і (2) тіл m_1 і m_2 в проекції на напрямок руху (з урахуванням виразу для сили тертя $F_{тр} = \mu N = \mu m_2 g$) набувають вигляд:

$$m_1 g - T_1 = m_1 a; \qquad (6)$$

$$T_2 - \mu m_2 g = m_2 a. \qquad (7)$$

Рівняння (5), (6) і (7) утворюють систему. Додаючи їх одне до одного, визначаємо прискорення

$$a = g\frac{m_1 - \mu m_2}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}}.$$

Чисельний розрахунок дає

$$a = 9{,}8 \cdot \frac{1 - 0{,}1 \cdot 1}{1 + 1 + 0{,}5} \text{ м/с}^2 = 3{,}53 \text{ м/с}^2.$$

Відповідь: a = 3,53 м/с^2.

Приклад 4.4. З похилої площини висотою h, яка утворює кут α з горизонтом, скочується без ковзання порожній тонкостінний циліндр маси m. Знайти а) прискорення центра мас циліндра; б) силу тертя, що діє на нього; в) швидкість центра мас циліндра наприкінці руху.

h
$I = \gamma m R^2$
$\gamma = 1$
α
m
a - ?
$F_{тер.}$ - ?
v_c - ?

Розв'язання

Рух циліндра при скочуванні з похилої площини розглядаємо як поступальний рух центра мас циліндра з одночасним обертанням циліндра відносно осі OZ, що проходить через центр мас. На циліндр діють сили тяжіння $\vec{F}_т$, реакції опори $\vec{N}$, а також сила тертя $\vec{F}_{тер.}$. Моменти сил $\vec{F}_т$ і $\vec{N}$ дорівнюють нулю, оскільки лінії дії цих сил проходять через вісь обертання (рис.4.6). Таким чином, до обертання циліндра при скочуванні з похилої площини призводить момент сили тертя $M_{тер} = RF_{тер.}$ (R – радіус циліндра). На основі законів динаміки записуємо рівняння поступального та обертального руху циліндра у проекціях на координатні осі OX і OZ відповідно:

$$ma = mg\sin\alpha - F_{тер.}; \quad (1)$$

$$I\varepsilon = RF_{тер.}. \quad (2)$$

Ці рівняння справедливі незалежно від характеру руху циліндра з ковзанням чи без ковзання.

Якщо циліндр рухається без ковзання, до них можна додати кінематичне рівняння, яке зв'язує лінійне та кутове прискорення:

$$a = \varepsilon R \quad (3)$$

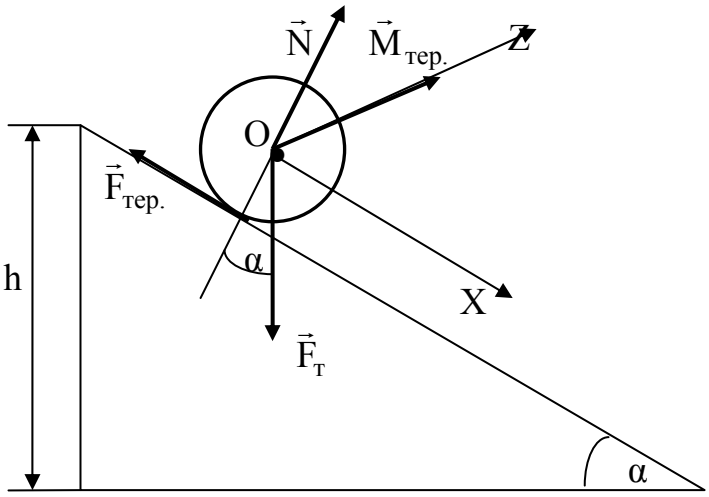


Рис. 4.6

Рівняння (1)–(3) утворюють замкнену систему. З рівняння (2) виражаємо силу тертя:

$$F_{тер.} = \frac{I\varepsilon}{R} = \frac{Ia}{R^2}. \quad (5)$$

Підстановка (5) в (1) дозволяє визначити лінійне прискорення центра мас циліндра:

$$a = \frac{g\sin\alpha}{1 + \frac{I}{mR^2}}. \quad (6)$$

Представимо момент інерції тіла, що скочується, у вигляді:

$$I = \gamma m R^2, \quad (7)$$

де γ – чисельний коефіцієнт, який ураховує розподіл мас у тілі. (Для порожнього циліндра або обруча γ =1; для суцільного циліндра або диска γ =1/2; для кулі γ =2/5).
З урахуванням (7) прискоренню (6) можна надати вигляду:

$$a=\frac{g\sin\alpha}{1+\gamma}\ . \qquad (6a)$$

Із (5), з використанням (6а) та (7), для сили тертя отримуємо:

$$F_{тер.}=\frac{Ig\sin\alpha}{\left(1+\frac{I}{mR^2}\right)R^2}=\frac{\gamma mg\sin\alpha}{(1+\gamma)}. \qquad (8)$$

Швидкість центра мас циліндра наприкінці рівноприскореного руху вздовж похилої площини можна визначити за кінематичним виразом: $v^2-v_0^2=2aS$. Початкова швидкість циліндра $v_0=0$, а довжина шляху S дорівнює довжині похилої площини $S=\frac{h}{\sin\alpha}$. Звідси, з урахуванням (6а) і (7), для кінцевої швидкості маємо:

$$v_c=\sqrt{\frac{2ah}{\sin\alpha}}=\sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{I}{mR^2}}}=\sqrt{\frac{2gh}{1+\gamma}}. \qquad (9)$$

Формули (6а), (8), (9) записані у вигляді, який дозволяє визначити шукані величини при різних значеннях γ, тобто для тіл з різним розподілом мас. У випадку указаного в умові задачі порожнього циліндра γ=1.
Відповідь:

$$a=\frac{g\sin\alpha}{1+\gamma}=\frac{1}{2}g\sin\alpha;\qquad F_{тер.}=\frac{\gamma mg\sin\alpha}{(1+\gamma)}=mg\sin\alpha;\qquad v_c==\sqrt{\frac{2gh}{1+\gamma}}=\sqrt{gh}.$$

Зауважимо, що отриманий для сили тертя вираз (8) дозволяє визначити умову, за якою скочування тіла відбудеться без ковзання. Якщо вважати, що сила тертя при скочуванні (подібно силі тертя спокою) має максимальне значення, умовою скочування без ковзання буде виконання нерівності $F_{тер.}<F_{тер.сп.}$. Для тіла на похилій площині $F_{тер.сп.}=\mu mg\cos\alpha$. Тоді нерівність можна записати у виді $\frac{\gamma mg\sin\alpha}{(1+\gamma)}<\mu mg\cos\alpha$. Звідки умові відсутності ковзання при скочуванні можна надати вигляду $tg\alpha<\frac{\mu(1+\gamma)}{\gamma}$.

Розглянемо розв’язання задачі про швидкість руху тіла, що скочується без ковзання з похилої площини (приклад 4.4), за законом збереження енергії, використання якого значно спрощує розв’язання задачі.

Приклад 4.5. З похилої площини висотою h скочується без проковзування порожній тонкостінний циліндр. Знайти швидкість поступального руху циліндра наприкінці площини.

h $I = \gamma mR^2$ $\gamma = 1$	Розв'язання При відсутності проковзування сила тертя не виконує роботу. Тоді, згідно закону збереження механічної енергії потенціальна енергія циліндра, яка у верхній точці дорівнює
v_c -?	

$$W_p = mgh, \qquad (1)$$

у нижній точці повністю перетворюється на кінетичну енергію поступального та обертального руху циліндра

$$W_k = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2}. \qquad (2)$$

У формулі (2): $I_c = \gamma mR^2$ – момент інерції тіла відносно осі, що проходить через центр мас паралельно миттєвій осі обертання (див. формулу (7), приклад 4.4), $v_c = \omega R$ – швидкість центра мас, R – радіус тіла.

Підстановка вищезазначених виразів у формулу (2) дає для кінетичної енергії вираз:

$$W_k = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{\gamma mR^2 v_c^2}{2R^2} = \frac{mv_c^2}{2}(1+\gamma).$$

За законом збереження енергії $mgh = \frac{mv_c^2}{2}(1+\gamma)$.

Звідси $$v_c = \sqrt{\frac{2gh}{1+\gamma}},$$

що збігається з виразом, отриманим при розв'язанні попередньої задачі за допомогою законів динаміки.

Відповідь: $v_c == \sqrt{\frac{2gh}{1+\gamma}} = \sqrt{gh}$.

Приклад 4.6. На горизонтальній шорсткій поверхні лежить котушка ниток маси m. Момент інерції котушки відносно власної осі симетрії $I = \gamma mR^2$, де γ – чисельний коефіцієнт (див. приклад 4.4), R – зовнішній радіус котушки. Радіус шару ниток дорівнює r. Котушку тягнуть без проковзування за нитку з постійною силою $\vec{F}$, яка утворює кут α з горизонтом. З яким прискоренням a_x рухається вісь котушки? За якою умовою котушка буде рухатися у бік натягнутої нитки?

M
$I = \gamma m R^2$
R
r
α
$\vec{F}$

a_x - ?

Розв'язання

На котушку діють зовнішня сила $\vec{F}$, сила тяжіння $\vec{F}_т$ і сила реакції опори $\vec{N}$, а також сила тертя $\vec{F}_{тер.}$ (див. рис.4.7). Записуємо рівняння поступального та обертального руху котушки:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_{тер.} + \vec{F}_{т.} + \vec{N}; \qquad (1)$$

$$I\vec{\varepsilon} = \vec{M}_F + \vec{M}_{тер.} \qquad (2)$$

У рівнянні (2) $\vec{M}_F$ і $\vec{M}_{тер.}$ – моменти сили $\vec{F}$ та сили тертя відносно осі симетрії котушки, як чисельно дорівнюють

$M_F = F \cdot r$; $M_{тер.} = F_{тер.} \cdot R$ (3).

У проекції на осі OX та OZ рівняння (1) і (2) відповідно набувають вигляду:

$$ma_x = F\cos\alpha - F_{тер.}; \qquad (1а)$$

$$I\varepsilon = M_{тер.} - M_F, \qquad (2а)$$

або

$$I\varepsilon = F_{тер.} \cdot R - F \cdot r. \qquad (2б)$$

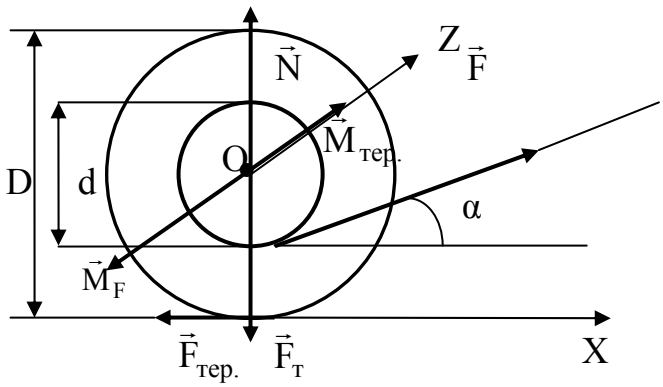


Рис.4.7

З рівняння (1а) виражаємо силу тертя

$$F_{тер.} = -ma_x + F\cos\alpha. \qquad (4)$$

З урахуванням (4), а також зв'язку між кутовим та лінійним прискоренням точок ободу котушки $\varepsilon = \frac{a_x}{R}$ рівнянню (2б) надаємо вигляду:

$$\frac{Ia_x}{R} = FR\cos\alpha - mRa_x - Fr.$$

Звідси

$$a_x = \frac{F(R\cos\alpha - r)}{\frac{I}{R} + mR} = \frac{F(\cos\alpha - \frac{r}{R})}{\frac{I}{R^2} + m}. \qquad (5)$$

Враховуючи, що за умов задачі момент інерції котушки $I = \gamma m R^2$ (γ – чисельний коефіцієнт, що ураховує форму котушки), отриманій формулі можна надати вигляду

$$a_x = \frac{F(\cos\alpha - \frac{r}{R})}{(1+\gamma)m}. \qquad (6)$$

Аналіз формули (6) показує, що знак a_x, тобто напрям прискорення і руху котушки залежать від співвідношення між величинами $\cos\alpha$ та $\frac{r}{R}$.

Кут, при якому змінюється напрям руху котушки знаходимо за умови $\cos\alpha = \frac{r}{R}$. Якщо $\cos\alpha > \frac{r}{R}$, тобто кут α невеликий, то $a_x>0$, котушка котиться у позитивному напрямку осі OX. Якщо $\cos\alpha < \frac{r}{R}$, то $a_x<0$, і напрям руху змінюється на протилежний.

Слід звернути увагу на те, що сила тертя у даному випадку – це та сила, завдяки якій котушка рухається до нас при підтягуванні нитки.

Відповідь: $a_x = \dfrac{F(\cos\alpha - \frac{r}{R})}{(1+\gamma)m}$.

Приклад 4.7. На нерухомій платформі у формі однорідного горизонтального диска масою M=260кг і радіусом R=1,5м стоїть людина масою m=60 кг. Диск може обертатися навколо вертикальної осі, що проходить через його середину. В деякий момент людина почала рухатися зі швидкістю v=1,6м/с відносно платформи по колу радіусом r =1,2м, центр якого лежить на осі диска. З якою кутовою швидкістю ω почне обертатися диск? Людину вважати матеріальною точкою.

M =260кг m =60 кг R =1,5м r =1,2м v =1,6м/с $\omega_0 = 0$	Розв'язання На систему діє зовнішня сила – сила тяжіння, момент якої відносно осі обертання дорівнює нулю. Це означає, що для системи „платформа – людина“ виконується закон збереження моменту імпульсу: $L_{0z} = L_z$. (1) Початковий момент імпульсу системи відносно осі платформи
ω -?	$L_{0z}=0$. (2)

Момент імпульсу системи L_z після початку руху людини дорівнює сумі моментів імпульсу платформи (диску) L_{1z} і людини L_{2z} відносно осі платформи:

$$L_z = L_{1z} + L_{2z}. \quad (3)$$

Момент імпульсу диска $L_{1z} = I_1\omega$, де $I_1 = \frac{1}{2}MR^2$. Звідси маємо:

$$L_{1z} = \frac{1}{2}MR^2\omega. \quad (4)$$

Момент імпульсу людини надається виразом

$$L_{2z} = I_2(\frac{v}{r} + \omega), \qquad (5)$$

де $I_2 = mr^2$ – момент інерції людини, який розраховуємо за формулою моменту інерції матеріальної точки (поперечними розмірами людини нехтуємо порівняно з відстанню r); $(\frac{v}{r} + \omega)$ – швидкість обертання людини у системі відліку, що зв'язана із землею. Підстановка зазначених співвідношень в (5), дає:

$$L_{2z} = mr(v + \omega r). \qquad (6)$$

Підставляючи (2) і (3) з урахуванням (4) і (6) в (1), за законом збереження моменту імпульсу отримуємо:

$$\frac{1}{2}MR^2\omega + mr(v + \omega r) = 0.$$

Виражаємо кутову швидкість платформи:

$$\omega = -\frac{mrv}{\frac{1}{2}MR^2 + mr^2}. \qquad (7)$$

Знак „–" у формулі (7) означає, що платформа обертається у напрямку, протилежному напрямку руху людини.

Обчислення значення за формулою (8) дає ω=0,30 рад/с.

Відповідь: ω=0,30 рад/с.

Приклад 4.8. Маятник у вигляді однорідної кулі, жорстко скріпленої з тонким стрижнем довжиною l_0 = 20см, може коливатися відносно горизонтальної осі, що проходить через кінець стрижня (рис.4.8). У кулю нормально до її поверхні ударяє куля маси m = 10г, що рухалася зі швидкістю v = 800м/с, і застрягає в ній. Маса кулі M = 8кг, радіус R=10см. На який кут α відхилиться маятник внаслідок удару кулі? Масою стрижня знехтувати.

l_0 = 0,20м
m = 0,01кг
v = 800м/с
M = 8кг
R=0,1м

α - ?

Розв'язання

З рис. 1.56 витікає, що кут α зв'язаний з висотою підйому h центра кулі співвідношенням:

$$\cos\alpha = \frac{l_0 + R - h}{l_0 + R} = 1 - \frac{h}{l_0 + R}. \qquad (1)$$

За величиною h можна визначити потенціальну енергію, яку отримує маятник внаслідок удару кулі m.

Удар є непружним, оскільки після нього тіла рухаються як єдине ціле. В процесі зіткнення механічна енергія системи "маятник + куля" не зберігається, її частина переходить у внутрішню енергію.

Після удару для системи “маятник з кулею + Земля” закон збереження механічної енергії буде виконуватися, оскільки у системі діють тільки консервативні сили. Кінетична енергія обертального руху системи при підйомі маятника перетворюється на потенціальну енергію тіл у гравітаційному полі Землі. За законом збереження енергії,

$$\frac{I\omega^2}{2} = Mgh + mgh', \qquad (2)$$

де I – момент інерції маятника разом із кулею, що застрягла в ньому; h – висота підйому центра тяжіння маятника; h′ – висота підйому кулі. Точні значення величин I та h′ можна знайти тільки, якщо відомо місце, в яке влучила куля. Але, за умовою задачі, $M >> m$. Це дозволяє знехтувати величиною mgh' у рівнянні (2), а момент інерції визначити за теоремою Гюйгенса-Штейнера як момент інерції кулі M:

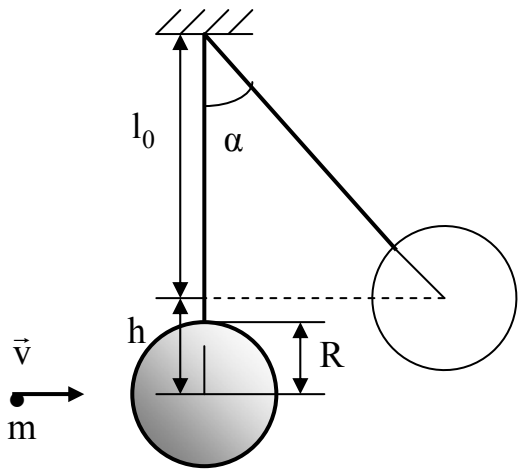


Рис.4.8

$$I = \frac{2}{5}MR^2 + M(l_0 + R)^2 = M\left(\frac{2}{5}R^2 + (l_0 + R)^2\right). \qquad (3)$$

Для визначення кутової швидкості ω, яку отримує система внаслідок удару, скористаємося законом збереження моменту імпульсу. Його використання є правомірним, бо моменти зовнішніх сил (реакції опори і сили тяжіння) в момент удару дорівнюють нулю, бо лінія їх дії проходить через вісь обертання.

Момент імпульсу системи L_1 до зіткнення дорівнює моменту імпульсу кулі відносно осі обертання маятника, який в цей момент є нерухомим:

$$L_1 = mv(l_0 + R). \qquad (4)$$

Момент імпульсу L_2 маятника з кулею, що застрягла в ньому, дорівнює

$$L_2 = I\omega. \qquad (5)$$

За законом збереження моменту імпульсу $L_1 = L_2$, звідки для кутової швидкості отримуємо

$$\omega = \frac{mv(l_0 + R)}{I}. \qquad (6)$$

Вилучивши з системи (2), (3), (6) невідомі I та ω, знаходимо

$$h = \frac{I\omega^2}{2Mg} = \frac{m^2v^2(l_0 + R)^2}{2M^2g\left(\frac{2}{5}R^2 + (l_0 + R)^2\right)}. \qquad (7)$$

Далі за формулою (1) визначаємо $\cos\alpha$:

$$\cos\alpha = 1 - \frac{m^2 v^2 (l_0 + R)}{2M^2 g\left(\frac{2}{5}R^2 + (l_0 + R)^2\right)}. \qquad (8)$$

Чисельний розрахунок за формулою (8) дає $\cos\alpha = 0{,}837$; $\alpha = 33°$.
Відповідь: $\alpha = 33°$.

Приклад 4.9. Драбина довжиною l = 2,6м приставлена до стіни так, що утворює з підлогою кут α = 60º (рис. 4.9). Коефіцієнт тертя між драбиною і підлогою дорівнює μ=0,4. На яку висоту s по цій драбині може піднятися людина, перш ніж драбина почне падати? Вважати, що маса людини значно більша за масу драбини. Тертям між драбиною та стіною у точці опори знехтувати.

Розв'язання

l = 2,6м
α = 60º
μ=0,4

s - ?

На драбину діють такі сили: вага людини, яка дорівнює силі тяжіння людини $m\vec{g}$, сили реакції опори з боку підлоги $\vec{N}$ і стіни $\vec{N}_1$ та сила тертя спокою $\vec{F}_{тер.}$. За першою умовою рівноваги (див. (4.19)) векторна сума усіх зовнішніх сил, що діють на драбину дорівнює нулю:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{N}_1 + \vec{F}_{тер.} = 0. \qquad (1)$$

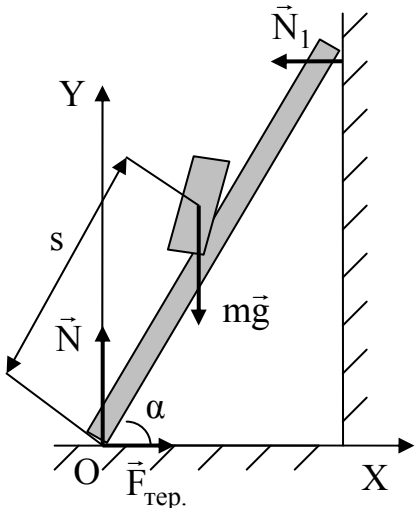


Рис. 4.9

Проектуючи рівняння (1) на осі OY та OX, отримуємо:

$$F_{тер.} - N_1 = 0; \qquad (1а)$$

$$N - mg = 0. \qquad (1б)$$

За другою умовою рівноваги (4.20) векторна сума моментів усіх зовнішніх сил, які діють на драбину, дорівнює нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i^{(e)} = 0. \qquad (2)$$

Обираємо у якості осі обертання лінію опори O драбини об підлогу. Тоді моменти сил $\vec{N}$ та $\vec{F}_{тер.}$ дорівнюють нулю, і до умови (2) увійдуть тільки моменти сил $m\vec{g}$ і $\vec{N}_1$:

$$N_1 l \sin\alpha + (-mgs\cos\alpha) = 0.$$

Звідси виражаємо $\vec{N}_1$:

$$N_1 = \frac{mgs}{l}\mathrm{ctg}\alpha. \qquad (3)$$

Згідно рівнянню (1а) $N_1 = F_{тер.}$. Коли людина досягає точки, з якої драбина починає зісковзувати, то сила тертя спокою досягає максимального значення $F_{тер.} = \mu N = \mu mg$. Отже

$$N_1 = \mu mg. \qquad (4)$$

Із (3) і (4) випливає:

$$\mu mg = \frac{mgs}{l} ctg\alpha,$$

звідки знаходимо максимальну відстань, на яку людина може піднятися вздовж драбини: $s = l\mu tg\alpha$.

Обчислення за умовами задачі дає $s = 2,6 \cdot 0,4 \cdot 1,73 = 1,80$ м. Тобто при заданих значеннях коефіцієнта тертя та кута α не слід підійматися по драбині вище за дві третини її довжини.

Відповідь: $s = 1,80$ м.

Задачі для самостійного розв'язування

4.1.(вар.1-25). За кінематичними характеристиками руху маховика, визначеними при розв'язанні відповідного варіанта задачі 1.35**,** знайти для моменту часу t=10с: а)момент імпульсу маховика; б) його кінетичну енергію; в) момент сили, що діє на маховик; г) миттєву потужність. Момент інерції маховика I = 6 кг·м^2.

4.2. На маховик діаметром d = 40см намотали шнур, до кінця якого прив'язали вантаж масою m = 2кг. Під дією вантажу система починає рухатися з постійним прискоренням. Визначити момент інерції I маховика, якщо відомо, що за час t = 2 с маховик набув кутову швидкість ω = 8 рад/с.

4.3. Через блок у вигляді диска перекинуто легку нерозтяжну нитку, до кінців якої прив'язані вантажі масою m_1= 0,4кг, m_2= 0,6кг. Визначити кутове прискорення ε диска та силу F, з якою блок діє на вісь. Маса блоку m = 0,4кг, радіус R = 10см. Тертям знехтувати.

4.4. Блок у вигляді однорідного диска обертається з частотою n = 16 об/с. Визначити момент сили M, який необхідно прикласти до блока, щоб зупинити його за час t = 8 с. Маса блока m =5 кг, діаметр блока d = 20см.

4.5. Однорідний стрижень довжиною L = 0,5м і масою m = 0,6кг обертається в горизонтальній площині відносно вертикальної осі, яка проходить через його кінець. На стрижень діє момент сили M = 240 мН·м. Визначити прискорення ε, з яким обертається стрижень.

4.6. Диск обертається відносно осі, що проходить через центр перпендикулярно до площини диска. Маса диска m = 4кг, радіус R =0,2 м. Залежність кута повороту диска від часу надається рівнянням

$\varphi=(A+Dt+Ct^2)$рад, де C = 3 рад/c^2. Визначити силу F, прикладену по дотичній до диска.

4.7. Маховик у формі диска обертається навколо своєї осі з частотою n = 30 об/с. Визначити масу маховика, якщо відомо, що гальмуючий момент M= 251,2 мН зупиняє маховик за час t = 12 с. Радіус диска R = 10см.

4.8. Дві кулі однакового радіуса R = 5см закріплені на кінцях невагомого стрижня. Відстань між центрами куль L = 0,8м. Маса кожної кулі m = 1кг. Визначити: а) момент інерції I_1 системи відносно осі, що проходить перпендикулярно до стержня через його середину; б) момент інерції I_2 тієї самої системи, якщо вважати кулі матеріальними точками; в) відносну помилку $\varepsilon = (I_1 - I_2)/I_2$ при обчисленні моменту інерції другим способом.

4.9. Визначити момент інерції однорідного диска масою m =1,5 кг і радіусом R = 12см відносно осі, що проходить перпендикулярно до площини диска через середину одного з радіусів.

4.10. Куля масою m = 5кг і радіусом R = 10см обертається відносно осі, що проходить через її центр. Рівняння, яке описує обертальний рух кулі $\varphi = A+Bt^2+Ct^3$, де A = 10 рад, B= 6 рад/c^2, C= –2 рад/c^3. За яким законом змінюється момент сил, що діють на кулю? Чому дорівнює величина моменту сил M в момент часу t = 3 с?

4.11. Вал масою m = 60кг і радіусом R= 5см обертався з частотою n=10об/с. Для гальмування до циліндричної поверхні валу із силою F=50Н притиснули колодку, під дією якої вал зупинився через t = 10 с. Визначити коефіцієнт тертя μ між валом та колодкою.

4.12. Визначити швидкість поступального руху суцільного циліндра, який скотився без проковзування з похилої площини висотою h = 50см. Початкова швидкість циліндра $v_0 = 0$.

4.13. Тонкий обруч масою m = 0,8кг і радіусом R = 0,4м, котиться без проковзування зі швидкістю v = 2,5м/с по горизонтальній поверхні. Визначити момент імпульсу L обруча відносно миттєвої осі обертання (лінії доторкання обруча до поверхні).

4.14. Куля масою m = 1кг, яка котиться без проковзування, відбивається від стінки. Швидкість кулі до удару об стінку v_1=20см/с, після удару v_2=15см/с. Визначити кількість тепла Q, яка виділяється внаслідок цього зіткнення.

4.15. Колесо, яке обертається уповільнено з постійним прискоренням, за час t = 2 хв. зменшило частоту обертання з n_1 =360 об/хв. до n_2= 120 об/хв. Визначити роботу гальмуючих сил A та повну кількість обертів N, зроблених колесом за цей час.

4.16. Маховик обертався з постійною частотою n = 900 об/хв. Після припинення дії на нього сил, які підтримували рівномірний рух, маховик

зробив до зупинки N = 800 обертів. Момент інерції маховика I = 200кг·м^2. Визначити момент сили M, яка гальмує рух, та її роботу A.

4.17. Маховик діаметром d = 40см і масою m = 30кг може накопичити 10кВт-год. енергії. З якою кутовою швидкістю він повинен обертатися? На яку максимальну висоту по гірській дорозі може піднятися автомобіль, повна маса якого M=1000кг, якщо на ньому установити цей маховик? Вважати, що вся накопичена енергія витрачається на підйом.

4.18. Олівець довжиною l = 12см, який поставили вертикально, падає на стіл. Визначити кутову швидкість ω і лінійну швидкість v середини та верхнього кінця олівця наприкінці падіння.

4.19. Обід велосипедного колеса діаметром d = 8м має масу m = 1,5кг. Чому дорівнює момент імпульсу колеса, якщо швидкість велосипедиста v=3,2м/с.

4.20. Куля, радіус якої = 0,2м і маса = 10кг, обертається навколо своєї осі згідно з рівнянням $\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$, де B= – 3 рад/с^2, C = 1 рад/с^3. Визначити момент імпульсу кулі L та момент сили M, який діє на кулю, для моментів часу $t_1 = 1c$ і $t_2 = 2c$.

4.21. На краю платформи у вигляді диску стоїть хлопчик масою m_1 =50 кг. Платформа обертається за інерцією з частотою n_1=10 об/хв. Коли хлопчик перейшов до центру платформи, частота її обертання збільшилася до n_2=12об/хв. Визначити масу платформи m_2. Момент інерції людини розраховувати за формулою моменту інерції матеріальної точки.

4.22. На краю платформи у вигляді диска стоїть хлопчик масою m_1=50кг. На який кут φ обернеться платформа, якщо хлопчик обійде її по краю один раз? Маса платформи m_2=500 кг. Момент інерції людини розраховувати за формулою моменту інерції матеріальної точки.

4.23. Кулька масою m =200 г, яку прив'язали до нитки довжиною l = 0,8м, обертається, спираючись на горизонтальну площину, із частотою n_1=0,5об/с. З якою частотою n_2 буде обертатися кулька, якщо в процесі обертання довжину нитки скоротити удвічі? Яку роботу A виконає при цьому зовнішня сила, яка скорочує нитку? Тертям знехтувати. Кульку вважати матеріальною точкою.

4.24. Драбину масою m=10кг приставили під кутом α=45° до гладкої стіни. З якою силою драбина тисне на стіну?

4.25. Однорідний стрижень масою m=10кг прислонили під кутом α=45° до стіни. Сила тертя стрижня об підлогу дорівнює 40Н. Чому дорівнює сила тертя стриженя об стінку?

4.26. До кінців однорідного стриженя вагою P=100Н і довжиною l=60см підвішені вантажі вагою P_1=400Н і P_2=100Н. На якій відстані від більшого вантажу слід підкласти опору, щоб стрижень залишився у рівновазі?

4.27. Однорідна балка масою m=120кг лежить на платформі так, що її кінець у чверть довжини балки виступає за край платформи. Яку мінімальну силу під кутом 60º до вертикалі слід прикласти до цього кінця, щоб підняти протилежний її кінець?

4.28. Однорідний стрижень шарнірно закріплений за верхній кінець. Нижній кінець стриженя опущений у воду. Стрижень знаходиться у рівновазі, коли у воду занурена третина його довжини. Визначити густину речовини стриженя.

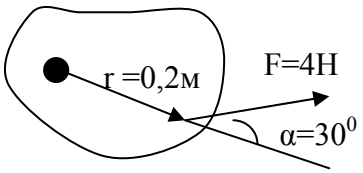
Тестові завдання

Вибрати вірну відповідь.

1. Мірою інертних властивостей при обертальному русі тіла є його
   1. маса 2. імпульс 3. момент інерції 4. прискорення 5. кінетична енергія

2. Момент сили відносно осі дорівнює
   1. $\left[\vec{r}\cdot\vec{F}\right]$
   2. проекції моменту сили відносно полюса, що лежить на осі обертання на цю вісь
   3. $rF\sin\alpha$

3. Момент сили відносно полюса у випадку, зображеному на рисунку дорівнює



1. 0,4 Н•м і спрямований вертикально униз
2. 0,8 Н•м і спрямований вертикально уверх
3. 0,4 Н•м і спрямований вертикально уверх
4. 0,8 Н•м і спрямований вертикально униз

4. **Установити відповідність:**

Момент інерції відносно осі симетрії тіла	**Формула**
1. тонке кільце радіуса R	А. $I=\frac{1}{2}mR^2$
2. суцільний циліндр радіуса R	Б. $I=\frac{2}{5}mR^2$
3. момент інерції суцільної кулі радіуса R	В. $I=\frac{2}{3}mR^2$
	Г. $I=mR^2$

Вибрати вірну відповідь.

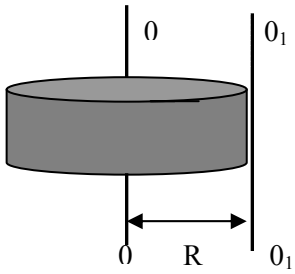
5. Відношення моменту інерції тонкого кільця радіуса R відносно його осі до моменту інерції тонкостінного циліндра того самого радіуса, якщо маси тіл однакові, дорівнює

1. $\frac{I_1}{I_2}=\frac{1}{2}$ 2. $\frac{I_1}{I_2}=2$ 3. $\frac{I_1}{I_2}=1$ 4. $\frac{I_1}{I_2}=\frac{3}{2}$

6. Відношення моменту інерції диска радіуса R відносно його осі до моменту інерції суцільного циліндра того самого радіуса, якщо маси тіл однакові, дорівнює

1. $\frac{I_1}{I_2}=\frac{1}{2}$ 2. $\frac{I_1}{I_2}=2$; 3. $\frac{I_1}{I_2}=1$ 4. $\frac{I_1}{I_2}=\frac{3}{2}$

7. Відношення моменту інерції диска радіуса R відносно осі $0_1 0_1$ (див. рис.) до його моменту інерції відносно осі 00 дорівнює

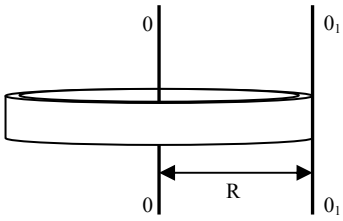


1. 2 2. 1/2 3. 3 4. 1

8. Відношення моменту інерції стриженя довжиною l відносно перпендикулярної осі, що проходить через кінець стриженя, до його моменту інерції відносно паралельної осі, що проходить через середину стриженя, дорівнює

1. 2 2. 4 3. 1/2 4. 3/2

9. Відношення моменту інерції тонкого кільця радіуса R відносно осі $0_1 0_1$ (див. рис.) до його моменту інерції відносно осі 00 дорівнює



1. 2 2. 1/2 3. 3/2 4. 1

10. Момент імпульсу абсолютно твердого тіла відносно осі обертання, визначає формула

1. L= rpsinα 2 $\vec{L}=[\vec{r}\cdot\vec{p}]$ 3. L=Iω

11. Момент імпульсу матеріальної точки відносно осі дорівнює

1. $L = rp\sin\alpha$
2 $\vec{L} = [\vec{r}\cdot\vec{p}]$
3. проекції моменту імпульсу відносно полюса, що лежить на осі обертання на цю вісь

12. Закон збереження моменту імпульсу є наслідком

1. однорідності простору 2. ізотропності простору
3. однорідності часу 4. серед наведених немає вірної відповіді

13. . Нитку, яка утримує маленьку кульку, що обертається, починають намотувати на стрижень, зменшуючи тим самим радіус обертання кульки. Момент зовнішніх сил при цьому дорівнює нулю.

1). Момент імпульсу кульки при цьому
2) Швидкість кульки при цьому

1. збільшується 2. зменшується 3. не змінюється

14. З одного рівня h похилої площини скочуються обруч, циліндр і куля. Більшу швидкість наприкінці шляху буде мати:

1. куля 2. циліндр 3. обруч 4. швидкість усіх тіл однакова

15. До циліндра, кулі та кільця, які мають однакові маси і радіуси, прикладені однакові моменти сил. Рухається з більшим прискоренням:

1. циліндр 2. куля 3. кільце 4. прискорення – однакове

16. Момент інерції точки, яка розташована на відстані вдвічі більшій від осі колеса, ніж друга точка такої самої маси,

1. удвічі більшій 2. такий самий 3. удвічі менший 4. більший у 4 рази

17. З одного рівня h похилої площини скочуються без ковзання обруч, циліндр і куля. Більший час на проходження шляху витратить:

1.обруч 2. циліндр 3. куля 4. час – однаковий

18. По горизонтальній поверхні котяться без ковзання кільце та диск, які мають однакові швидкості центрів мас і однакові маси. Відношення кінетичної енергії диска до кінетичної енергії кільця дорівнює:

1. 2 2. ½ 3. 1 4. ¾

19. Справедливим для обертального руху тіла, момент інерції якого змінюється у процесі руху, є закон динаміки обертального руху у вигляді

1. $\frac{dL_z}{dt} = M_z$ 2. $I\varepsilon = M$ 3. $I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = M$

20. Система матеріальних точок обертається відносно деякої осі. L_z - момент імпульсу системи відносно осі; M_z^i та M_z^e відповідно сумарні моменти внутрішніх і зовнішніх сил, що діють на систему, відносно осі. Рівняння моментів для цієї системи має вигляд:

1. $\frac{dL_z}{dt} = M_z^i + M_z^e$ 2. $\frac{dL_z}{dt} = M_z^i$ 3. $\frac{dL_z}{dt} = M_z^e$ 4. $I\varepsilon = M$

21. Система матеріальних точок обертається відносно деякої осі. L_z - момент імпульсу окремої матеріальної точки відносно осі; M_z^i та M_z^e - сумарні моменти внутрішніх та зовнішніх сил, що діють на точку, відносно осі. Рівняння моментів для цієї матеріальної точки має вид

1. $\frac{dL_z}{dt} = M_z^i + M_z^e$ 2. $\frac{dL_z}{dt} = M_z^i$ 3. $\frac{dL_z}{dt} = M_z^e$ 4. $I\varepsilon = M$

22. У процесі гравітаційного стискання радіус зірки, що обертається навколо своєї осі, зменшився в 400 разів. Швидкість обертання зірки при цьому

1. збільшилась в 400 разів 2. зменшилась в $1{,}6 \cdot 10^5$ разів
3. збільшилась в $1{,}6 \cdot 10^5$ разів 4. зменшилась в 400 разів

23. Фігурист обертається навколо вертикальної осі з витягнутими руками. Якщо спортсмен підійме руки вгору, момент інерції тіла зменшиться від I_1 до I_2. Частота обертання при цьому

1. не зміниться 2. зменшиться у I_1/I_2 разів

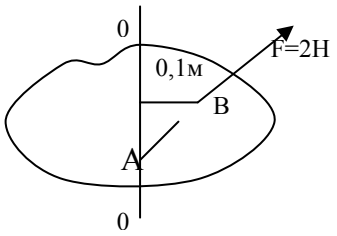
3. збільшиться у I_1/I_2 разів 4. збільшиться у $\left(I_1/I_2\right)^2$ разів

24. Спортсмен, який стрибнув із вишки у воду, за рахунок зміни моменту інерції свого тіла від I_1 до I_2 збільшив швидкість обертання. Лінійне прискорення, з яким падає спортсмен, при цьому

1. зменшилось у I_1/I_2 разів 2. залишилось незмінним

3. збільшилось у I_1/I_2 разів 4. збільшилось у $\left(I_1/I_2\right)^2$ разів

25. Сила 2 Н прикладена до тіла в точці В, яка знаходиться на відстані 0,1м від осі обертання і напрямлена вздовж прямої АВ. Момент сили відносно осі дорівнює



1. 0,2 Н·м 2. нулю 3. 0,1 Н·м 4. $0{,}2\sin\alpha$ Н·м

26. Маховик, момент інерції якого $I = 100$ кг·м^2, обертається за законом $\varphi = \left(2 + 32t - 4t^2\right)$рад. Момент сили, що діє на маховик, дорівнює

1. 400 Н·м 2. - 800 Н·м 3. - 400 Н·м 4. 2400 Н·м

27. Вентилятор, що обертався рівносповільнено, зробив до зупинки 100 обертів. Робота гальмівних сил А= 62,8 Дж. Гальмівний момент дорівнює

1. 1Н·м 2. 0,1Н·м 3. 0,628Н·м 4. 0,2Н·м 5. 3.14 Н·м

28. Момент інерції кільця масою 500г і радіусом 10см відносно осі, яка є дотичною до кільця, дорівнює

1. 0,050 кг·м^2 2. 0,010 кг·м^2 3. 0,020 кг·м^2 4. 0,100 кг·м^2 5. 0,500 кг·м^2.

29. Повна енергія обруча, що котиться по горизонтальній поверхні, дорівнює 14 Дж. Кінетична енергія поступального руху обруча при цьому дорівнює

1. 10Дж 2. 8Дж 3. 7Дж 4. 6Дж 5. 4Дж

30. Повна енергія суцільного циліндра, що котиться по горизонтальній поверхні, дорівнює 12 Дж. Кінетична енергія обертального руху циліндра при цьому дорівнює

1. 10 Дж; 2. 8 Дж 3. 7 Дж 4. 6 Дж 5. 4 Дж

31. Маховик обертається за законом $\varphi = 2 + 5t^2$ під дією моменту сили М= 500Н·м. Момент інерції маховика дорівнює

1. 5000кг ·м^2 2. 200кг ·м^2 3. 100кг ·м^2 4. 50кг ·м^2 5. 20кг ·м^2

32. Алюмінієва та залізна кулі урівноважені на важелі. $\rho_{Al} < \rho_{Fe}$. Кулі мають однакову масу. Якщо кулі занурити у воду,

1. рівновага важеля не порушиться
2. переважить залізна куля
3. переважить алюмінієва куля
4. речовина куль не впливає на рівновагу

33. Алюмінієва та залізна кулі урівноважені на важелі. $\rho_{Al} < \rho_{Fe}$. Кулі мають однаковий об’єм. Якщо кулі занурити у воду,

1. рівновага важеля не порушиться
2. переважить залізна куля
3. переважить алюмінієва куля
4. речовина куль не впливає на рівновагу

Розділ 5. Неінерціальні системи відліку

Тема: Основне рівняння динаміки у неінерціальних системах відліку. Сили інерції при поступальному русі системи відліку. Сили інерції при обертальному русі системи відліку: відцентрова сила інерції; сила Коріоліса.

Основні поняття і формули

● Основне рівняння динаміки у неінерціальній системі відліку має вигляд:

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{ін},$$

де $\vec{a}'$ – прискорення матеріальної точки в неінерціальній системі відліку К′, $\vec{F}$ –рівнодійна сил, які діють на матеріальну точку з боку інших тіл, $\vec{F}_{in}$ – сили інерції.

● При поступальному русі неінерціальної системи відліку К′ відносно інерціальної системи К з прискоренням $\vec{a}_0$ сила інерції (поступальна)

$$\vec{F}_{ін} = -\, m\vec{a}_0 . \qquad (5.1)$$

● Рівняння руху матеріальної точки в неінерціальній системі відліку, яка обертається зі сталою кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ відносно нерухомої осі

$$m\vec{a}' = \vec{F} + m\omega^2\vec{R} + 2m[\vec{v}'\vec{\omega}]. \qquad (5.2)$$

До рівняння, окрім сили $\vec{F}$, входять:

а) відцентрова сила інерції, спрямована вздовж радіуса кола, яке матеріальна точка описує в процесі свого руху,

$$\vec{F}_{вц} = m\omega^2\vec{R}, \qquad (5.3)$$

де $\vec{R}$ – вектор, що лежить у площині обертання і проведений від осі обертання до матеріальної точки;

б) сила Коріоліса

$$\vec{F}_{кор} = 2m[\vec{v}'\vec{\omega}], \qquad (5.4)$$

де $\vec{v}'$- швидкість, з якою матеріальна точка рухається відносно неінерціальної системи відліку К′.

Напрям сили визначається за правилом векторного добутку (тобто за правилом правого свердлика); величина сили Коріоліса залежить від кута α між напрямами векторів $\vec{v}'$ і $\vec{\omega}$ і дорівнює

$$F_{кор} = 2mv'\omega\sin\alpha \qquad (5.4а)$$

Отже силу Коріоліса слід ураховувати тільки при русі тіла під кутом $\alpha \neq 0$ відносно осі обертання системи відліку.

● Якщо система обертається нерівномірно, виникає ще одна сила інерції $\vec{F}_i = m[\vec{r}\cdot\vec{\varepsilon}]$, де $\vec{\varepsilon}$ - кутове прискорення системи.

Методичні вказівки. При розв'язанні задач про рух тіла у неінерціальній системі відліку передусім необхідно встановити, відносно яких тіл система відліку є неінерціальною. Рівняння руху в неінерціальних системах відліку мають такий самий вигляд, як і в інерціальних, якщо до сил взаємодії з іншими тілами додати сили інерції. Отже при графічному зображенні, крім сил, що діють на тіло з боку оточення, належить враховувати ще сили інерції. Розв'язання задачі продовжують у тій самій послідовності, як це проводилось в інерціальних системах: записують рівняння руху тіла, обирають найзручнішу систему координат, знаходять проекції рівняння на координатні осі і т. ін .

Слід зауважити, що розв'язання задачі про рух тіла у неінерціальній системі відліку та пояснення особливостей цього руху, зв'язаних, наприклад, з обертанням системи, можливо й відносно інерціальної системи, без уведення сил інерції, але введення у розгляд цих сил формалізує задачу і спрощує її розв'язання.

Приклади розв'язання задач

Приклад 5.1. Тіло, що знаходиться на вершині похилої площини, утримується силою тертя За який час тіло спуститься з похилої площини, якщо вона у свою чергу починає рухатися в горизонтальному напрямку з прискоренням a_0=0,8 м/с^2? Довжина площини l=1,6м, кут нахилу α=30º, коефіцієнт тертя між тілом і площиною μ=0,6.

a_0=0,8 м/с^2
l=1,6м
α=30º
μ=0,6
t=?

Розв'язання

Згідно постановці задачі необхідно визначити час руху тіла вздовж похилої площини. Зв'яжемо систему відліку і систему координат (рис.5.1) з похилою площиною.

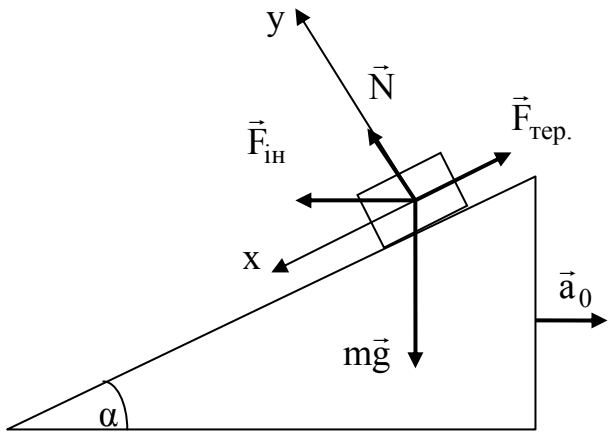


Рис.5.1

З боку оточення на тіло діють сила тяжіння $m\vec{g}$, реакція опори $\vec{N}_1$ і сила тертя $\vec{F}_{тер}$, рівнодійна яких за відсутністю руху похилої площини дорівнює нулю, а саме тіло залишається у стані спокою.

З початком руху площини з прискоренням a_0 система відліку буде неінерціальною. До діючих сил слід додати силу інерції

$$\vec{F}_{ін} = m\vec{a}_0 . \qquad (1)$$

Умова рівноваги порушується, і

тіло починає зісковзувати вздовж площини. З рівняння руху тіла можна знайти його прискорення $\vec{a}$ відносно похилої площини. Користуючись формулою шляху при рівноприскореному русі без початкової швидкості, знайдемо час сковзання t:

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a}} \ . \qquad (2)$$

Рівняння руху тіла у неінерціальній системі відліку має такийий вигляд:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тер} + \vec{F}_{ін} = m\vec{a} \, . \qquad (3)$$

У проекціях на координатні осі (див. рис. 3.1) рівняння (3) з урахуванням виразу (1) для сили інерції породжує систему, яка складається з двох скалярних рівнянь:

$$mg\sin\alpha - F_{тер} + ma_0\cos\alpha = ma \, ; \qquad (4)$$

$$-mg\cos\alpha + N + ma_0\sin\alpha = 0 \, . \qquad (5)$$

Додаємо до системи рівнянь (4), (5) вираз для сили тертя

$$\vec{F}_{тер} = \mu N \, . \qquad (6)$$

Розв'язок системи (4)-(6) відносно прискорення тіла дає

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) + a_0(\cos\alpha + \mu\sin\alpha). \qquad (7)$$

Користуючись формулою (2), остаточно отримуємо

$$t = \sqrt{\frac{2l}{g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) + a_0\left(\cos\alpha + \mu\sin\alpha\right)}} = \qquad (8)$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6}{9{,}8(\sin 30° - 0{,}6 \cdot \cos 30°) + 0{,}8(\cos 30° + 0{,}6\sin 30°)}} = 2{,}08 \text{ (с)}$$

Відповідь: t = 2,08 с.

Приклад 5.2. На яку частку $\left(\Delta P/P\right)$ ваги тіла на полюсі P зменшується вага тіла на широті $\varphi = 45^0$ за рахунок обертання Землі навколо власної осі? Який кут β утворює напрямок сили тяжіння з радіусом Землі? Радіус Землі взяти рівним $R_з = 6370$ км.

$\varphi = 45^0$ $R_з = 6370$ км $M_З = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг $G = 6{,}67 \cdot 10^{11}$ м$^3 \cdot$кг$^{-1} \cdot$с$^{-2}$ $T = 8{,}64 \cdot 10^4$ с	Розв'язання
$\frac{\Delta P}{P}$? β – ?	

Вага тіла, (тобто сила тиску на нерухому відносно нього опору), чисельно дорівнює силі тяжіння $F_т$, що діє на тіло. На тіло маси m на поверхні Землі діє не тільки сила гравітаційного притягання $F_{грав.} = G\frac{mM_З}{R_З^2}$ (G – гравітаційна стала, $M_З$ – маса Землі) , але й відцентрова сила

інерції $\vec{F}_{вц}$, яка зумовлена добовим обертанням Землі навколо власної осі (рис.5.2). Відцентрова сила інерції спрямована по радіусу кола $r = R_З \cos\varphi$, вздовж якого обертається тіло, що знаходиться на широті φ, і дорівнює

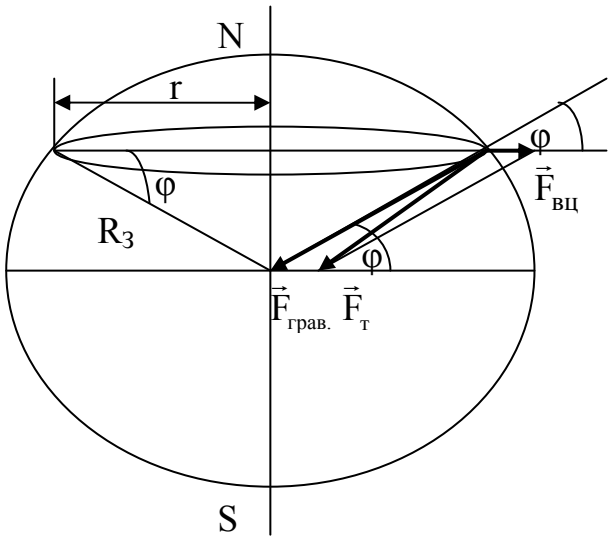


Рис. 5.2

$\vec{F}_{вц} = m\omega_З^2\vec{r}$ ($\omega_З = \dfrac{2\pi}{T}$ – кутова швидкість добового обертання Землі, T – період обертання Землі навколо власної осі, тобто тривалість доби). Таким чином, рівнодійна сила (сила тяжіння) $\vec{F}_т = m\vec{g}$ є векторною сумою двох сил,

$$\vec{F}_т = \vec{F}_{грав.} + \vec{F}_{вц.}$$

Значення відцентрової сили зменшується з широтою φ, від максимального на екваторі, де $r=R_З$, до нуля на полюсах. Відповідно, сила тяжіння збільшується з широтою і на полюсі досягає значення $\vec{F}_{грав.}$. Отже, на полюсі вага тіла $P=F_{грав.} = G\dfrac{mM_З}{R_З^2}$.

Оскільки напрями $\vec{F}_{грав.}$ і $\vec{F}_т$ на будь якій широті відрізняються несуттєво (внаслідок того, що $\vec{F}_{вц} << \vec{F}_{грав.}$), модуль сили тяжіння можна наближено представити як різницю $\vec{F}_{грав.}$ і проекції $\vec{F}_{вц}$ на напрям вектора $\vec{F}_{грав.}$, яка дорівнює $F_{вц}\cos\varphi$. На цьому шляху отримуємо

$$F_т = G\frac{mM_З}{R_З^2} - m\omega_З^2 R_З \cos^2\varphi$$

$$\Delta P = F_{грав.} - F_т = m\omega_З^2 R_З \cos^2\varphi.$$

І таким чином:

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{F_{вц}\cos\varphi}{F_{грав}} = \frac{m\omega_З^2 R_З \cos^2\varphi}{G\dfrac{mM_З}{R_З^2}} = \frac{\omega_З^2 R_З^3 \cos^2\varphi}{GM_З} = \frac{4\pi^2 R_З^3 \cos^2\varphi}{T^2 GM_З} = \qquad (1)$$

$$= \frac{4\cdot 3{,}14^2\cdot(6{,}37\cdot 10^6)^3\cdot 0{,}5}{(8{,}64\cdot 10^4)^2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}} = 1{,}71\cdot 10^{-3}.$$

Для визначення кута β між напрямом сили тяжіння і радіусом Землі, з трикутника ABC (рис. 5.3) знаходимо

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{F_{вц}\sin\varphi}{F_{грав} - F_{вц}\cos\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\frac{F_{грав}}{F_{вц}} - \cos\varphi}. \qquad (2)$$

Переписуючи співвідношення $\frac{F_{грав}}{F_{вц}} - \cos\varphi$ з використанням результату (1) отримуємо:

$$\frac{F_{грав}}{F_{вц}} - \cos\varphi = \frac{F_{грав}\cos\varphi}{F_{вц}\cos\varphi} - \cos\varphi = \left(\frac{F_{грав}}{F_{вц}\cos\varphi} - 1\right)\cos\varphi = \left(\frac{P}{\Delta P} - 1\right)\cos\varphi.$$

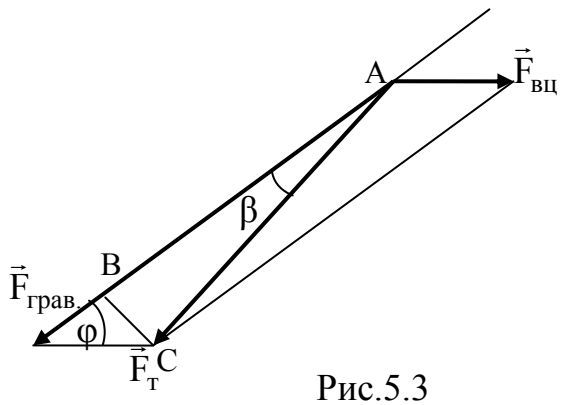


Рис.5.3

Нехтуючи одиницею у порівнянні зі значенням $\frac{P}{\Delta P}$, маємо більш просте співвідношення

$$\frac{F_{грав}}{F_{вц}} - \cos\varphi = \frac{P}{\Delta P}\cos\varphi. \qquad (3)$$

Після підстановки (3) у (2) для кута β отримуємо:

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{\sin\varphi}{\left(\frac{P}{\Delta P}\right)\cos\varphi} = \frac{\Delta P}{P}\mathrm{tg}\varphi. \qquad (4)$$

$\mathrm{tg}\beta = 1{,}71\cdot 10^{-3}\cdot \mathrm{tg}45° = 1{,}71\cdot 10^{-3}$; $\beta = 0{,}098°$.

Відповідь: $\frac{\Delta P}{P} = 1{,}71\cdot 10^{-3}$; $\beta = 0{,}098°$.

Зауважимо, що насправді Земля є еліпсоїдом обертання, сплюснутим з боку полюсів, і її радіус $R_З$, залежить від широти. Ця обставина поряд з обертанням Землі, також впливає на зменшення ваги тіла із зменшенням широти.

Приклад 5.3. Порожиста сталева кулька підіймається з глибини води h = 400м на поверхню. Швидкість установленого руху кульки v′ = 1,2 м/с. На яку відстань в якому напрямі відхилиться кулька? Широта місцевості φ= 60°.

h = 400м
v′ = 1,2 м/с
$T = 8{,}64\cdot 10^4$ с
φ= 60°

Δx - ?

Розв’язання.

Розглядаємо рух кульки у системі відліку, яка зв’язана із Землею. На кульку діють сили: гравітаційна $\vec{F}_g$, відцентрова $\vec{F}_{вц}$, виштовхуюча (архімедова) $\vec{F}_A$, стоксова сила опору з боку середовища $\vec{F}_c$ та сила Коріоліса $\vec{F}_k$. Векторна сума перших чотирьох сил визначає рух по вертикалі для

заданого місця Землі. Їх рівнодійна дорівнює нулю, внаслідок чого рух кульки по вертикалі є рівномірним.

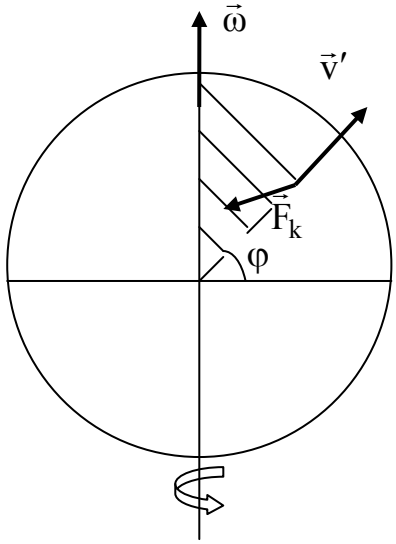


Рис.5.4

Сила Коріоліса, яка дорівнює

$$\vec{F}_k = 2m[\vec{v}'\vec{\omega}],$$

перпендикулярна до площини, в якій лежать вектори $\vec{v}'$ і $\vec{\omega}$. Її напрямок визначається за правилом правого свердлика. У даному випадку вона перпендикулярна до площини рисунка (рис. 5.4) і спрямована на нас. Величина сили

$$F_k = 2mv'\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = 2mv'\omega\cos\varphi, \quad (1)$$

де v'– швидкість, з якою кулька рухається відносно Землі; $\omega = \frac{2\pi}{T}$ – кутова швидкість обертання Землі; T – добовий період обертання Землі; φ – широта місцевості.

Сила $\vec{F}_k$ надає кульці у напрямку горизонтально на захід постійне прискорення величини

$$a_k = 2v'\omega\cos\varphi. \quad (2)$$

За формулою шляху при рівноприскореному русі без початкової швидкості знаходимо, що зміщення кульки у напрямку на захід Δs за час підйому $t = \frac{h}{v'}$ дорівнює

$$\Delta s = \frac{a_k t^2}{2} = v'\omega\cos\varphi \cdot \left(\frac{h}{v'}\right)^2 = \frac{2\pi h^2 \cos\varphi}{Tv'}. \quad (3)$$

Чисельний розрахунок за формулою (3) дає Δs = 4,65м.
Відповідь: Δs = 4,65м.

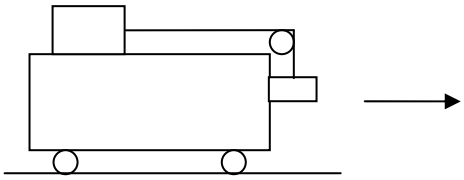
Задачі для самостійного розв'язування.

5.1. Космічний корабель масою m=10^6 кг підіймається вертикально вверх. Сила тяги його двигунів F=$2{,}94\cdot10^7$ Н. Визначити прискорення корабля а та вагу космонавта P_1, який знаходиться в ньому, якщо на Землі його вага дорівнює P = 650 Н.

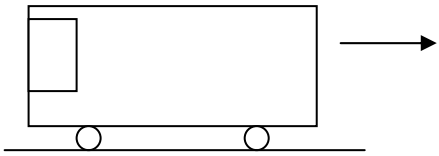
5.2. На яку частку $\left(\Delta P/P\right)$ ваги тіла P на полюсі зменшується вага тіла на широті $\varphi = 30^0$ за рахунок обертання Землі навколо власної осі? Радіус Землі взяти рівним $R_З = 6370$ км.

5.3. У ліфті тіло падало з висоти h=2 м протягом t=0,8 с. Визначити величину та напрямок прискорення ліфта.

5.4. Яку постійну горизонтальну силу треба прикласти до візка, маса якого m=1 кг (див. рис.), щоб бруски масами m_1= 0,4кг і m_2= 0,2кг залишались нерухомими відносно візка? Коефіцієнт тертя між кожним з вантажів і поверхнею візка $\mu = 0{,}2$. Масою блока та нитки знехтувати.



5.5. До стінки візка, що рухається з прискоренням, прикладений брусок (див. рис.). При якому прискоренні візка брусок буде залишатися у стані спокою, тобто не падає на дно візка)? Коефіцієнт тертя між стінкою та бруском μ = 0,45.



5.6. При гальмуванні потягу його швидкість рівномірно зменшується від $v_1 = 54$км/год до $v_2 = 28.8$км/год за t=3,5 с. Яке найменше значення може мати коефіцієнт тертя μ між чемоданом і полицею, щоб чемодан залишився у спокої при гальмуванні?

5.7. Трамвай масою m = 4,5 т їде по закругленій траєкторії радіуса R = 110м із швидкістю v=10 км/год. Визначити силу бокового тиску коліс на рейки колії.

5.8. Корабель рухається вздовж меридіана на північ із швидкістю v′=60км/год. Чому дорівнює прискорення корабля? На яку відстань Δx і в якому напрямі відхилятиметься корабель від курсу за t = 1 год. внаслідок дії сили Коріоліса? Широта місцевості φ = 60°.

5.9. Краплина дощу падає з висоти h = 200м. Швидкість установленого руху краплини v = 4 м/с. На яку відстань Δx і в якому напрямі відносно вертикалі відхилиться краплина внаслідок дії сили Коріоліса? Широта місцевості φ = 45°.

5.10. Річка, швидкість течії якої $v' = 0{,}5$м/с, тече з півночі на південь. Широта місцевості φ = 60°. Визначити кут нахилу α, який утворює поверхня води із горизонтом внаслідок дії сили Коріоліса, та перепад висот Δh рівнів води біля правого та лівого берегів, якщо ширина річки d = 1км.

Тестові завдання

Вибрати вірну відповідь.

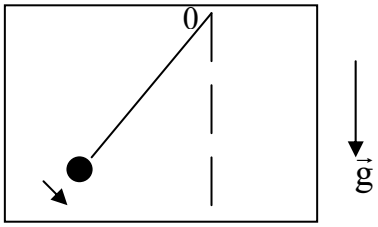
1. Сила Коріоліса, яка діє на тіло у неінерціальній обертовій системі відліку, змінює
   1. величину швидкості тіла
   2. величину та напрям швидкості
   3. напрям швидкості

2. Якщо швидкість частинки паралельна осі обертання системи відліку, сила Коріоліса, що діє на частинку, дорівнює

1. $2mv\omega$ 2. 0 3. $m\omega^2 R$ 4. $-m\vec{a}_0$

3. Маятник може обертатися навколо осі 0, з'єднаної з кабіною. Маятник відхиляють убік і відпускають. Коли він проходить положення рівноваги, кабіна починає падати вільно. При вільному падінні кабіни

1.маятник зупиниться
2. маятник буде обертатися
3. маятник буде коливатися

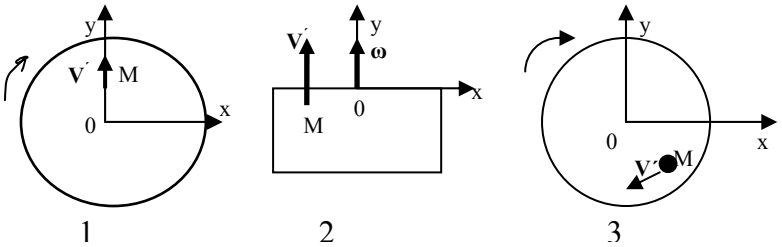


4. Сила Коріоліса не впливає на траєкторію руху снаряда при пострілі:

1. на екваторі вздовж паралелі
2. на полюсі Землі вертикально вгору
3. на екваторі вертикально вгору
4. на полюсі Землі вздовж меридіану

5. На рисунку показані три системи відліку, які обертаються навколо осі О. Відносно кожної з них із швидкістю $\vec{v}$ рухається матеріальна точка М. На точку М діє тільки відцентрова сила інерції, не діє сила Коріоліса, у системі

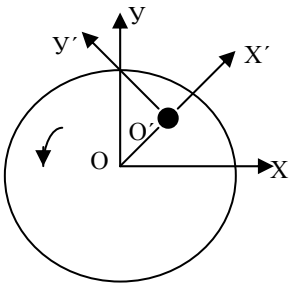
1. 1
2. 2
3. 3



6. Маятник, підвішений у кабіні ліфта, відхилили від положення рівноваги. Потім одночасно звільнили і маятник, і кабіну. При вільному падінні кабіни маятник

1. залишиться нерухомим
2. повернеться у положення рівноваги
3. буде обертатися
4. буде коливатися

7. Куля, прикріплена до нитки, обертається з постійною кутовою швидкістю відносно центра 0. З кулею жорстко зв'язана система координат X´O´Y´. $\vec{F}_{в.ц.}$ - відцентрова сила інерції, $\vec{F}$ - рівнодіюча всіх сил, що діють на тіло з боку інших тіл.



А) При описі руху кулі відносно нерухомої інерціальної системи відліку XOY справедливе рівняння

$$1.\ m\vec{a}=\vec{F} \qquad 2.\ m\vec{a}'=\vec{F}+\vec{F}_{в.ц.}\neq 0 \qquad 3.\ m\vec{a}'=\vec{F}+\vec{F}_{в.ц.}=0$$

Б) При описі руху кулі відносно неінерціальної системи відліку X´O´Y´, що обертається разом з кулею, справедливе рівняння

$$1.\ m\vec{a}=\vec{F} \qquad 2.\ m\vec{a}'=\vec{F}+\vec{F}_{в.ц.}\neq 0 \qquad 3.\ m\vec{a}'=\vec{F}+\vec{F}_{в.ц.}=0$$

8. Сила Коріоліса діє на тіло, якщо воно

1. рухається у системі відліку, яка рівномірно обертається;
2. знаходиться у стані спокою в системі, яка рівномірно обертається;
3. знаходиться у стані спокою в системі, яка рухається прямолінійно прискорено.

9. Тіло пересувається по поверхні диска, який обертається навколо своєї осі. Робота сили Коріоліса при цьому

1. дорівнює нулю 2. залежить від швидкості пересування тіла
3. залежить від траєкторії руху тіла 4. залежить від швидкості обертання диска

10. На теплу течію в океані, що спрямована з екватора до північного полюса діє сила Коріоліса, спрямована

1. на захід 2. на схід 3. донизу 4. вертикально уверх

11. Сила Коріоліса, що діє на потік води у річці, яка тече

А) у північній півкулі вздовж меридіану, спрямована

1. до лівого берега 2. до правого берега 3. донизу 4. вертикально уверх

Б) у південній півкулі вздовж меридіану, спрямована

1. до лівого берега 2. до правого берега 3. донизу 4. вертикально уверх

12. Сила Коріоліса, що діє на снаряд, випущений вздовж паралелі

А) з заходу на схід, спрямована

1. на захід; 2. на схід; 3. до землі; 4. від землі.

Б) зі сходу на захід, спрямована

1. на захід; 2. на схід; 3. до землі; 4. від землі.

13. Сила Коріоліса, що діє на метеорит, який падає на землю, спрямована

1. на захід; 2. на схід; 3. до землі; 4. вертикально уверх.

14. Два тіла, зв'язані нерозтяжною ниткою, обертаються з однаковими кутовими швидкостями на горизонтальній поверхні відносно вертикальної осі, яка ділить нитку у відношенні 2:5. Відношення маси першого тіла до маси другого тіла становить

1. $5/2$; 2. $2/5$; 3. $4/25$; 4. $25/4$.

15. Дія відцентрової сили інерції

1. не впливає на прискорення вільного падіння;
2. збільшує прискорення вільного падіння із зменшенням широти;
3. зменшує прискорення вільного падіння із зменшенням широти.

16. У випадку, коли швидкість частинки паралельна осі обертання система відліку, на неї діє

1. відцентрова сила інерції та сила Коріоліса;
2. тільки сила Коріоліса;
3. тільки відцентрова сила інерції;
4. не діють сили інерції.

Розділ 6. Гідростатика і елементи гідродинаміки.

● **Тиск** – скалярна величина, яка дорівнює силі, що діє на одиницю площі поверхні тіла перпендикулярно до цієї поверхні (рис.6.1):

$$p = \frac{F_n}{S} = \frac{F\cos\alpha}{S}, \qquad (6.1)$$

де F_n - нормальна складова сили $\vec{F}$, яку називають силою тиску, що діє на поверхню S.

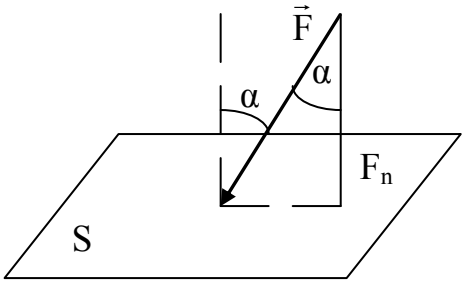


Рис.6.1 Тиск сили $\vec{F}$ на поверхню S визначається величиною її нормальної складової $F_n = F\cos\alpha$ та площею поверхні S.

● **Гідростатичний тиск** – тиск, зумовлений вагою стовпа рідини або газу. Він залежить від густини ρ і висоти стовпа h рідини (або газу):

$$p = \rho g h. \qquad (6.2)$$

Гідростатичний тиск на заданій глибині не залежить від напряму. Цим пояснюється "гідростатичний парадокс": тиск на дно посудини не залежить від форми посудини, в якій знаходиться рідина (рис.6.2).

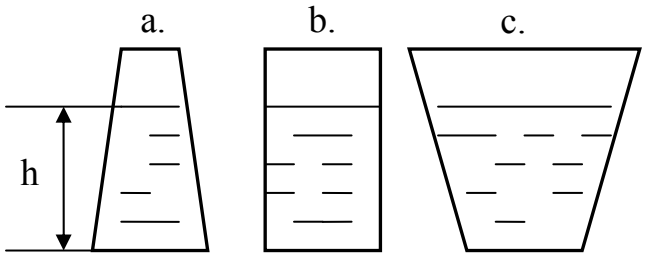


Рис.6.2 $p_a = p_b = p_c = \rho g h$

З урахуванням атмосферного тиску p_0 тиск у рідині на глибині h дорівнює:

$$p = p_0 + \rho g h. \qquad (6.3)$$

● **Атмосферний тиск** – це тиск на тіла, зумовлений дією сили тяжіння атмосферного повітря. Атмосферний тиск зменшується з висотою за експоненціальним законом (рис.6.3):

$$p = p_0 e^{-\rho_0 g h / p_0}, \qquad (6.4)$$

де p_0 і p - атмосферний тиск біля поверхні Землі та на висоті h; ρ_0 - густина повітря біля поверхні Землі. Тиск атмосферного повітря біля поверхні Землі (на рівні моря), врівноваженого при 0°C стовпчиком ртуті заввишки 760мм, називають **нормальним тиском.**

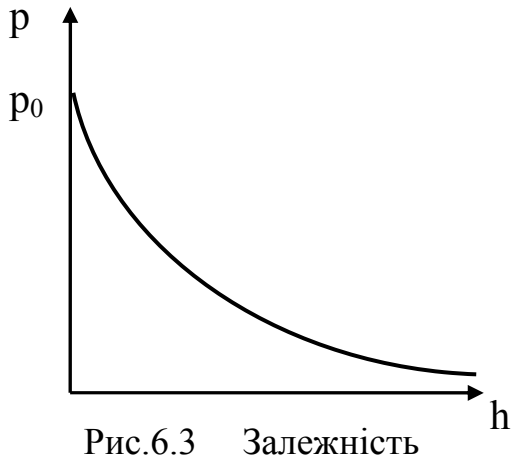


Рис.6.3 Залежність атмосферного тиску від висоти.

● **Закон Паскаля:** тиск у будь-якій точці рідини або газу, які перебувають у стані спокою, передається по всьому об'єму (в усіх напрямах) однаково.

Сили тиску в рідині - це сили пружності, які виникають під час її стискування. Сили тиску в газі зумовлені зіткненнями молекул із стінками посудини, в якій він міститься.

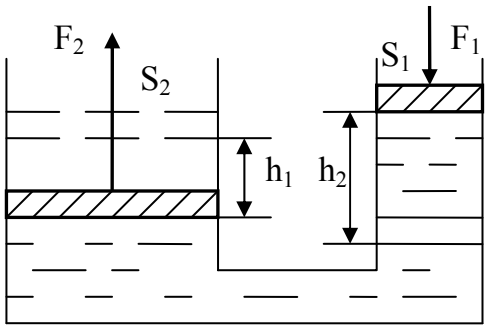


Рис.6.4 Принцип дії гідравлічного пресу.

Закон Паскаля лежить в основі роботи гідравлічних пресів (рис.6.4), підйомників, гідравлічних і пневматичних гальм автомобілів та деяких інших механізмів. Гідравлічний прес надає виграш у силі у стільки разів, у скільки площа його великого поршня більша за площу малого поршня:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{S_2}{S_1}. \qquad (6.4)$$

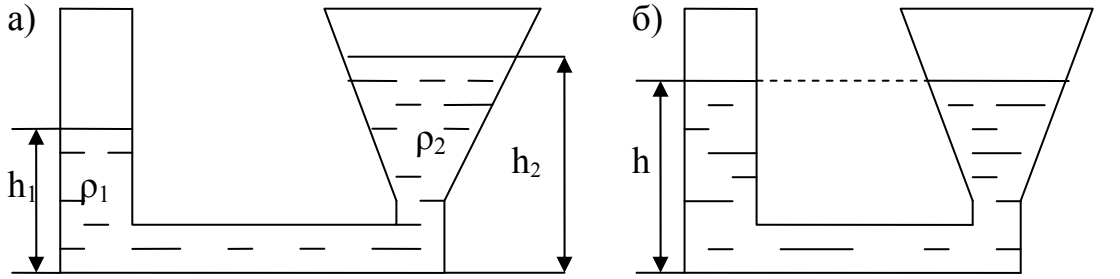
● **Закон сполучених посудин:**

Висоти урівноважених стовпів різнорідних не змішуваних рідин у відкритих сполучних посудинах обернено пропорційні значенням їх густини (рис.6.5,а):

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}. \qquad (6.5)$$

Тобто рівні рідини установлюються таким чином, що гідростатичний тиск на основи в обох посудинах є однаковим.

Якщо у сполучених посудинах знаходиться однорідна рідина ($\rho_1 = \rho_2$), то її вільна поверхня у всіх посудинах встановлюється на однаковому рівні (рис.6.5,б).



$\rho_1 > \rho_2; p_1 = p_2; h_1 < h_2$ $\qquad$ $\rho_1 = \rho_2 = \rho; p_1 = p_2; h_1 = h_2 = h$

Рис.6.5 Рівні рідини в сполучених посудинах.

● **Закон Архімеда:** на тіло, занурене в рідину або газ, діє виштовхуюча сила, яка дорівнює вазі витісненої тілом рідини (або газу) і спрямована вертикально уверх:

$$F_A = \rho g V, \qquad (6.6)$$

де V – об’єм витісненої рідини, який дорівнює об’єму зануреної в рідину частини тіла; ρ – густина рідини (або газу).

Виштовхуюча сила виникає через те, що на верхню і нижню поверхню тіла з боку рідини діють різні сили гідростатичного тиску, прикладені до тіла в точці, яка збігається з центром тяжіння витісненої тілом рідини.

Рівнодійна сили Архімеда і сили тяжіння $\vec{F}_т$, яка діє на тіло, носить назву **підйомної сили**.

$$\vec{F}_п = \vec{F}_A + \vec{F}_т; \qquad F_п = F_A - F_т.$$

Умови плавання тіл. В залежності від модуля і знака підйомної сили, що, у свою чергу, залежить від співвідношення між густиною рідини $\rho_р$ та середньою густиною тіла $\rho_т$, занурене тіло поводить себе по різному:

1. $F_A > F_т$; $\rho_р > \rho_т$; $F_п > 0$ − тіло спливає.
2. $F_A = F_т$; $\rho_р = \rho_т$; $F_п = 0$ − стан рівноваги, тіло може плавати на будь-якій глибині;
3. $F_A < F_т$; $\rho_р < \rho_т$; $F_п < 0$ − тіло опускається на дно.

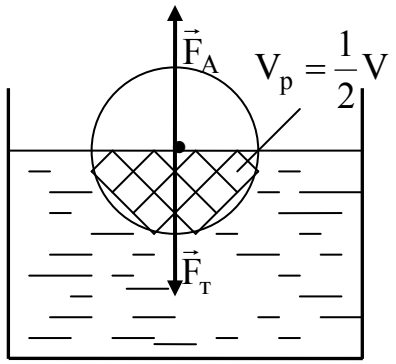


Рис. 6.6. Плавання тіла на поверхні рідини у випадку $\rho_т = 0{,}5\rho_р$

4. Однорідне тіло об'ємом $V_т$ плаває на поверхні рідини, якщо діюча на нього сила тяжіння урівноважується силою Архімеда: $\rho_т V_т = \rho_р V_р$, або $\frac{V_т}{V_р} = \frac{\rho_р}{\rho_т}$, де $V_р$ - об'єм частини тіла, зануреної у рідину, тобто об’єм витісненої тілом рідини (рис.6.6).

● **Теорема нерозривності течії.** Добуток швидкості течії нестисливої рідини на площу поперечного перерізу трубки течії є величина стала для даної трубки течії:

$$v_1 S_1 = v_2 S_2, \qquad (6.7)$$

де S_1, S_2 – площі перерізу трубки течії, v_1, v_2 –швидкості течії у перерізі S_1 і S_2, відповідно.

Трубкою течії називають частину рідини, обмежену лініями течії, тобто лініями, дотична до яких у кожній точці збігається з вектором швидкості потоку рідини $\vec{v}$ в даній точці простору.

● **Рівняння Бернуллі** для стаціонарного потоку ідеальної рідини (виводиться на основі закону збереження енергії)

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = const, \qquad (6.8)$$

де ρ – густина рідини, v – швидкість течії в деякому перерізі потоку, h – висота даного перерізу над рівнем відліку. p – тиск рідини в перерізі. Величина p у рівнянні (6.8) має назву статичного тиску, $\frac{\rho v^2}{2}$ – динамічного тиску, $\frac{\rho v^2}{2}$ – гідростатичного тиску, $\frac{\rho v^2}{2} + p$ – повного тиску рідини.

Швидкість витікання ідеальної рідини крізь малий отвір у широкій посудині (формула Торрічеллі)

$$v = \sqrt{2gh}, \qquad (6.9)$$

де h – висота стовпа рідини над отвором.

● **Сила опору** діє на тверде тіло, що рухається в газі або рідині.

При невеликих швидкостях опір обумовлений дією **сили в'язкого тертя**, величина якої пропорційна швидкості v, тобто

$$\vec{F} = -C\vec{v}, \qquad (6.10)$$

де C – коефіцієнт опору, який залежить від динамічної в'язкості середовища η, розмірів і форми тіла, його орієнтації відносно потоку.

Наприклад, для кульки радіусу r, що рухається зі швидкістю v у рідині або газі з густиною ρ та динамічною в'язкістю η, величина сили опору може бути визначена за допомогою емпіричної формули Стокса:

$$F = 6\pi\eta r v. \qquad (6.11)$$

При збільшенні швидкості, коли потік, який обтікає тіло набуває турбулентного (вихрового) характеру, сила опору, яку в цьому разі називають **силою лобового опору**, пропорційна густині середовища ρ, квадрату відносної швидкості v і площі перерізу тіла S, тобто

$$F = C_1 \rho S v^2, \qquad (6.12)$$

де C_1 – коефіцієнт пропорційності, який залежить від числа Рейнольдса, форми тіла та його орієнтації у потоці. Звернемо увагу на суто емпіричний характер співвідношень (6.11) і (6.12).

Число Рейнольдса – безрозмірна величина, чисельне значення якої визначає характер течії (ламінарний або турбулентний).

$$Re = \frac{\rho \langle v \rangle d}{\eta} = \frac{\langle v \rangle d}{\nu}, \qquad (6.13)$$

де $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ – кінематична в'язкість, d – характерний лінійний розмір, $\langle v \rangle$ – середня швидкість течії. Наприклад, у випадку руху рідини або газу вздовж труби $\langle v \rangle$ – середня (по перерізу труби) швидкість течії, d – діаметр труби.

Приклади розв'язання задач

Приклад 6.1. В акваріум з прямокутним дном розміром 30х50 см^2 налили воду. Визначити висоту h рівня води в акваріумі, якщо сила тиску води на дно $F_д$ дорівнює половині силі тиску $F_{ст}$ на бічну поверхню.

a=0,3м b=0,5м $F_л$=0,5$F_{ст}$	Розв'язання. За визначенням сила тиску на дно акваріуму $F_д = p \cdot S$, де $p = \rho gh$ – гідростатичний тиск на дно, S = a·b – площина дна. Тоді знаходимо
h - ?	

$$F_д = \rho gha \cdot b. \qquad (1)$$

Тиск на стінки акваріуму дорівнює нулю біля поверхні води, і $p = \rho gh$ – біля дна. Залежність тиску від глибини є, очевидно, лінійною, тому для оцінки сили тиску на бічну поверхню можна скористатися середнім значенням $\langle p \rangle$, яке визначається середнім арифметичним:

$$\langle p \rangle = \frac{0 + \rho gh}{2} = \frac{1}{2}\rho gh. \qquad (2)$$

Площина бічної поверхні, на яку діє сила тиску, дорівнює

$$S_б = 2(a + b)h. \qquad (3)$$

З урахуванням (2) і (3) маємо:

$$F_{ст} = \rho gh^2(a + b). \qquad (4)$$

Користуючись (1) і (4), дістаємо значення h:

$$\rho gh^2(a + b) = 2\rho gha \cdot b;$$

$$h = \frac{2ab}{a + b}. \qquad (5)$$

Чисельні розрахунки за формулою (5) показують h = 0,375м.

Приклад 6.2. У сполучених посудинах знаходиться вода. Діаметр однієї з посудин у 4 рази більший за діаметр другої. У широку посудину наливають шар олії (густиною $\rho_{ол.}$= 800 кг/м^3) заввишки h_1=50см. Наскільки підійметься рівень води у вузькій посудині порівняно з початковим?

$\rho_в$=10^{3}кг/м^3 $\rho_{ол}$=0,8·10^{3}кг/м^3 h_1=0,5м $\frac{d_1}{d} = 4$	Розв'язання. Нехай рівень води у широкій посудині після того, як у неї налили олію, знизився на Δh (рис.6.7). Тоді об'єм води, який дорівнює $\Delta V_1 = S_1 \Delta h$, перейде у вузьку посудину, де займе об'єм $\Delta V_2 = S_2 h_2$. За умови нестисливості рідини, $\Delta V_1 = \Delta V_2$, тобто
h_2 – ?	

$S_1 \Delta h = S_2 h_2$, де $S_1 = \frac{\pi d_1^2}{4}$, $S_2 = \frac{\pi d_2^2}{4}$ – відповідно

площі перерізу широкої і вузької посудин. Звідки отримуємо

$$\Delta h = \frac{S_2}{S_1} h_2 = \frac{d_2^2}{d_1^2} h_2 \qquad (1)$$

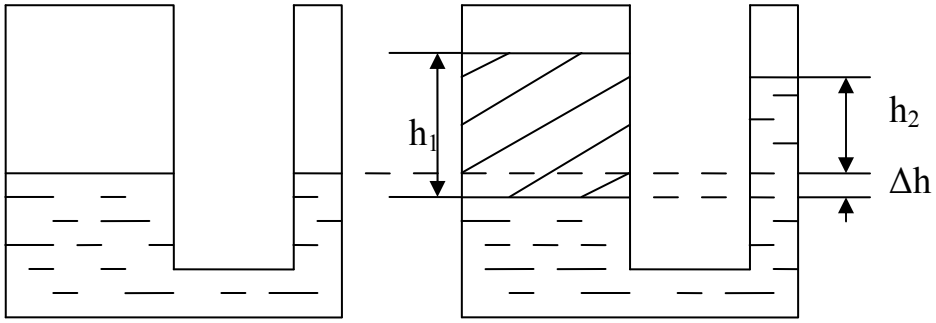


Рис.6.7

Величину Δh визначимо, користуючись умовою рівноваги рідини у сполучених посудинах, тобто однаковості гідростатичних тисків у колінах. Причому відлік висоти стовпчиків будемо здійснювати від найнижчого рівня води рівня води (у широкій посудині).

$$\rho_{ол.} h_1 g = \rho_в (h_2 + \Delta h) g . \qquad (2)$$

З урахуванням (1) вираз (2) набуває вигляду:

$$\rho_{ол.} h_1 = \rho_в \left(h_2 + \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2 h_2 \right) = \rho_в \left(1 + \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2 \right) h_2 .$$

Звідки знаходимо $$h_2 = \frac{h_1}{\left(1 + \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2 \right)} \cdot \frac{\rho_{ол.}}{\rho_в} .$$

Чисельний розрахунок дає: $$h_2 = \frac{0,5}{1 + \frac{1}{16}} \cdot \frac{0,8 \cdot 10^3}{1 \cdot 10^3} = \frac{16}{17} \cdot 0,4 = 0,376 \approx 0,38 \text{ (м)}.$$

Відповідь: h_2 = 0,38м.

Приклад 6.3. Металевий кубик плаває на поверхні ртуті так, що у ртуть занурена чверть його об'єму. Яка частина його об'єму буде занурена у ртуть, якщо зверху налити шар води, який повністю закриє тіло?

$\rho_{рт}=13,6 \cdot 10^3$ кг/м^3 $\rho_в=1 \cdot 10^3$ кг/м^3 $V_1=0,25$ V	Розв'язання. За умови плавання кубика у ртуті сила тяжіння має дорівнювати силі Архімеда;
$k = V_1' / V$ – ?	

$$\rho g V = \rho_{рт} g V_1 = \frac{1}{4} \rho_{рт} g V ,$$

де ρ – густина матеріалу кубика. Звідки знаходимо

$$\rho = \frac{1}{4}\rho_{рт} \quad (1).$$

Якщо поверх ртуті налита вода (рис.6.8), виштовхуюча сила складається з двох доданків – сили $F_{A1} = \rho_{рт} g V_1' = \rho_{рт} g k V$, що діє на частину тіла $k = V_1'/V$, занурену у ртуть, і сили F_{A2}, що діє на об'єм тіла, який покриває вода.

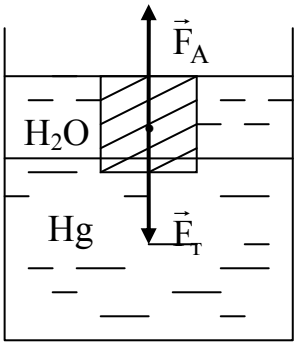


Рис. 6.8.

$$F_{A2} = \rho_в g(V - V_1') = \rho_в g(1-k)V.$$

Умова рівноваги кубика у цьому випадку виглядає як

$$\rho_{рт} g k V + \rho_в g(1-k)V = \rho g V.$$

З урахуванням знайденого для густини матеріалу виразу (1), попередня умова набуває вигляду:

$$\rho_{рт} g k V + \rho_в g(1-k)V = \frac{1}{4}\rho_{рт} g V,$$

Скорочуючи на gV, маємо:

$$\rho_{рт} k + \rho_в (1-k) = \frac{1}{4}\rho_{рт}.$$

І остаточно, знаходимо для k:

$$k = \frac{0{,}25\rho_{рт} - \rho_в}{\rho_{рт} - \rho_в}.$$

Чисельний розрахунок дає: $k = \dfrac{(0{,}25 \cdot 13{,}6 - 1)\cdot 10^3}{(13{,}6-1)\cdot 10^3} = 0{,}19$.

Відповідь: k = 0,19.

Приклад 6.4. В посудині з гліцерином тоне свинцева кулька. Визначити максимальне значення діаметра кульки, при якому рух шарів гліцерину, спричинений рухом кульки, залишається ламінарним. В'язкість гліцерину η=1,0 Па·с.

Розв'язання.

η=1,0 Па·с $\rho_{гл}$=1,26·10^3 кг/м^3 $\rho_{св}$=11,3·10^3 кг/м^3 $Re_{кр}$= 0,5	Критерієм змін руху рідини (який виникає завдяки силам внутрішнього тертя) внаслідок падіння кульки, є число Рейнольдса Re. Якщо число Рейнольдса менше від деякого критичного значення $Re_{кр}$, рух рідини буде ламінарним, в протилежному випадку – турбулентним.
d_{dax} - ?	

Якщо тіло, яке рухається в рідині, має форму кулі діаметром d, то число Рейнольда визначається як

$$Re = \frac{\rho v d}{\eta}, \qquad (1)$$

де ρ – густина рідини (в нашому випадку $\rho_{гл}$); η – коефіцієнт внутрішнього тертя рідини; v – швидкість руху кульки.

К значення числа дорівнює $Re_{кр} = 0{,}5$.

Сили, які діють на кульку у процесі руху, це:

1) сила тяжіння кульки $F_т = \rho_{св} g V = \frac{1}{6}\pi\rho_{св} d^3$, де $\rho_{св}$ – густина свинцю, V– об'єм кульки;

2) виштовхуюча сила F_A, яка визначається за законом Архімеда,

$$F_A = \rho_{гл} V g = \frac{1}{6}\pi\rho_{гл} g d^3, \quad \text{де } \rho_{гл} \text{ – густина гліцерину;}$$

3) сила внутрішнього тертя $F_{тр}$, яка визначається формулою Стокса,

$$F_{тр} = 6\pi\eta R v = 3\pi\eta d v.$$

При стаціонарному русі кульки в рідині (v = const) сила тяжіння урівноважується сумою виштовхуючої сили та сили внутрішнього тертя:

$$\frac{1}{6}\pi\rho_{св} d^3 = \frac{1}{6}\pi\rho_{гл} g d^3 + 3\pi\eta d v,$$

Звідки знаходимо $$v = \frac{(\rho_{св} - \rho_{гл}) g}{18\eta} d^3. \quad (2)$$

Користуючись (1) і (2) знайдемо d:

$$d = \sqrt[3]{\frac{18\eta^2 Re}{\rho_{гл}(\rho_{св} - \rho_{гл}) g}}.$$

Максимальне значення діаметра кульки має відповідати критичному значенню числа Рейнольдса. На основі вище означеного, маємо

$$d_{макс} = \sqrt[3]{\frac{18\eta^2 Re_{кр}}{\rho_{гл}(\rho_{св} - \rho_{гл}) g}}.$$

Розмірність d_{max}, яке визначається (3)

$$[d] = \left(\frac{Па^2 \cdot с^2}{кг^2 \cdot м^{-6} \cdot м \cdot с^{-2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{кг^2 \cdot м^2 \cdot с^4 \cdot м^5}{с^4 \cdot кг^2 \cdot м^4}\right)^{\frac{1}{3}} = м.$$

Користуючись $\rho_{гл} = 1{,}26 \cdot 10^3$ кг/м^3; $\rho_{св} = 11{,}3 \cdot 10^3$ кг/м^3, здійснюючи чисельні розрахунки за формулою (3), остаточно отримуємо:

$$d_{макс} = \sqrt[3]{\frac{18 \cdot 1 \cdot 0{,}5}{1{,}26 \cdot 10^3 \cdot (11{,}3 - 1{,}26) \cdot 10^3 \cdot 9{,}8}} = 4{,}17 \cdot 10^{-3}.$$

Відповідь: $d_{макс} = 4{,}17 \cdot 10^{-3}$ м.

Задачі для самостійного розв'язування.

6.1. У циліндричну посудину радіуса R=15см налили воду. Визначити висоту h рівня води в посудині, якщо сила тиску води на дно $F_д$ дорівнює силі тиску $F_{ст}$ на бічну поверхню.

6.2. Мідна куля з порожниною всередині має вагу у повітрі 2.64 Н, а у воді – 2,21 Н. Визначити об'єм внутрішньої порожнини.

6.3. Об'єм човна v=1,5м^3, маса M=35кг. Скільки пасажирів (маса кожного m=70кг) може уміститися в човні, якщо найменша висота надводного борту h=10см? Площа перерізу корпуса човна на рівні ватерлінії 3,4м^2.

6.4. Стрижень шарнірно укріплений за верхній кінець, а його нижній кінець опущений у воду. Стрижень знаходиться у рівновазі, коли у воду занурено 2/3 його довжини. Визначити густину матеріалу стрижня.

6.5. Визначити найменшу площину плоскої криги, яка здатна утримати людину вагою 75кг.

6.6. У сполучені посудини налита ртуть, а поверх неї в одну посудину стовпчик олії висотою 50см, а в другу – стовпчик гасу висотою 20см. Визначити різницю рівнів ртуті в обох посудинах.

6.7. Малий поршень гідравлічного преса за один хід опускається на 20см під дією сили 0,5кН, а великий підіймається на 1см. З якою силою діє прес на затиснуте в ньому тіло, якщо його к. к. д. дорівнює 60%?

6.8. В посудину за одиницю часу вливається об'єм води $V_1 = 0{,}2$ л/с. У дні посудини зроблений отвір діаметром $d = 1{,}4$ см. Який рівень води буде утримуватися в посудині?

6.9. Струмінь води виштовхується вертикально вверх насосом через отвір діаметром $d = 2$ см. Діаметр поршня насоса $D = 20$ см; швидкість руху поршня $v = 0{,}1$ м/с. Визначити: а) надлишковий тиск води в циліндрі насоса; б) висоту, на яку підніметься струмінь води.

6.10. Бак висотою $h = 1$ м наповнений водою. На відстані $h_1 = 0{,}75$ м від верхнього краю бака утворився маленький отвір. На якій відстані від бака попадає на підлогу струмінь води, що витікає з бака?

6.11. По трубі змінного перерізу тече рідина. Різниця рівнів рідини у двох манометричних трубках, які встромлені в широку та вузьку частини труби, $\Delta h = 10$ см. Площі перерізу труби складають $S_1 = 20$ см^2 і $S_2 = 8$ см^2. Визначити об'ємну витрату V_1 рідини, тобто об'єм, який витрачається за одиницю часу.

6.12. Зігнута трубка занурена у річку отвором проти течії. Яка швидкість v течії ріки у цьому місці, якщо вода в трубці піднялася на $h_1 = 115$ мм?

6.13. Якої найбільшої швидкості може набути крапля дощу діаметром $d = 0{,}3$ мм, що падає в повітрі? Рух повітря при обтіканні краплі вважати ламінарним. Динамічна в'язкість повітря $\eta = 1{,}5 \cdot 10^{-5}$ мкПа·с.

6.14. Коркова кулька радіусом $r = 5$ мм спливає в посудині з гліцерином із постійною швидкістю $v = 3{,}7$ см/с. Визначити динамічну та кінематичну в'язкість гліцерину.

6.15. Визначити максимальну масову витрату m_1 води, що тече по трубі з внутрішнім діаметром $d = 5$ см при ламінарній течії. Вважати, що ламінарний характер течії рідини в циліндричній трубі зберігається при числі Рейнольда $Re \le 3000$. Масова витрата – кількість рідини, що витікає з труби за одиницю часу.

6.16. Свинцева дробинка діаметром $d = 2$ мм падає з постійною швидкістю $v = 2{,}25$ см/с у вертикальній трубі, яка заповнена касторовим маслом. Визначити динамічну в'язкість касторового масла.

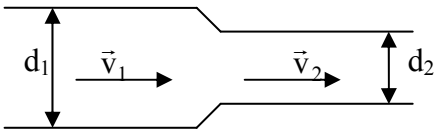
6.17. По горизонтальній трубі радіуса $R = 12$ мм тече вода із швидкістю $v = 8$ см/с. Визначити: а) характер течії, вважаючи, що $Re_{кр} = 3000$; б)перепад тиску dp/dl на одиницю довжини труби.

Тестові завдання

Вибрати вірну відповідь.

1. Переріз струменя рідини, що витікає з отвору донизу, із відстанню від отвору
   1. зменшується 2. не змінюється 3. збільшується

2. Рідина тече трубою змінного перерізу. При цьому $d_1 = 2d_2$ (d – діаметр труби). Швидкість течії v_1 порівняно із швидкістю v_2



   1. удвічі менша
   2. удвічі більша
   3. має таке саме значення
   4. менша у 4 рази
   5. більша у 4 рази

3. Посудина з рідиною, в якій плаває тіло, міститься у ракеті. Під час виведення ракети на орбіту штучного супутника Землі глибина занурення тіла в рідину
   1. не зміниться 2. збільшиться 3. зменшиться

4. Переріз струменя рідини, яка виливається із шлангу вертикально вверх, із збільшенням відстані від отвору шлангу
   1. зменшується 2. не змінюється 3. збільшується.

5. Градієнт швидкості рідини, що тече по трубі
   1. спрямований вздовж радіуса до стінок труби 2. дорівнює нулю
   3. спрямований вздовж радіуса до осі труби 4. спрямований вздовж осі труби

6. По трубі діаметром 2см тече вода. В'язкість води $\eta = 1$ мПа·с. Критичне значення числа Рейнольдса $Re_{кр}$=3000. Максимальна швидкість потоку в трубі, при якій рух води залишається ламінарним, дорівнює
   1. 0,30 м/с 2. 3 м/с 3. 1,5 м/с 4. 0,15 м/с 5. 0,6 м/с

7. У рівнянні Бернуллі $\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = const$ установити відповідність між видом тиску, який презентують його складові, і формулою, що відповідає цьому тиску:

1. статичний тиск А) $\frac{\rho v^2}{2} + p$

2. повний тиск Б) p

3. гідростатичний тиск В) $\frac{\rho v^2}{2}$

4. динамічний тиск Г) $\rho g h$

8. Посудина, яка має форму куба зі стороною а, заповнена доверху рідиною. Сила гідростатичного тиску рідини А) на одну з стінок посудини; Б) на бічну поверхню посудини порівняно із силою тиску на дно посудини

1. удвічі більша 2. більша у 4 рази 3. дорівнюють одна одній
4. удвічі менша 5. менша у 4 рази

9. Атмосферний тиск дорівнює 100 кПа. Тиск у воді більший за атмосферний у 6 разів на глибині

1. 70м 2. 60м 3. 50м 4. 120м 5. 30м.

10. Атмосферний тиск дорівнює 100 кПа. Гідростатичний тиск у воді більший за атмосферний у 6 разів на глибині

1. 70м 2. 60м 3. 50м 4. 120м 5. 30м

11. Атмосферний тиск дорівнює 100 кПа. На глибині 60м тиск у воді дорівнює

1. 700 кПа 2. 600 кПа 3. 500 кПа 4. 1200 кПа 5. 300 кПа

12. Щоб сила тиску рідини на дно циліндричної посудини радіуса R дорівнювала силі тиску на бічну поверхню, необхідно налити рідину до висоти

1. R/2 2. R 3. 2R 4. 3R 5. 4R

13. Якщо у сполучені посудині налиті не змішувані рідини з різними густинами ρ_1 і ρ_2, причому $\rho_1 > \rho_2$, то висоти стовпчиків рідин у посудинах зв'язані співвідношенням

1. $h_1 > h_2$ 2. $h_1 = h_2$ 3. $h_1 < h_2$
4. відповідь залежить від площин перерізу посудин
5. відповідь залежить від чисельних значень густин

14. Кусок льоду плаває у воді, яка налита у посудину. Якщо лід повністю розтане, рівень води в посудині

1. зменшиться 2. не зміниться 3. збільшиться
4. відповідь залежить від об'єму льоду
5. відповідь залежить від об'єму посудини

15. Кусок дерева плаває у воді занурившись на 3/4 свого об'єму. Густина дерева має дорівнювати

1. 250 кг/м^3 2. 500 кг/м^3 3. 750 кг/м^3 4. 1000 кг/м^3 5. 1250 кг/м^3

16. Одиниця вимірювання тиску паскаль, виражена через основні одиниці системи СІ, має розмірність:

1. $кг \cdot м^2/с$ 2. $кг \cdot м/с^2$ 3. $кг \cdot м^2/с^2$ 4. $кг \cdot м/с$ 5. $кг/м \cdot с^2$.

17. Підводний човен знаходиться на глибині h = 45м. Тиск повітря у човні дорівнює атмосферному. Швидкість, з якою через отвір у човні буде уриватися струмінь води, дорівнюватиме

1. 45 м/с 2. 30 м/с 3. 25 м/с 4. 20 м/с 5. 15 м/с.

Частина ІІ. МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА І ТЕРМОДИНАМІКА

Термодинаміка та статистична фізика мають загальний предмет вивчення – властивості макросистем (речовини) і процеси, що відбуваються в них. Макросистемою називають систему, яка містить велику кількість частинок. У цьому сенсі до макросистем належать гази, рідини, тверді тіла і плазма, які складаються з атомів, молекул та іонів.

Молекулярна (статистична) фізика вивчає властивості макросистем в залежності від властивостей та взаємодії частинок, які утворюють ці системи, тобто спирається на молекулярно-кінетичну теорію.

Головна задача статистичної фізики – пояснити властивості тіл, які спостерігаються безпосередньо на досліді (тиск, густину, температуру тощо), як результат сукупної дії великої кількості молекул, які знаходяться у стані неперервного руху. Це дозволяє використання статистичного методу, який базується на таких твердженнях:

1. Сукупність великої кількості молекул (колективу) має властивості, яких не має кожна окрема молекула.

2. Статистична фізика працює з середніми значеннями величин, які характеризують поведінку кожної молекули (швидкість, імпульс, енергія).

3. Існує зв’язок між макроскопічними властивостями колективу молекул і середніми значеннями величин, що характеризують властивості окремих молекул (мікроскопічними властивостями).

4. У статистичній фізиці розглядається конкретна молекулярна модель і до неї застосовуються математичні методи статистики, які базуються на теорії ймовірностей. Статистичний метод дозволяє визначити не тільки середні значення величин, що вивчаються, але й оцінити ймовірність будь-якого іншого можливого значення.

Термодинаміка вивчає властивості макроскопічних систем і процеси, що протікають у них, не спираючись на жодні модельні уявлення про атомно-молекулярну структуру речовини. За допомогою деяких інтегральних понять (тиск, температура, об’єм) та функцій стану (внутрішня енергія, ентропія) термодинаміка дозволяє зробити висновки щодо протікання процесів у макросистемі без розгляду мікроскопічної поведінки окремих частинок. Термодинамічний метод ґрунтується на аналізі умов і кількісних співвідношень, які виконуються у системі при різних перетвореннях енергії, що дозволяє вивчати фізичні властивості досліджуваних макроскопічних систем і прогнозувати напрям зміни їх стану. В основу термодинаміки покладені фундаментальні закони (начала термодинаміки), які є узагальненням великої кількості дослідних фактів. Висновки термодинаміки застосовуються не тільки до теплових процесів, але й до інших фізичних явищ (електричних, магнітних і т. ін.).

Вивчаючи досліджувані об’єкти з різних точок зору, статистична фізика і термодинаміка доповнюють одна одну, утворюючи єдине ціле.

Розділ 7. Основні положення молекулярно-кінетичної теорії (МКТ)

Тема: Основні положення молекулярно-кінетичної теорії; їх експериментальні підтвердження. Маса та діаметр молекул.

Основні поняття і формули.

Молекулярна фізика вивчає будову і властивості речовини з точки зору молекулярно-кінетичних уявлень. В основу молекулярно-кінетичної теорії покладені такі положення:

1. Усі тіла в природі складаються з молекул (атомів). Молекула – найменша частинка речовини, яка зберігає всі її хімічні властивості. Молекули складаються з атомів і в залежності від речовини мають різну структуру. Маса та розміри молекул є дуже малими.

2. Молекули знаходяться у стані неперервного хаотичного руху, який називають тепловим.

3. Між молекулами діють сили притягання та відштовхування, які залежать від відстані між молекулами і проявляються на невеликих відстанях. Ці сили мають електромагнітну природу. При наближенні молекул сили притягання, які прийнято вважати додатними, змінюються на сили відштовхування – від'ємні сили. Відстань між молекулами, на якій змінюється знак сили, вважають за діаметр молекули (рис. 7.1).

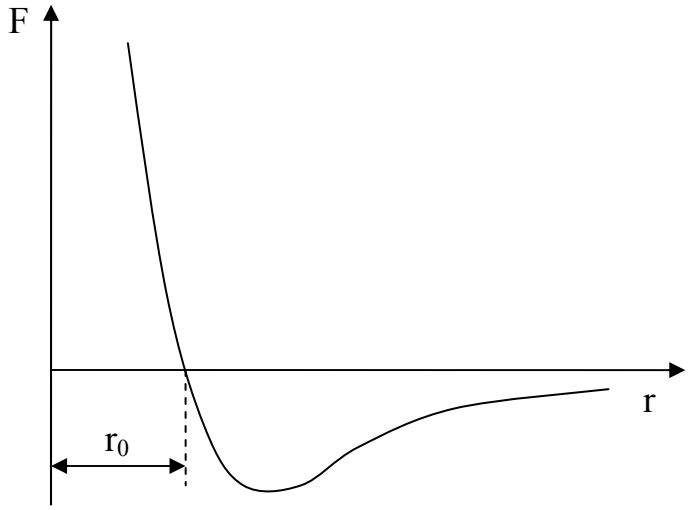


Рис. 7.1.

Молекули різних речовин по-різному взаємодіють між собою. Взаємодія залежить від типу молекул і відстані між ними. Цим пояснюється наявність різних агрегатних станів речовини (твердий, рідкий, газоподібний).

Найбільш яскравими експериментальними підтвердженнями положень МКТ є:

броунівський рух – хаотичний рух макроскопічних частинок внаслідок одночасної дії на них великої кількості мікрочастинок);

дифузія – напрямлений рух частинок із області з більшою концентрацією в область з меншою концентрацію);

прагнення газів зайняти увесь об'єм посудини, у якій вони знаходяться;

наявність у твердих тіл певної форми і розмірів, зумовлена силами притягання між атомами і молекулами;

електронний та іонний мікроскопи дозволяють отримати фотографії, на яких видна дискретна будова речовини (хоча наші органи чуттів сприймають речовину як суцільне і неперервне).

Маса і діаметр молекул.

Для характеристики мас атомів і молекул використовують величини, які отримали назву відносної атомної маси елемента і відносної молекулярної маси речовини.

Відносною атомною масою A_r хімічного елементу називають відношення маси атома m_0 цього елемента до 1/12 маси атома m_{0C} ізотопу вуглецю ${}^{12}_{6}C$:

$$A_r = \frac{m_0}{m_{0C}/12}.$$

Відносною молекулярною масою M_r речовини називають відношення маси молекули цієї речовини до 1/12 маси атома ізотопу вуглецю ${}^{12}_{6}C$:

$$M_r = \frac{m_0}{m_{0C}/12}.$$

Одиниця маси, яка дорівнює 1/12 маси атома вуглецю, носить назву атомної одиниці маси (а.о.м.) Атомна одиниця маси дорівнює

$$m_{а.о.м.} = m_{0C}/12 = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}.$$

Кількість речовини вимірюється у молях.

Один моль – це кількість речовини, яка містить стільки частинок (атомів, молекул), скільки атомів міститься у масі 0,012кг ізотопу вуглецю ${}^{12}_{6}C$.

Кількість атомів або молекул в одному молі речовини, має назву числа (сталої) Авогадро N_A.

$$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}.$$

Масу одного моля речовини називають молярною масою M. Молярна маса дорівнює добутку маси молекули m_0 на сталу Авогадро:

$$M = m_0 N_A. \qquad (7.1)$$

Для визначення молярної маси речовини можна також скористатися співвідношенням:

$$M = M_r \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}. \qquad (7.2)$$

Кількість речовини, тобто кількість молів ν у даній масі m, може бути визначена як відношення кількості молекул N до числа Авогадро N_A:

$$\nu = \frac{N}{N_A},$$

або за формулою $$\nu = \frac{m}{M}. \qquad (7.3)$$

Маси молекул дуже малі, мають порядок $(10^{-27} \div 10^{-25})$ кг.

Оцінку лінійних розмірів молекул можна провести, користуючись моделлю щільної упаковки молекул рідини в деякому об'ємі куба V (рис.7.2). Якщо вздовж ребра куба розміщується n молекул, то діаметр молекули можна визначити із співвідношення:

$$d = \frac{L}{n} = \frac{L}{\sqrt[3]{N}},$$

де загальна кількість молекул N даної речовини в об'ємі V може бути визначена через кількість молів ν і число Авогадро:

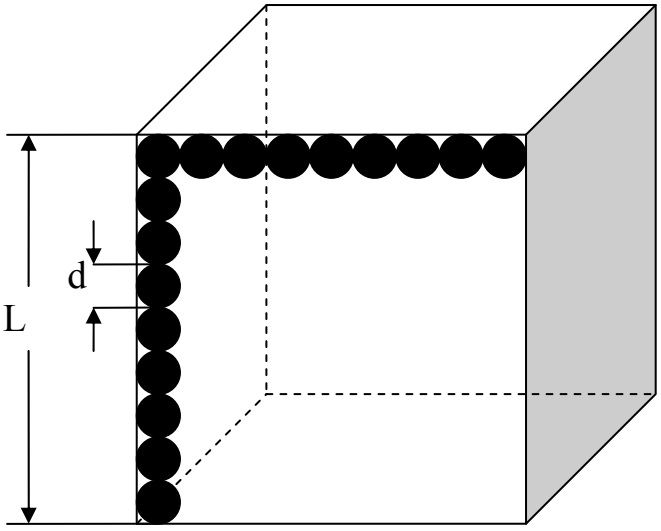


Рис. 7.2

$N = \nu N_A = \frac{mN_A}{M} = \frac{\rho V N_A}{M} = \frac{\rho L^3 N_A}{M}$, де M – молярна маса речовини; ρ – її густина. Тоді

$$d = \frac{L\sqrt[3]{M}}{\sqrt[3]{\rho L^3 N_A}} = \sqrt[3]{\frac{M}{\rho N_A}}. \qquad (7.4)$$

Наприклад, для води $\rho = 10^3$ кг / м^3; M = 0,018кг/моль і $d \approx 3 \cdot 10^{-10}$ м $= 3\,\mathring{A}$.

Методичні вказівки. Серед задач з даної теми можна виділити:

- задачі, в яких визначаються і порівнюються розміри молекул і відстані між ними. Оцінку лінійних розмірів у першому наближенні проводять для молекул рідини у припущенні, що кожна молекула має форму кулі і займає об'єм у вигляді куба з ребром, яке дорівнює діаметру молекули.
- задачі, в яких за кількістю або властивостями окремих молекул слід установити деякий макроскопічний параметр речовини або навпаки (наприклад, визначення маси молекули за молярною масою і т. ін.). Для розв'язання подібних задач слід використовувати зв'язок між різними способами опису кількості речовини. Так, одному молю речовини відповідає
- маса речовини, яка дорівнює молярній масі M;
- об'єм, який дорівнює молярному об'єму V_μ;
- кількість молекул, яка дорівнює числу Авогадро N_A.

У випадку газу, який є частково іонізованим, при визначенні молярної маси, кількості молів, кількості частинок слід ураховувати, що внаслідок іонізації кількість частинок подвоюється. Такий газ слід розглядати як суміш молекулярного та атомарного газів з різними молярними масами.

Приклади розв'язання задач

Приклад 7.1. Визначити кількість речовини , яка міститься в 1літрі води.

$V = 10^{-3}$м^3
$A_r(H) = 1$
$A_r(O) = 16$
$\rho = 1 \cdot 10^3 \frac{кг}{м^3}$

ν - ?

Розв'язання.

Кількість речовини, тобто кількість молів води, що міститься в одному 1л, обчислюємо за формулою (7.3):

$$\nu = \frac{m}{M}.$$

Масу води m визначаємо за її густиною ρ та об'ємом V:

$$m = \rho V.$$

Тоді $$\nu = \frac{\rho V}{M}$$

Молярну масу води знаходимо за її відносною молекулярною масою, яка дорівнює

$$M_r(H_2O) = 2 \cdot A_r(H) + A_r(O) = 2 \cdot 1 + 16 = 18 \text{ а.о.м.}$$

Згідно (1.5) $M = M_r \cdot 10^{-3}$ кг/моль = $18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

$$\nu = \frac{1 \cdot 10^3 \frac{кг}{м^3} \cdot 10^{-3} м^{-3}}{18 \cdot 10^{-3} \frac{кг}{моль}} = 55{,}6 \text{ моль}$$

Приклад 7.2. Обчислити у кілограмах масу молекули води.

$M_r = 18$ а.о.м.
$N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
$m_{а.о.м.} = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг

m_0 -?

Розв'язання.

1 спосіб. Відносна молекулярна маса молекули води (H_2O) дорівнює $M_r = 18$ а.о.м. Відповідно молярна маса води складає:

$$M = M_r \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль} = 18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}.$$

За формулою (7.1) отримуємо:

$$m_0 = \frac{M}{N_A} = \frac{0{,}018 кг \cdot моль}{6{,}02 \cdot 10^{23} моль} \approx 3 \cdot 10^{-26} кг$$

2 спосіб. Використовуючи значення відносної маси молекули води M_r=18а.о.м. та атомної одиниці маси $m_{а.о.м.} = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг, знаходимо

$$m_0 = M_r \cdot m_{а.о.м.} = 18 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} кг \approx 3 \cdot 10^{-26} кг.$$

Приклад 7.3. Оцінити лінійні розміри молекули води, вважаючи, що вона має форму кульки.

$M = 18 \cdot 10^{-3}$ кг·моль$^{-1}$
$N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
$\rho = 1 \cdot 10^3 \dfrac{кг}{м^3}$

d - ?

Розв'язання.

Відповідно до моделі щільної упаковки молекул їх лінійні розміри можна оцінити за формулою (7.4):

$$d = \frac{L\sqrt[3]{M}}{\sqrt[3]{\rho L^3 N_A}} = \sqrt[3]{\frac{M}{\rho N_A}},$$

де $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ – стала Авогадро.

$$d = \sqrt[3]{\frac{0{,}018}{10^3 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}}} = 3{,}1 \cdot 10^{-10}\,(м) = 3{,}1\,\mathring{A}.$$

Перевірка одиниці вимірювання: $[d] = \left(\dfrac{кг \cdot моль^{-1}}{кг \cdot м^{-3} \cdot моль^{-1}}\right)^{\frac{1}{3}} = м.$

Приклад 7.4. Оцінити, яка частка простору, зайнятого водою, припадає на самі молекули, а яка – на проміжки між ними. Молекули води представити у вигляді кульок, діаметр яких визначений у попередньому прикладі.

$M = 18 \cdot 10^{-3}$ кг·моль$^{-1}$
$N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
$d = 3{,}1 \cdot 10^{-10}$ м

$\dfrac{V_1}{V}; \dfrac{V_2}{V}$ - ?

Розв'язання.

Об'єм V, який займає маса води m, дорівнює $V = \dfrac{m}{\rho}$ (1), де ρ – густина води.

Об'єм V_1, зайнятий власно молекулами води, знаходимо за формулою

$$V_1 = V_0 \cdot N, \qquad (2)$$

де $V_0 = \dfrac{1}{6}\pi d^3$ (3) – об'єм однієї молекули; $N = \dfrac{m}{M} \cdot N_A$ (4) – кількість молекул у масі води m (тут M – молярна маса води).

З урахуванням виразів (3) і (4) формула (2) набуває вигляду:

$$V_1 = \frac{m}{6M}\pi d^3 N_A. \qquad (5)$$

За формулами (1) і (5) знаходимо частку об'єму, що припадає на самі молекули:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{\pi d^3 N_A \rho}{6M}$$

$$\frac{V_1}{V} = \frac{3{,}14 \cdot 3{,}1^3 \cdot 10^{-30} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} \cdot 10^3}{6 \cdot 18 \cdot 10^{-3}} = 0{,}52.$$

Об'єм V_2, який прихопадає на проміжки між молекулами, дорівнює $V_2 = V - V_1$, а його частка $\frac{V_2}{V} = 1 - \frac{V_1}{V} = 0{,}48.$

Перевірка одиниці вимірювання: $\left[\frac{V_1}{V}\right] = \frac{м^3 \cdot кг \cdot моль}{моль \cdot м^3 \cdot кг} = 1.$

Відповідь: $\frac{V_1}{V}$=0,52; $\frac{V_2}{V} = 0{,}48.$

Приклад 7.5. Скільки частинок міститься у 4г кисню, якщо відомо, що степінь його дисоціації α = 0,020? Ступінь дисоціації α – відношення кількості молекул, які зазнали дисоціації до їх початкової кількості.

$m = 4 \cdot 10^{-3}$кг
$M = 32 \cdot 10^{-3}$кг·моль$^{-1}$
$N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
α=0,020

N - ?

Розв'язання

При ступені дисоціації α маса газу m буде містити $2\alpha\frac{m}{M}$ молів атомарного кисню та $(1-\alpha)\frac{m}{M}$ молів молекулярного кисню.

Загальна кількість молів у посудині, де знаходиться кисень,

$$2\alpha\frac{m}{M} + (1-\alpha)\frac{m}{M} = (1+\alpha)\frac{m}{M}.$$

Відповідно кількість частинок дорівнює $N = N_A(1+\alpha)\frac{m}{M}$.

$$N = 6{,}02 \cdot 10^{23}(1+0{,}2)\frac{4 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-3}} = 9{,}03 \cdot 10^{22}.$$

$$[N] = \frac{кг \cdot моль}{моль \cdot кг} = 1.$$

Відповідь: N = $9{,}03 \cdot 10^{22}$ частинок.

Задачі для самостійного розв'язування

7.1. Знайти масу атома гелію, заліза, урану.
7.2. Визначити масу m_1 однієї молекули води.
7.3. Визначити масу кіломолю M і масу m_1 молекули куховарської солі.
7.4. Знайти масу однієї молекули CO_2.
7.5. Визначити масу m_1 одного атома водню і число N атомів, що містяться в одному грамі водню.
7.6. Знайти число n атомів, що містяться в краплині ртуті масою m=1 г.

7.7. Знайти число ν кіломолів і число n_0 молекул, що містяться в об'ємі $V = 1см^3$ води при температурі $t=4°C$.
7.8. Порівняти кількість речовини у брусках золота і заліза а) однакової маси; б) однакового об'єму.
7.9. Знайти об'єм одного молю кисню, якщо його густина дорівнює $1,9кг/м^3$.
7.10. Визначити об'єм 5 молів міді.
7.11. У скільки разів кількість атомів у 54г алюмінію більша за число Авогадро?
7.12. Як і у скільки разів кількість атомів у 11г діоксиду вуглецю відрізняється від числа Авогадро?
7.13. Чому дорівнює маса водню, яка містить $1,5\cdot10^{22}$молекул?
7.14. Густина натрію ρ = 970 $кг/м^3$. Визначити концентрацію вільних електронів у натрії, якщо на один атом натрію припадає 1 вільний електрон.
7.15. Знайти відстань між найближчими атомами кубічної кристалічної решітки заліза.
7.16. Оцінити діаметр атомів ртуті.
7.17. Визначити масу m_1 однієї молекули сірковуглецю CS_2 вважаючи, що молекули в рідині мають форму кулі і розташовані впритул один до одного; визначити порядок величини діаметра d молекули.
7.18. В посудині, що має форму куба, міститься за нормальних умов 3375 молекул газу. Визначити довжину ребра посудини. (Урахувати, що за нормальних умов 1 моль газу займає об'єм 22,4 л).
7.19. Визначити, яка частина об'єму, що газ займає за нормальних умов, припадає на об'єм його молекул. Молекули газу вважати кульками діаметром 0,27нм.
7.20. Радонові ванни, які використовують для лікування,містять $N = 1,7\cdot10^6$ атомів радону (M=0,222кг/моль) в 1л води. Визначити кількість молекул води, яка припадає на 1 атом радону.
7.21. Яка кількість молів знаходиться в 6г парів йоду, якщо його ступінь дисоціації дорівнює 40?
7.22. Яка кількість частинок знаходиться у 7г азоту, якщо ступінь дисоціації його молекул α = 50%?
7.23. Яка кількість частинок знаходиться в масі m = 5,0 г кисню, якщо його ступінь дисоціації α = 15%?
7.24. За 5 діб із стакана повністю випарилось 50г води. Скільки в середньому вилітало молекул з поверхні води за 1 с?
7.25. Як змінився б тиск всередині газу або рідини, якби сили притягання між молекулами раптово зникли?

Тестові завдання

Вибрати вірну відповідь.

1. Кількістю речовини називають фізичну величину, яка чисельно дорівнює:
   1. числу молекул у наданій порції речовини
   2. числу молів у наданій порції речовини
   3. числу молекул у 1кг речовини
   4. числу молів в 1 кг речовини
   5. числу молів в 0,012 кг вуглецю

2. Число Авогадро характеризує:
   1. кількість частинок в 1 кг речовини
   2. кількість частинок в 1 молі речовини
   3. кількість молів в 1 кг речовини
   4. масу 1 моля речовини
   5. кількість молів у даній речовині

3. У скільки разів число Авогадро є більшим за число атомів у 9г алюмінію (M=0,027кг/моль)?

   1.1 2. 3 3. 9 4. 27 5. 81

4. Дати оцінку маси молекули кисню

   1. $\approx 5,0\cdot 10^{-23}$ кг 2. $\approx 5,0\cdot 10^{-24}$ кг 3. $\approx 5,0\cdot 10^{-25}$ кг
   4. $\approx 5,0\cdot 10^{-26}$ кг 5. $\approx 5,0\cdot 10^{-27}$ кг

5. Кількість атомів кисню, яка міститься в масі m = 1,0г діоксиду вуглецю (CO_2), дорівнює

   1. $2,4\cdot 10^{19}$ 2. $2,7\cdot 10^{19}$ 3. $2,7\cdot 10^{22}$ 4. $3,4\cdot 10^{22}$ 5. $4,7\cdot 10^{20}$

6. Відношення об'єму атома срібла (M_1 = 0,108 кг/моль) до об'єму атома заліза (M_2=0,0560 кг/моль) дорівнює

   1. 1,20 2. 1.25 3. 1.30 4. 1,40 5. 1.50

7. У першій посудині міститься m_1=2,0 г гелію (M_1(He) = 0,004 кг/моль), у другій – m_2=3,0 г аргону (M_2(Ar) = 0,040 кг/моль), у третій – m_3=30 г діоксиду вуглецю ($M_3(CO_2)$= 0,044 кг/моль). У якій з посудин міститься найбільша кількість молекул, а у якому – найменша?
   1. у першій найбільша, у другій найменша
   2. у першій найбільша, у третій найменша
   3. у третій найбільша, у другій найменша
   4. у другій найбільша, у першій найменша
   5. у другій найбільша, у третій найменша

8. Якщо маса мікроскопічної пилинки вуглецю дорівнює m = 0,050 нг, то вона складається з N атомів

   1) $N = 3,0\cdot 10^{14}$ 2) $N = 2,0\cdot 10^{14}$
   3) $N = 3,0\cdot 10^{13}$ 4) $N = 2,5\cdot 10^{13}$
   5) $N = 2,0\cdot 10^{13}$

Розділ 8. Ідеальний газ. Параметри та рівняння стану ідеального газу

Тема: Попередні відомості: термодинамічні системи; параметри стану термодинамічної системи; термодинамічні процеси. Ідеальний газ, його властивості та параметри. Температурні шкали. Рівняння стану і види ізопроцесів. Експериментальні закони ідеального газу. Рівняння Менделєєва-Клапейрона. Закон Дальтона.

Основні поняття і формули.

Параметри стану термодинамічної системи. Термодинамічні процеси.

● **Термодинамічною системою (ТС)** називають сукупність макроскопічних тіл, які розглядаються методами термодинаміки, тобто з точки зору обміну енергією між собою і з зовнішнім середовищем.

Наприклад, рідина та її пара утворюють термодинамічну систему.

В окремих випадках система може складатися з одного твердого, рідкого або газоподібного тіла.

Термодинамічні системи, які можуть обмінюватися імз зовнішнім середовищем енергією та речовиною, називають **відкритими** системами.

Термодинамічні системи, для яких неможливим є обмін із зовнішнім середовищем ані енергією, ані речовиною, мають назву **ізольованих.**

Термодинамічні системи, які не можуть обмінюватися із зовнішнім середовищем речовиною, називають **закритими**. Серед них виділяють **замкнені** системи, для яких є неможливим обмін енергією із зовнішнім середовищем шляхом виконання роботи, та **адіабатні** системи, для яких неможливим є теплообмін.

● **Термодинамічними параметрами стану** системи називають сукупність значень фізичних величин, які характеризують стан системи (температура, тиск, об’єм, густина і т. ін.).

Параметри стану не завжди мають певні значення для будь-якої частини системи. Наприклад, тіло, яке підігрівають з одного боку і охолоджують з протилежного, у різних точках має різну температуру, тобто його стан не можна охарактеризувати певним значенням температури.

Стан системи, в якому хоча б один з параметрів не має певного значення при незмінній зовнішній дії, називають **нерівноважним.**

Стан термодинамічної системи є **рівноважним**, якщо всі параметри системи для будь-яких її частин мають рівні значення, які не змінюються з часом, тобто зберігають свої значення нескінченно довго при незмінних зовнішніх умовах.

Стан системи, при якому термодинамічні параметри з часом не змінюються, має назву **стаціонарного.** При стаціонарному стані системи термодинамічні параметри можуть зберігати свої значення не тільки внаслідок рівноваги системи, але й внаслідок впливу зовнішніх умов. Отже, не всякий стаціонарний стан є рівноважним.

Якщо систему, яка знаходиться у нерівноважному стані, ізолювати від зовнішнього середовища, то вона переходить у рівноважний стан. Такий перехід називають **процесом релаксації** або просто **релаксацією**. Час, за який початкове відхилення деякого термодинамічного параметра від рівноважного значення зменшується в e (e = 2,718) разів, має назву **часу релаксації.** Для кожного параметра час релаксації має своє значення. Найбільше з цих значень є часом релаксації системи.

● **Термодинамічним процесом** називають перехід системи із одного стану в інший.

Такий перехід завжди пов'язаний з порушенням рівноваги системи. Наприклад, для зменшення об'єму газу, який знаходиться в посудині під поршнем, необхідно перемістити поршень. При цьому збільшується тиск газу, в першу чергу, поблизу поршня. Рівновага порушується тим більше, чим швидше переміщується поршень. Якщо поршень пересувати дуже повільно, то порушення рівноваги є незначним, і тиск у різних точках мало відрізняється від рівноважного значення, яке відповідає даному об'єму газу. При нескінченно повільному стисканні тиск газу у кожен момент часу буде мати певне значення. Стан газу весь час буде рівноважним, і нескінченно повільний процес буде складатися із послідовності рівноважних станів.

Процес, який складається із неперервної черги рівноважних станів, називають **рівноважним** або **квазістатичним**. Рівноважним може бути тільки нескінченно повільний процес. При зміні напряму рівноважного процесу (наприклад, заміні стискання газу його розширенням) система проходить через ті самі рівноважні стани, що у прямому процесі, але у зворотній послідовності.

Якщо вздовж координатних осей відкладати значення деяких термодинамічних параметрів (наприклад, тиск p і об'єм V або тиск p і температуру T і т. ін.), то рівноважний стан системи можна відобразити точкою на відповідній координатній площині, а рівноважний процес – безперервною лінією.

Нерівноважні стани і процеси так зображати неможливо. Нерівноважні процеси між двома рівноважними станами системи умовно зображують штриховими лініями.

Термодинамічний процес, який здійснює система, називають **оборотним,** якщо після нього можливо повернути систему і все навколишнє середовище у початковий стан без будь-яких змін. Якщо процес не задовольняє цю умову, то він є **необоротним.** Необхідною умовою оборотності процесів є їх рівноважність (квазістатичність), тобто будь-який оборотний процес є рівноважним, але не кожен рівноважний процес є оборотним. Усі реальні процеси відбуваються з кінцевою швидкістю і супроводжуються тертям і теплообміном при кінцевій різниці тіл, що контактують, тобто є необоротними. Але за деяких умов протікання процесів їх приблизно можна вважати оборотними.

Коловим процесом або **циклом** називають сукупність декількох термодинамічних процесів, внаслідок яких система повертається в початковий стан.

Колові процеси на діаграмах станів (у координатах p-V, p-T, V-T) зображується замкненими кривими.

З трьох агрегатних станів речовини найбільш простим є газоподібний стан, оскільки в цьому випадку сили, що діють між молекулами вельми малі і ними за певних умов можна знехтувати. Для пояснення властивостей речовини у газоподібному стані використовують фізичну модель – ідеальний газ.

● **Ідеальним газом** називають такий газ, в якому відсутні сили міжмолекулярної взаємодії.

Властивості ідеального газу:

- розміром молекул газу порівняно з розмірами посудини, в якій вони знаходяться, можна знехтувати, тобто вважати їх матеріальними точками;
- молекули газу є вільними. Це означає, що до зіткнення з іншими молекулами або стінками посудини, в якій знаходиться газ, вони рухаються прямолінійно і рівномірно (внаслідок відсутності сил, що діють між молекулами на відстані);
- зіткнення молекул між собою або зі стінками посудини, є абсолютно пружними. У процесі руху молекули наближаються до стінок посудини або одна до одної на досить малі відстані, на яких між молекулами газу або газу та стінки виникають сили взаємодії, що дуже швидко зменшуються із відстанню. Під дією цих сил молекули змінюють напрям свого руху. Процес зміни напряму руху носить назву **зіткнення.**

Будь-який реальний газ із зменшенням його густини все більше наближається до ідеального. Газ можна розглядати як ідеальний, якщо середні відстані між молекулами значно перевищують їх діаметр. Остання умова виконується при достатньо малих значеннях тиску і не занадто

низьких температурах. (При зниженні температури до таких значень, що наближаються до абсолютного нуля, гази переходять у рідку фазу, для якої характерна відносно більша взаємодія молекул між собою.)

Найважливішими параметрами стану ідеального газу є температура, тиск, об'єм. Розглянемо їх фізичний (термодинамічний) зміст.

● **Об'єм** газу завжди співпадає з об'ємом посудини, в якій знаходиться газ. З термодинамічної точки зору будь-яка компонента газу має об'єм V, рівний фізичному об'єму посудини, в яку поміщено газ: $V = V_{посуд.}$.

У Міжнародній системі одиниць (СІ) об'єм вимірюється в $м^3$.
У системі СГС об'єм вимірюється в $см^3$: 1 $см^3$ = $10^{-6} м^3$.
Позасистемна одиниця 1литр = 1$дм^3$ = $10^{-3} м^3$.

● Властивість газу тиснути на стінки посудини – одна з основних властивостей газу. Тиск – один із головних його параметрів.

Тиск p – відношення нормальної складової сили F_n, з якою газ діє на стінку, до площі її поверхні S: $p = \frac{F_n}{S}$.

Термодинамічний зміст тиску. При зіткненнях зі стінками посудини, молекули справляють на неї силову дію, яку описує сила. Така ж за величиною і протилежна за напрямом сила діє на газ з боку стінок (згідно третьому закону Ньютона). Зрозуміло, що сила дії молекул на стінку тим більша, чим більша площа стінки. Для того, щоб фізичні закони не залежали від розмірів тіл, їх виражають через відносні величини. Тому дію газу на стінку характеризують не силою, а тиском.

Тиск у СІ вимірюється в паскалях: 1Па = 1 $Н/м^2$.
Інші одиниці вимірювання тиску та співвідношення між ними:
Система СГС: [P] = 1 $дин/см^2$ = 0,1 Па;
1 бар = 10^5 Па;
1 атм (фізична атмосфера) = 760мм.рт.ст.(міліметрів ртутного стовпчика) = =101325Па;
1 ат (технічна атмосфера) = $9{,}8 \cdot 10^4$Па (при розв'язуванні задач невеликою різницею між 1атм і 1 ат часто нехтують) ;
1мм.рт.ст. = 1Тор = 1/760атм = 133,3 Па = $1{,}33 \cdot 10^3$ $дин/см^2$.

● **Температура** вводиться для кількісного визначення внутрішньої, або теплової енергії.

Термодинамічний зміст температури. Перші уявлення про температуру виникли з відчуття тепла та холоду: в повсякденні температура для нас – величина, яка відрізняє "гаряче" від "холодного". У строгому сенсі поняття температури має зміст тільки для рівноважних станів.

Фізичний параметр, однаковий у всіх частинах системи тіл, які знаходяться у стані теплової рівноваги, тобто не обмінюються енергією між собою шляхом теплопередачі, носить назву **температури**.

Якщо при установленні теплового контакту між тілами одне з них передає енергію іншому шляхом теплопередачі, то першому тілу приписують більшу температуру, ніж другому. Тіла, які знаходяться у тепловій рівновазі, мають однакову температуру; і навпаки, якщо тіла мають однакову температуру, між ними установлена теплова рівновага.

З точки зору молекулярно-кінетичної теорії температура рівноважної системи характеризує інтенсивність теплового руху атомів, молекул та інших частинок.

Своєрідність температури як фізичної величини полягає в тому, що на відміну від багатьох інших характеристик (маси, довжини, об'єму, заряду і т. ін.) вона **не є адитивною** величиною. Це означає, що температура всього тіла не дорівнює, тобто не може бути визначена як сума температур його частин.

Ряд властивостей тіл – об'єм, електричний опір і т. ін. залежить від температури, і кожна з них може бути використана для кількісного визначення температури.

Температурні шкали.

Абсолютна шкала температур (шкала Кельвіна). Одиниця температури у системі СІ – кельвін (К) відповідає абсолютній температурній шкалі, яка в якості нульової точки має мінімальну можливу температуру T_0=0. Другою фіксованою точкою шкали є температура потрійної точки чистої воді: $T_т(H_2O)$ = 273,15 К. За таким вибором різниця температур між точкою кипіння води при нормальному тиску і точкою плавлення льоду з достатньою точністю дорівнює 100К. (Для теоретичного градуювання шкали використовують ІІ закон термодинаміки.)

Абсолютна температура Т пропорційна середній кінетичній енергії поступального руху молекул речовини.

В цьому полягає фізичний зміст абсолютної температури.

Шкала Цельсія. За шкалою Цельсія точка плавлення льоду дорівнює 0˚С, а точка кипіння води при тиску $p=1{,}01325\cdot10^5$ Па дорівнює 100˚С.

Отже, різниця температур в градусах Цельсія (˚С) і в кельвінах (К) однакова, шкали відрізняються тільки вибором нульової температури. Температура Т, відрахована за абсолютною шкалою температур, пов'язана з температурою t за шкалою Цельсія співвідношенням:

$$T = t + 273{,}15\,. \qquad (8.1)$$

Абсолютному нулю температури T_0=0К відповідає значення $t = -273{,}15^\circ C$.

Інші шкали. У франкомовних країнах для градуювання термометрів використовують також шкалу Реомюра (Р); в англомовних – шкалу Фаренгейта (Ф). Зв'язок між цими шкалами та шкалою Цельсія надають формули: $t(^\circ P) = (4/5)\, t\,(^\circ C)$; $t\,(^\circ Ф) = (9/5)\, t\,(^\circ C) + 32^\circ Ф$.
Притому $0^\circ C = 0^\circ P = 32^\circ Ф$; $100^\circ C = 80^\circ P = 212^\circ Ф$.

Порівняння температурних шкал Фаренгейта, Цельсія і Кельвіна (абсолютної) наведено на рис.8.1.

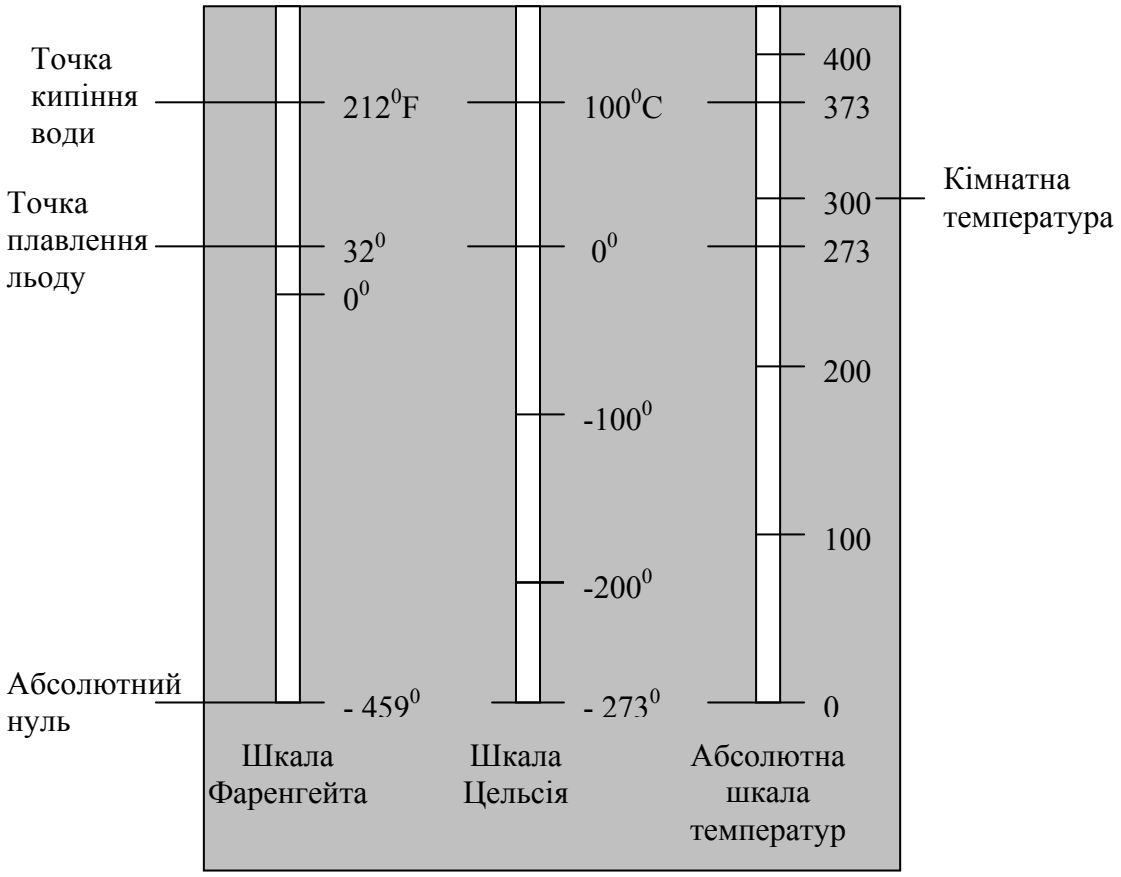


Рис. 8.1

Рівняння стану і види ізопроцесів.

● **Рівнянням стану** називають рівняння, яке пов'язує основні параметри стану термодинамічної системи. У загальному вигляді його можна записати так:

$$f(V, p, T) = 0.$$

Важливо усвідомити, що методами термодинаміки вигляд рівняння стану установити неможливо. Термодинаміка отримує знання про рівняння стану з дослідів або з інших розділів фізики (зазвичай, статистичної фізики).

● Зміна стану газу, яка супроводжується зміною всіх або кількох його параметрів, носить назву **газового процесу.** Газовий процес є окремим випадком термодинамічних процесів, які відбуваються у термодинамічних системах при переході із одного стану в інший.

● Для постійної маси газу розрізняють такі ізопроцеси:
T = const – ізотермічний процес;
V = const – ізохорний процес;
p = const – ізобарний процес;
Q = 0 (без теплообміну з зовнішніми тілами) – адіабатний процес, в ході якого зберігається ентропія системи **S= const**.

Графіки цих процесів на діаграмах мають відповідно назву ізотерми, ізохори, ізобари або адіабати. (рис.8.2).

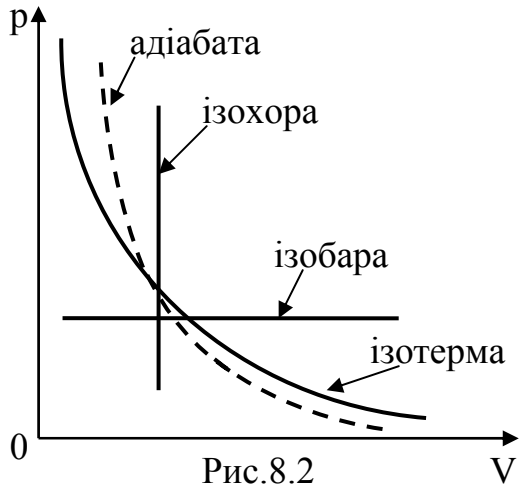


Рис.8.2

● Для ізопроцесів у ідеальному газі експериментально встановлені відповідні газові закони.

Ізотермічний процес.

Закон Бойля – Маріотта:

Для даної маси газу при T=const тиск змінюється обернено пропорційно об'єму:

$$P \cdot V = \text{const}, \text{ при } m = \text{const}; \ T = \text{const}. \qquad (8.2)$$

Звідки для однакової маси газу при тій самій температурі газ займає тим більший об'єм, чим нижчий тиск: $p_1 > p_2$ при $V_2 > V_1$ (рис.2.2).

Ізобарний процес.

Закон Гей-Люссака:

Для даної маси газу при p = const об'єм зростає лінійно з температурою.

При m = const, p = const $\quad V = V_0(1 + \alpha t)$, (8.3)

де V_0 – об'єм газу при t=0˚C; α = (1/273) град$^{-1}$ – температурний коефіцієнт об'єму (температурний коефіцієнт теплового поширення).

З урахуванням значення α та зв'язку між температурою за шкалою Цельсія і Кельвіна попередньому рівнянню можна надати вигляду:

$$V = \alpha V_0(273 + t) = \alpha V_0 T, \text{ або } \frac{V}{T} = \text{const} \qquad (8.3а)$$

Ізохорний процес:

Закон Шарля.

Для даної маси газу при V = const тиск зростає лінійно з температурою.

При m = const, V = const $\quad p = p_0(1 + \gamma t)$, (8.4)

де p_0 – тиск газу при t=0˚C; γ = (1/273) град$^{-1}$ – термічний коефіцієнт тиску.

Інакше: $$p = \gamma p_0 T, \quad \text{або} \quad \frac{p}{T} = const. \qquad (8.4а)$$

Графіки ізохорного процесу для тієї самої маси при двох значеннях тиску p_1 і p_2 ($p_1 > p_2$) зображені на V-T – діаграмі на рис.2.5. Відповідно графіки ізобарного процесу при двох значеннях об'єму V_1 і V_2 ($V_1 > V_2$) і однаковій масі представлені на p -T – діаграмі на рис. 2.6.

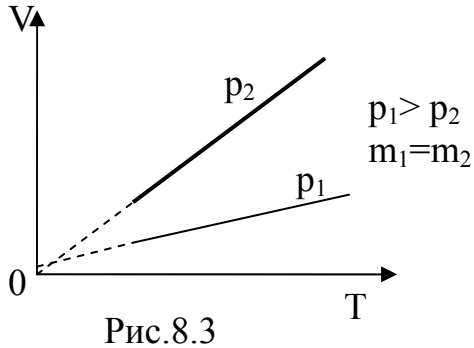


Рис.8.3

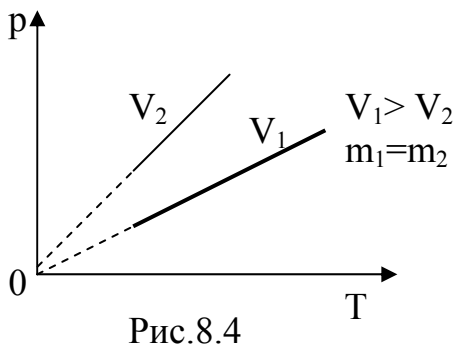


Рис.8.4

● **Рівняння Менделєєва –Клапейрона (рівняння стану ідеального газу).** Об'єднання законів Бойля – Маріотта і Гей-Люссака приводить до рівняння стану ідеального газу (рівняння Клапейрона), яке зв'язує всі основні його параметри:

$$\frac{pV}{T} = const \text{ при } m = const. \qquad (8.5)$$

На основі дослідів з різними газами було установлено, що при однакових значеннях тиску та температури один моль будь-якого газу займає однаковий об'єм – **закон Авогадро.**

Значення цього об'єму за нормальних умов (t=0°C і p =1,013·10^{5}Па) дорівнює $V_\mu = 22,4 \cdot 10^{-3}$ м^3/моль.

З урахуванням закону Авогадро Д.І.Менделєєв записав рівняння Клапейрона для одного моля ідеального газу у вигляді:

$$\frac{pV_\mu}{T} = R,$$

де R = 8,31 Дж/(моль·К) – однакова для всіх газів універсальна газова стала.

Фізичний зміст універсальної газової сталої: універсальна газова стала чисельно дорівнює роботі поширення, яку виконує один моль ідеального газу при нагріванні на 1 К в ізобарному процесі.

Для довільної маси газу m рівняння стану ідеального газу **(рівняння Менделєєва – Клапейрона)** набуває вигляду:

$$pV = \nu RT, \qquad (8.6)$$

де $\nu = \frac{m}{M}$ – кількість молів газу, M – молярна маса.

Інакше $$p = \frac{\rho RT}{M}, \qquad (8.7)$$

де ρ – густина газу.

З рівняння Менделєєва – Клапейрона можна отримати кожний з газових законів.

Рівняння Менделєєва – Клапейрона можна записати в іншій формі, якщо виразити ρ і M у вигляді $\rho = m_0 n$; $M = m_0 N_A$ (m_0 – маса молекули; N_A – число Авогадро; n – чисельна густина молекул газу) і використати сталу Больцмана $k = \frac{R}{N_A} = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К. Стала Больцмана є числовим еквівалентом, який зв'язує абсолютну температуру, виміряну в одиницях енергії, з температурою виміряною в кельвінах.

Тоді

$$p = nkT. \qquad (8.8)$$

На відміну від рівняння (2.10), яке дозволяє застосування тільки для рівноважного ідеального газу з постійними значеннями параметрів вздовж всього об'єму, рівняння (2.12) можна застосовувати також у випадку локальної рівноваги.

При локальній рівновазі параметри системи є неперервними функціями координат і часу, але їх зміна у просторі відбувається настільки повільно, що на відстані, яка дорівнює довжині вільного пробігу, нею можна знехтувати. Також можна знехтувати зміною параметрів у часі за час релаксації тієї частини системи, до якої застосовують поняття локальної рівноваги.

● Парціальний тиск. Закон Дальтона.

Нехай в об'ємі V при температурі T знаходиться суміш ідеальних газів, маси яких дорівнюють $m_1, m_2, ..., m_n$, а молярні маси відповідно $M_1, M_2, ..., M_n$. **Парціальним тиском** газу, що входить до газової суміші, називають тиск, який спричиняв би цей газ, якби він займав увесь об'єм посудини при тій самій температурі T.

Закон Дальтона: сумарний тиск газової суміші дорівнює сумі парціальних тисків газов, що входять до неї.

$$p = \sum_{i=1}^{n} p_i, \qquad (8.9)$$

де $p_i = \frac{m_i}{M_i} \cdot \frac{RT}{V}$ – парціальний тиск i- ї компоненти в суміші газів.

Методичні вказівки. Закони ідеального газу можна використовувати у випадку газів за умов, які не дуже відрізняються від нормальних ($t=0^{\circ}C$, $p=1{,}013\cdot10^5$ Па), а також до розріджених газів.

Задачі на закони ідеального газу можна умовно поділити на декілька груп.

До першої групи можна віднести задачі, в яких стан газу не змінюється, і за відомими параметрами та масою газу слід визначити невідомі величини. При розв'язанні таких задач необхідно використовувати рівняння Менделєєва – Клапейрона (8.6) або (8.8).

До другої – задачі, в яких розглядається декілька станів газу. Тоді:

- якщо маса газу в процесі переходу з одного стану в інший не змінюється, то розв'язок задачі можна провести за рівнянням Клапейрона (8.5), записавши його для двох станів у вигляді $\frac{p_1V_1}{T_1}=\frac{p_2V_2}{T_2}$;
- якщо маса газу змінюється, то для кожного зі станів газу слід записати рівняння Менделєєва – Клапейрона (8.6);
- якщо один з параметрів газу і його маса залишаються постійними, то в залежності від виду процесу використовують одне з рівнянь (8.2), (8.3) або (8.4).

При необхідності також слід використовувати додаткові умови у вигляді допоміжних співвідношень, які випливають з умови задачі, наприклад, виразити тиск і об'єм через інші задані величини.

Якщо в умові задачі тиск заданий через показання технічного манометра, то для знаходження повного тиску в балоні показання манометра слід збільшити на атмосферний тиск $p_{атм}$, оскільки манометр вимірює лише надлишковий порівняно з атмосферним тиск.

Розв'язання задач, в яких розглядаються процеси, що зв'язані зі зміною станів декількох газів, можна виконувати аналогічно, записавши відповідні рівняння для кожного з газів окремо і використовуючи закон Дальтона (8.9).

При розв'язуванні задач у багатьох випадках графічне зображення процесів дозволяє значно спростити розв'язання, проаналізувати залежність між чисельними параметрами різних станів газу. При цьому слід пам'ятати, що можливим є графічне зображення тільки рівноважних (квазістатичних) процесів.

Примітка. На перший погляд може здатися, що у багатьох задачах цього розділу недостатньо даних для розв'язання. При розв'язанні задач слід вважати, що основні характеристики речовини, яка є об'єктом цієї задачі, а саме - молярна маса, хімічна формула і т. ін. є відомими.

Приклади розв'язання задач

Приклад 8.1. Знайти густину кисню за нормальних умов.

$p \approx 10^5$ Па T = 0° C = 273К R = 8,31 Дж / (моль · К) $M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.	Розв'язання За нормальних умов P = 760мм.рт.ст., T = 0° C. Застосуємо рівняння Менделєєва – Клапейрона (8.6)
ρ- ?	

$$pV = \frac{m}{M}RT, \qquad (1)$$

де p – тиск газу, V – об'єм газу; m – маса газу; M – молярна маса газу; R – універсальна газова стала; T – термодинамічна температура. Густина речовини $\rho = \frac{m}{V}$. (2)

Розв'язуємо сумісно (1) і (2). Для цього з (2) виразимо m і підставимо в (1): $pV = \frac{\rho V\ RT}{M}$, або $p = \frac{\rho RT}{M}$.

Звідки $\rho = \frac{pM}{RT}$. $\rho = \frac{10^5 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{8{,}31 \cdot 273} = 1{,}41\left(\text{кг /м}^3\right)$.

Перевірка одиниці вимірювання:

$$[\rho] = \frac{\text{Па} \cdot \text{кг/моль}}{\text{Дж/(моль} \cdot \text{К)} \cdot \text{К}} = \frac{\text{Н/м}^2 \cdot \text{кг/моль}}{\text{Н} \cdot \text{м/(моль} \cdot \text{К)} \cdot \text{К}} = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Відповідь $\rho = 1{,}41\,\text{кг/м}^3$.

Приклад 8.2. Скільки молекул міститься у посудині ємністю 5л, яка заповнена вуглекислим газом? Температура у посудині – 127° C, тиск – 0,1МПа.

$V = 5 \cdot 10^{-3}\text{м}^3$ T = 400К $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ì î ëü$^{-1}$ p =0,1МПа	Розв'язання Кількість молекул $N = \nu N_A$,
N -?	

де ν – кількість речовини; N_A – постійна Авогадро.

Кількість речовини ν знайдемо, скориставшись рівнянням Менделєєва – Клапейрона (8.6)

$$pV = \nu RT,$$

де p – тиск газу, V – об'єм газу; R – газова постійна; T – термодинамічна температура. Звідки $\nu = \frac{pV}{RT}$.

Тоді $N = \frac{pVN_A}{RT}$.

$$N = \frac{0{,}1 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}}{8{,}31 \cdot 400} = 9{,}06 \cdot 10^{22}.$$

Перевірка одиниці вимірювання:

$$[N] = \frac{\text{Па} \cdot \text{м}^3 \text{моль}^{-1}}{\text{Дж/(моль} \cdot \text{К)} \cdot \text{К}} = 1 \text{ (безрозмірна величина).}$$

Відповідь: $N = 9{,}06 \cdot 10^{22}$.

Приклад 8.3. У балоні об'ємом 5л міститься гелій під тиском 2МПа при температурі 127°С. Після того, як з балона взяли деяку масу гелію, температура у балоні зменшилась на 10 градусів, а тиск – до 1,5 МПа. Яку масу гелію було взято з балона?

$V = 5 \cdot 10^{-3} \text{м}^3$
$p_1 = 2 \cdot 10^6$ Па
$p_2 = 1{,}5 \cdot 10^6$ Па
$R = 8{,}31$ Дж/(моль·К)
$T_1 = 400$К
$T_2 = 390$К
$M = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

m - ?

Розв'язання

Записуємо рівняння Менделєєва – Клапейрона (8.6) для початкового і кінцевого станів газу у балоні.

$$p_1 V = \frac{m_1}{M} RT_1; \ (1) \qquad p_2 V = \frac{m_2}{M} RT_2, \ (2)$$

де p_1, m_1, T_1 – тиск, маса, термодинамічна температура у початковому стані; p_2, m_2, T_2 – відповідні величини у кінцевому стані; V – об'єм балона; M – молярна маса гелію; R – універсальна газова стала.

З (1) і (2) виразимо m_1 і m_2:

$$m_1 = \frac{p_1 VM}{RT_1}; \qquad m_2 = \frac{p_2 VM}{RT_2};$$

Тоді
$$m_1 - m_2 = \frac{p_1 VM}{RT_1} - \frac{p_2 VM}{RT_2} = \frac{VM}{R}\left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2}\right)$$

$$m_1 - m_2 = \frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{8{,}31}\left(\frac{2 \cdot 10^6}{400} - \frac{1{,}5 \cdot 10^6}{390}\right) = 0{,}00277 \text{кг} = 2{,}77 \text{г}$$

Перевірка одиниці вимірювання:

$$[m_1 - m_2] = \frac{\text{м}^3 \cdot \text{кг} \cdot \text{моль}^{-1}}{\text{Дж/(моль} \cdot \text{К)}}\left(\frac{\text{Па}}{\text{К}} - \frac{\text{Па}}{\text{К}}\right) = \frac{\text{м}^3 \cdot \text{кг} \cdot \text{моль}^{-1}}{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{моль}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^{-2}}{\text{К}} = \text{кг}$$

Відповідь: $m_1 - m_2 = 2{,}77$г.

Приклад 8.4. У посудині об'ємом V=25л міститься m_1=100г гелію і m_2=140г азоту при температурі t =27°C. Знайти тиск у посудині.

$V = 2{,}5\cdot10^{-2}$м^3 m_1=0,10кг m_2=0,14кг $M_1=4\cdot10^{-3}$кг/моль $M_2=28\cdot10^{-3}$кг/моль T = 300K p-?	Розв'язання Скористаємося законом Дальтона (8.9), згідно з яким тиск у суміші газів дорівнює сумі парціальних тисків.

$$p = p_1 + p_2, \qquad (1)$$

де $$p_1 = \frac{m_1}{M_1}\frac{RT}{V} \text{ і } p_2 = \frac{m_2}{M_2}\frac{RT}{V}. \qquad (2)$$

Тут M_1 і M_2- молярні маси гелію і азоту відповідно.

Підставимо (2) в (1):

$$p = \frac{m_1}{M_1}\frac{RT}{V} + \frac{m_2}{M_2}\frac{RT}{V} = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right)\frac{RT}{V}. \qquad (3)$$

$$p = \left(\frac{100\cdot10^{-3}}{4\cdot10^{-3}} + \frac{140\cdot10^{-3}}{28\cdot10^{-3}}\right)\frac{8{,}31\cdot(27+273)}{25\cdot10^{-3}} = 2{,}99\cdot10^6 \text{ Па}$$

Перевірка одиниці вимірювання:

$$[p] = \frac{\text{кг}}{\text{кг/моль}}\frac{\text{Дж}\cdot\text{К}}{\text{моль}\cdot\text{К}\cdot\text{м}^3} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па}$$

Відповідь:p=2,99 МПа.

Примітка. Із формули (3), отриманої на основі закону Дальтона, випливає, що кількість молів суміші дорівнює сумі чисел молів окремих її компонентів: $\nu = \nu_1 + \nu_2 = \frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}$.

Приклад 8.5. За умовою попередньої задачі визначити молярну масу суміші газів.

m_1=0,10кг m_2=0,140кг $M_1=4\cdot10^{-3}$кг/моль $M_2=28\cdot10^{-3}$кг/моль $M_{сум}$-?	Розв'язання Перш за все розглянемо поняття молярної маси суміші. Властивості ідеального газу можуть мати не тільки хімічно однорідні гази, але й їх суміші. Тоді для застосування рівняння стану ідеального газу до газової суміші їй слід приписати деяку відносну молекулярну масу. Зрозуміло, що це поняття не має хімічного сенсу, але є корисним при розв'язуванні задач. Маса суміші у кілограмах, яка чисельно дорівнює уявній відносній молекулярній масі суміші, і є молярною масою $M_{сум.}$, яка задовольняє рівнянню Менделєєва – Клапейрона, записаному для суміші:

$$p = \frac{m}{M_{сум}} \cdot \frac{RT}{V} = \frac{m_1 + m_2}{M_{сум}} \cdot \frac{RT}{V}. \qquad (1)$$

Порівняння виразу (1) з виразом (3) попередньої задачі, дає:

$$\frac{m_1 + m_2}{M_{сум}} = \frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2},$$

звідки

$$M_{сум} = \frac{M_1 M_2 (m_1 + m_2)}{m_1 M_2 + m_2 M_1}. \qquad (2)$$

$$M_{сум} = \frac{4 \cdot 10^{-3} \cdot 28 \cdot 10^{-3} \cdot (0{,}10 + 0{,}14)}{4 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}14 + 28 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}10} = 8 \cdot 10^{-3} \text{ (кг/моль)}$$

Відповідь: $M_{сум} = 8 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Приклад 8.6. Густина суміші азоту і водню при температурі $t = 27°C$ і тиску p = 2 ат дорівнює $\rho = 0{,}3 кг/м^3$. Знайти концентрації молекул азоту (n_1) і водню (n_2) в суміші.

$t = 27°C$ $p = 2$ ат $\rho = 0{,}3 кг/м^3$	Розв'язання. Застосуємо для суміші газів рівняння (8.8), яке є справедливим для сукупності будь-яких частинок. $p = nkT$, звідки
n_1; n_2 - ?	

$$n = n_1 + n_2 = \frac{kT}{p}. \qquad (1)$$

Для визначення концентрацій азоту і водню необхідно мати ще одне рівняння, яке зв'язує величини n_1 та n_2. Скористаємося виразом (2), отриманим при розв'язанні попередньої задачі (див. приклад 8.5) для молярної маси суміші, а також залежністю між масою газу m та концентрацією n його молекул.

$$M_{сум} = \frac{M_1 M_2 (m_1 + m_2)}{m_1 M_2 + m_2 M_1}. \qquad (2)$$

$$m = \rho V = n m_0 V = \frac{nVM}{N_A}, \qquad (3)$$

де m_0 – маса однієї молекули.

Після підстановки виразів для m_1 і m_2, отриманих за формулою (3), і скорочення знаходимо

$$M_{сум} = \frac{n_1 M_1 + n_2 M_2}{(n_1 + n_2)}.$$

З іншого боку, з рівняння стану ідеального газу $M_{сум} = \frac{mRT}{Vp} = \rho\frac{RT}{p}$.

Тобто $$\frac{n_1M_1 + n_2M_2}{(n_1 + n_2)} = \rho\frac{RT}{p}. \qquad (4)$$

Сумісне розв'язання системи рівнянь (1) і (4) дає:

$$n_1 = \frac{\rho RT - pM_2}{kT(M_1 - M_2)}; \qquad n_2 = \frac{\rho RT - pM_1}{kT(M_2 - M_1)}.$$

Виражаємо величини, що входять до формул в одиницях СІ: $p = 2{,}00 \cdot 9{,}8 \cdot 10^4$ Па, T = 300К, $M_1 = 28 \cdot 10^{-3}$кг/моль, $M_2 = 2 \cdot 10^{-3}$кг/моль, R=8,31Дж/(моль·К), $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж·К.

$$n_1 = \frac{0{,}3 \cdot 8{,}31 \cdot 300 - 2 \cdot 9{,}8 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot (28 - 2) \cdot 10^{-3}} = 3{,}3 \cdot 10^{24};$$

$$n_2 = \frac{0{,}3 \cdot 8{,}31 \cdot 300 - 2 \cdot 9{,}8 \cdot 10^4 \cdot 28 \cdot 10^{-3}}{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot (2 - 28) \cdot 10^{-3}} = 4{,}4 \cdot 10^{25}.$$

$$[n] = \frac{\frac{кг}{м^3} \cdot \frac{Дж \cdot К}{моль \cdot К} - \frac{Па \cdot кг}{моль}}{\frac{Дж}{К} \cdot \frac{кг}{моль}} = м^{-3}.$$

Приклад 8.7. Вертикальна посудина розділена на дві рівні частини важким теплонепроникним поршнем. У верхній половині знаходиться водень при температурі T і тиску p; у нижній – кисень при температурі 2T. Посудину перевернули. Після охолодження кисню до температури T/2 поршень знов установився посередині посудини. Температура водню залишилася незмінною. Визначити тиск кисню в першому та другому випадках.

Розв'язання.

При рівновазі поршня сила тяжіння, що діє на поршень, урівноважена силами тиску газу знизу і зверху. Тому різниця тисків газу в нижній і верхній частинах циліндра має однакове значення в обох розглянутих випадках. Таким чином, приходимо до першого рівняння, яке відображує умову механічної рівноваги поршня у двох випадках:

$$p_1 - p = p - p_2, \qquad (1)$$

де p – тиск водню, який залишається незмінним при незмінних об'ємі та температурі; p_1 і p_2 – тиск кисню при температурах $T_1 = 2T$ і $T_1 = \frac{T}{2}$ відповідно. Друге рівняння записуємо для двох станів кисню на основі

закону Шарля, оскільки маса кисню та його об'єм в обох випадках є однаковими:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{2T}{\frac{T}{2}}. \qquad (2)$$

Приводимо рівняння (1) і (2), які утворюють систему, до виду

$$p_1 + p_2 = 2p; \qquad (3)$$

$$\frac{p_1}{p_2} = 4. \qquad (4)$$

Сумісний розв'язок рівнянь (3) і (4) дає: $p_1 = \frac{8}{5}p$; $p_2 = \frac{2}{5}p$.

Приклад 8.8. На рисунку 8.5 наведений графік зміни стану ідеального газу в координатах (p,T). Представити цей коловий процес (цикл) у координатах (p, V) і (V, T).

Розв'язання.

Із законів Шарля та Гей-Люссака випливає, що лінії постійного об'єму – ізохори (в координатах (p,T)) і лінії постійного тиску – ізобари (в координатах (V, T)) є прямими, що проходять через початок координат (див. рис.8.3, 8.4).

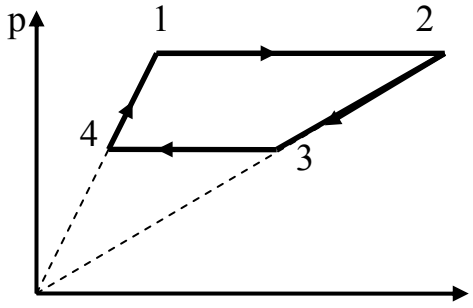


Рис.8.5

Отже, процеси 1-2 та 3-4 є ізобарними процесами, а 2-3 та 4-1 –ізохорними. Звертаємо увагу на те, що процес ізобарного поширення газу (процес 1-2) протікає при більшому тиску, ніж його стискання (процес 3-4), а процес 2-3 протікає при більшому об'ємі, ніж процес 4-1. Тоді в координатах (p,V) графік циклу зображується прямокутником 1234 (див. рис. 8.6).

В координатах (V, T) цикл зображується аналогічно заданому на рис.8.5 з тією відміною, що похилі прямі відповідають ізобарним процесам, а горизонтальні – ізохорним (рис.8.7).

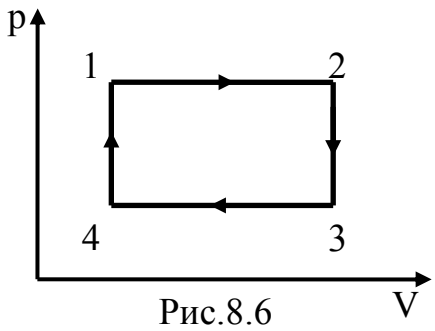


Рис.8.6

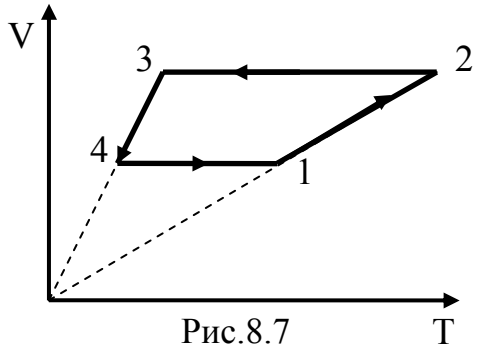


Рис.8.7

Приклад 8.9. На рисунку 8.8 зображено замкнений процес 1-2-3-4, точки 1 і 3 якого відповідають ізотермам з температурами t_1=27°C і t_2=177°C. У стані 1 об'єм газу дорівнює V_1= 3 дм^3. При якому значенні об'єму V_2 точки 2 і 4 будуть знаходитися на одній ізотермі? Чому дорівнює температура T цієї ізотерми?

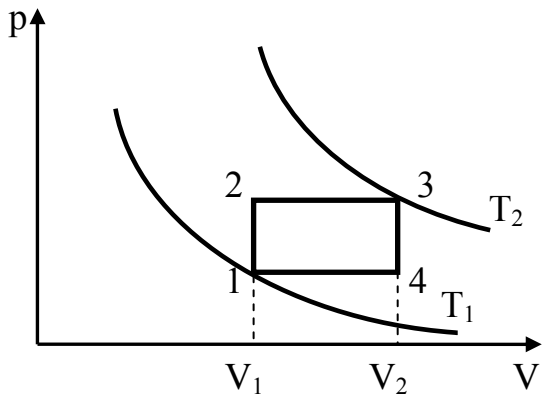


Рис. 8.8

T_1= 300К T_2= 450К V_1= $3\cdot10^{-3}$м^3
V_2 - ? T - ?

Розв'язання

Процеси 2-3 та 3-4 – ізобаричні. На основі закону Гей-Люссака для станів 2 і 3 маємо $\frac{V_1}{V_2}=\frac{T}{T_2}$ (1), для станів 1 і 4 – $\frac{V_1}{V_2}=\frac{T_1}{T}$ (2), звідки $\frac{T}{T_2}=\frac{T_1}{T}$ (3). Із співвідношення (3) виражаємо температуру T ізотерми, до якої належать точки 2 і 4:

$$T=\sqrt{T_1T_2}\,. \quad (4)$$

Із співвідношення (1) з урахуванням виразу для температури (4) знаходимо об'єм V_2:

$$V_2=V_1\frac{T_2}{T}=V_1\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}\,.$$

$T=\sqrt{300\cdot450}$=367,4 (К); V_2= $3\cdot10^{-3}\cdot\sqrt{\frac{450}{150}}=5,2\cdot10^{-3}$ (м^3).

Приклад 8.10. Об'єм циліндра поршневого насоса дорівнює V_1. Насос з'єднаний з балоном об'ємом V, який містить повітря за нормального атмосферного тиску p_0. Знайти тиск у балоні після n робочих ходів поршня, якщо насос працює у режимі нагнітання повітря у балон. Температура газу під час роботи насоса не змінюється.

Розв'язання.

Під час одного ходу поршня у режимі нагнітання насос захоплює з атмосфери об'єм V_1 за атмосферного тиску p_0. Після n робочих ходів у балон буде введена маса повітря, що міститься за атмосферного тиску в об'ємі nV_1. Оскільки за умовою задачі температура газу залишається

незмінною, спричинений введеною масою газу додатковий парціальний тиск p_n можна знайти за законом Бойля-Маріотта (2.6):

$$p_n V = p_0 n V_1, \quad \text{звідки} \quad p_n V = p_0 n \frac{V_1}{V}.$$

Повний тиск повітря у балоні дорівнює:

$$p = p_n + p_0 = p_0 \left(\frac{V_1}{V} n + 1 \right).$$

Приклад 8.11. Об'єм циліндра поршневого насоса дорівнює V_1. Насос з'єднаний з балоном об'ємом V, який містить повітря за нормального атмосферного тиску p_0. Знайти тиск у балоні після n робочих ходів поршня, якщо насос працює у режимі розрідження повітря у балоні. Температуру газу під час роботи насоса вважати постійною. Побудувати графік залежності тиску в балоні від кількості ходів поршня.

Розв'язання.

До початку роботи насосу у режимі розрідження повітря в балоні займало об'єм V при тиску p_0. Наприкінці першого ходу поршня та сама маса повітря займає об'єм $V+V_1$ при тиску p_1. Згідно умови зміною температури можна знехтувати і вважати її постійною. Тоді параметри двох станів газу можна зв'язати за законом Бойля – Маріотта:

$$p_1 \left(V + V_1 \right) = p_0 V, \text{ звідки } p_1 = \frac{p_0 V}{V + V_1}. \qquad (1)$$

Далі розглядаємо значення об'єму і тиску газу в балоні на початку і наприкінці другого ходу поршня, які дорівнюють відповідно V і p_1 та $V+V_1$ і p_2:

$$p_2 \left(V + V_1 \right) = p_1 V. \qquad (2)$$

З рівняння (1) з урахуванням виразу (2) отримуємо:

$$p_2 = \frac{p_1 V}{V + V_1} = \left(\frac{V}{V + V_1} \right)^2 p_0 .$$

Аналогічні викладки дають для тиску у балоні наприкінці n-го робочого ходу вираз

$$p = p_n = \left(\frac{V}{V + V_1} \right)^n p. \qquad (3)$$

Графік залежності тиску в посудині від кількості ходів поршня n є графіком степеневої функції з основою $\left(\frac{V}{V + V_1} \right) < 1$, звідки випливає, що з кожним циклом тиск зменшується на все меншу величину (рис.8.9).

Згідно з формулою (3) тиск в балоні зменшується з кожним ходом насосу, і може бути досягнуте будь-яке розрідження повітря у балоні. В дійсності відкачати повітря із посудини повністю, так, щоб тиск у ньому дорівнював нулю, неможливо. Для кожного насосу існує деяке значення тиску p_{min}, нижче від якого він не дає розрідження.

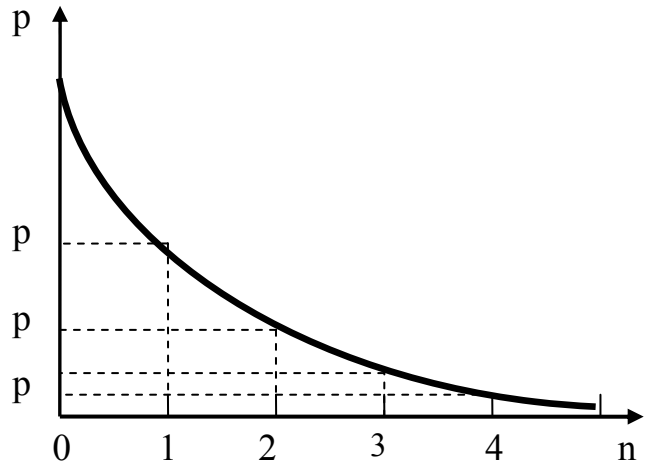


Рис.8.9

Приклад 8.12. За умовою попередньої задачі знайти мінімальний тиск p_{min}, до якого може бути розріджене повітря у балоні.

Розв'язання.

При виштовхуванні повітря в атмосферу між поршнем і клапаном, через який виштовхується повітря, завжди залишається невеличкий, але кінцевий об'єм ΔV. За деякого мінімального тиску в посудині p_{min} повітря, яке стискається поршнем від початкового об'єму камери циліндра V_1 до об'єму ΔV, буде мати тиск не вищий за атмосферний p_0 і не зможе вийти зовні. Насос буде працювати вхолосту. Отже для визначення граничного значення тиску, яке обумовлене існуванням шкідливого простору ΔV, можна записати умову: $p_{min}V_1 = p_0\Delta V$. Звідки $p_{min} = p_0\dfrac{\Delta V}{V_1}$.

Для досягнення значного розрідження як правило використовують декілька насосів, з'єднаних послідовно. Кожен наступний насос відкачує повітря не в атмосферу, а в об'єм, із якого відкачує повітря насос попереднього ступеня.

Задачі для самостійного розв'язування

8.1. Водень масою m = 2г міститься у балоні об'ємом V = 800 см^3 під тиском p = 0,2МПа. Чому дорівнює температура t газу?

8.2. Азот масою m = 28г міститься у закритій посудині при температурі t=27^{0}С під тиском p=750мм рт.ст. Визначити об'єм посудини.

8.3. У посудині об'ємом V = 10л під тиском p = 640мм рт. ст. міститься кисень. Температура кисню t = 27^0 С. Знайти масу кисню.

8.4. Вичислити густину ρ азоту, що знаходиться у балоні під тиском p=20 атм. Температура азоту t=17°С.

8.5. Знайти густину ρ повітря за нормальних умов.

8.6. Тиск p насиченої водяної пари при температурі t=27°C дорівнює 26,7мм рт.ст. Визначити густину ρ водяної пари за цих умов, вважаючи його за ідеальний газ.

8.7. За якої температури t густина насиченої водяної пари дорівнює $\rho = 90$ г / м^3? Тиск вважати рівним p = 12,5кПа.

8.8. Закрита посудина у формі куба об'ємом $V = 8{,}0 \cdot 10^{-3}$ì ^{3} містить повітря за нормальних умов. Яка сила тиску буде діяти на кожну з граней кубічного сосуду, якщо його нагріли до 150^{0}C?

8.9. Деякий газ знаходиться під тиском p=7атм при температурі t=35°C. Визначити відносну молекулярну масу газу M_r, якщо густина газу ρ=12,2 кг/м^3.

8.10. Балон об'ємом V=50л заповнений киснем. Температура кисню t=20°C. Після того, як частину кисню витратили, тиск у балоні знизився на $\Delta p = 2$ атм. Визначити масу Δm витраченого кисню.

8.11. У балоні об'ємом V=20 л знаходиться аргон під тиском p_1=8 атм і температурі t_1=50°C. Після того, як з балона взяли деяку кількість аргону, тиск у балоні знизився до p_2 = 6 атм і установилася температура t_2=30°C. Визначити масу аргону Δm, взятого з балона.

8.12. У балоні міститься m = 2кг повітря під тиском p = 10^{7}Па. Внаслідок витікання газу тиск у балоні знизився до p=5·10^{5}Па. Яка маса газу $\Delta m = m_1 - m_2$ витекла з балона? Температуру вважати постійною.

8.13. Кімната має площу підлоги S = 50м^2 і висоту h = 4м. Яка кількість повітря ν міститься у цій кімнаті при температурі t = 29^{0}C? Тиск вважати нормальним.

8.14. Закритий балон ємністю V = 5л заповнений повітрям масою m = 2,9г при температурі t_1 = 17^{0}C. На скільки збільшиться тиск у балоні при нагріванні повітря до t_2 = 37^{0}C?

8.15. У посудині міститься ідеальний газ під тиском p = 0,2Мпа. Об'єм посудини V = 2л, температура у посудині t= 7^{0}C. Скільки молекул N міститься у посудині?

8.16. Водень масою m = 10г міститься у посудині об'ємом V = 2л. Знайти концентрацію n молекул у посудині.

8.17. Найнижчийтиск, який можна отримати за допомогою найдосконалішої вакуумної техніки, приблизно дорівнює p = 10^{-12}Па. Скільки молекул n за такого тиску містить 1см^3 при температурі 0^{0}C?

8.18. При температурі замерзання води густина повітря (азоту) на рівні моря дорівнює ρ = 1,255 кг/м^3. Маса молекули азоту $4{,}68 \cdot 10^{-26}$ кг. Якій абсолютній температурі (за шкалою Кельвіна) відповідає температура замерзання води, а саме 0 градусів за шкалою Цельсія?

8.19. У закритому балоні об'ємом V = 10л міститься m_1 = 2г води і m_2= 5г вуглекислого газу (CO_2) при температурі t = 127^{0}C. Вважаючи, що за такої

температури вся вода перетворюється на пару, знайти тиск p у балоні. 2.45. Дві посудини однакового об'єму містять кисень. У одній посудині тиск p_1= 10 атм і температура t_1=120°C, в іншому p_2=15атм і t_2=70°C. Посудини з'єднали трубкою і охолодили кисень, що знаходиться в них, до температури t=20°C. Визначити тиск p, що встановився в посудинах.

8.20. У балоні об'ємом V=11,2 л знаходиться водень за нормальних умов. Після того, як у балон було додатково введено деяку кількість гелію, тиск у балоні зріс до p = 1,5атм, а температура не змінилася. Визначити масу гелію, введеного у балон.

8.21. Посудина об'ємом V=0,01м^3 містить азот масою m_1=7г і водень масою m_2= 1г при температурі t=7°C. Визначити тиск p суміші газів.

8.48. У посудині міститься m_1 = 10 г водню і m_2 = 14г азоту при температурі t = 7^{0}C і тиску p = 0,5МПа. Знайти: 1) молярну масу суміші M; 2) об'єм посудини V.

8.22. Балон об'ємом V= 15 л містить суміш водню і азоту за температури t=27°C і тиску p=2,3 атм. Маса суміші m= 145 г. Визначити масу m_1 водню і масу m_2 азоту.

8.23. Один з балонів об'ємом V_1= 20л містить азот під тиском p_1= 25атм; другий балон об'ємом V_2= 44л містить кисень під тиском p_2=16 атм. Після з'єднання балонів між собою гази утворили однорідну суміш (без зміни температури). Знайти парціальні тиски p_1 і p_2 обох газів суміші і повний тиск p суміші.

8.24. У посудині знаходиться суміш m_1 = 4г закису азоту (N_2O) і m_2=24г азоту. Визначити густину суміші ρ при температурі t=27^{0}C і тиску p = $3\cdot10^5$Па.

8.25. Газова суміш, що складається з кисню і азоту, знаходиться у балоні під тиском p=10атм. Вважаючи, що маса кисню становить 20% від маси суміші, визначити парціальні тиски p_1 і p_2 кожного з газів.

8.26. Дві теплоізольовані посудини з об'ємами V_1=1л і V_2=3л сполучені трубкою з краном. До відкриття крану у першій посудині містився азот під тиском p_1= $0,5\cdot10^5$Па і температурі t_1=0^{0}C, а у другій – азот під тиском p_2=$1,5\cdot10^5$ Па і температурі t_2 = 100^{0}C. Знайти, які тиск p і температура t установляється у суміші газів, якщо відкрити кран.

8.27. У посудині знаходиться 1л води при температурі 27°C. Чому б дорівнював тиск усередині посудини, якби сили притягання між молекулами води раптово зникли?

8.28. Сухе повітря по об'єму складається на 78% з азоту і на 21% з кисню. Визначити для повітря відношення маси азоту до маси кисню.

8.29. Маса m = 716 мг органічної сполуки у газоподібному стані, яка має формулу $(C_3H_6O)_n$ при тиску p = 10^5Па і температурі t = 200°C займає об'єм V = 243 см^3. Визначити значення параметра n.

8.30. Два балони з киснем місткістю 2л та 7л з'єднали трубкою. Який тиск установиться в балонах, якщо до з'єднання він відповідно дорівнював $1,0 \cdot 10^5$ Па і $0,52 \cdot 10^5$ Па? Температура газу не змінилася.

8.31. На рисунку 2.9 наведений графік зміни стану ідеального газу в координатах (V, T). Представити цей коловий процес (цикл) у координатах (p, V) і (p,T).

8.32. На рисунку 2.12 наведено графік зміни стану ідеального газу в координатах (V, T). Представити цей коловий процес (цикл) у координатах (p, V) і (p,T).

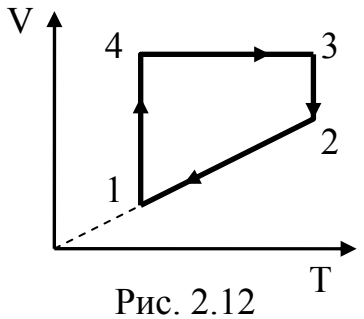


Рис. 2.12

8.33. Об'єм деякої маси ідеального газу при ізобаричному нагріванні на $\Delta T=10$ К збільшився на $\alpha=0,03$ частини від початкового значення. Визначити початкову температуру газу.

8.34. Визначити температуру газу, який знаходиться у закритій посудині, якщо тиск газу збільшився на 0,5% від початкового значення при нагріванні на 1°С.

8.35. При нагріванні деякої маси ідеального газу на $\Delta t = 250\,°C$ його об'єм збільшився на $\alpha = \frac{1}{7}$, а його тиск на $\beta = \frac{1}{2}$ свого початкового значення. Якою була початкова температура газу?

8.36. На якій глибині бульбашка повітря, що спливає у воді, мала вдвічі менший об'єм, ніж біля поверхні води? Атмосферний тиск $p_0 = 10^5$ Па, густина води $\rho = 10^3$ кг/м^3. Зміною температури, тиском пари та кривизною поверхні знехтувати. $g = 10$ м/с^2.

8.37. Повітряна бульбашка на дні озера глибиною h = 16м має об'єм V=1,10 см^3. Температура на дні $t_1 = 5^0$С, а на поверхні – $t_2 = 20^0$С. Знайти об'єм повітряної бульбашки, коли вона досягне поверхні води.

8.38. Аквалангіст, який знаходиться на глибині h = 12м від поверхні води, вдихнув повітря та заповнив весь об'єм легенів, який дорівнює V=5,5л. До якого об'єму розширяться його легені, якщо він швидко винирне на поверхню? Чи розумно це робити?

8.39. Шину автомобіля накачали при температурі $t_1=10^0$С до надлишкового тиску p_1 = 200кПа. Після того, як автомобіль пройшов 100км, температура в шині піднялась до $t_2 = 40^0$С. Яким при цьому буде тиск усередині шини?

840. Пляшка заповнена газом і щільно закрита пробкою, площа перерізу якої $S = 2,5$ см^2. До якої температури слід нагріти газ, щоб пробка вилетіла з пляшки, якщо сила тертя, яка утримує пробку $F = 12$ Н? Початковий тиск у пляшці і зовнішній тиск повітря однакові і дорівнюють $p_0 = 100$ кПа, а початкова температура $T_0 = 270$ К.

8.41. Усередині закритого з обох боків горизонтального циліндра знаходиться тонкий поршень, який може рухатися в циліндрі без тертя. З одного боку поршня знаходиться водень масою $m_1 = 3,0$ г, з другого – азот масою $m_2 = 21$ г. Яку частину об'єму циліндра займає водень?

8.42. Визначити густину суміші $m_1 = 4$ г водню і $m_2 = 32$ г кисню при температурі $t = 7°C$ і тиску $p = 10^5$ Па.

8.43. Балон місткістю $V_1 = 2$ л заповнений газом при тиску $p_1 = 12 \cdot 10^5$ Па, другий балон місткістю $V_2 = 5$ л заповнений тим самим газом при тиску $p_2 = 2,2 \cdot 10^5$ Па. Який тиск установиться в балонах, якщо їх з'єднати тонкою трубкою? Процес ізотермічний.

8.44. Лазерні трубки об'ємом $V_0 = 60$ см^3 заповнюються сумішшю гелію і неону в молярному відношенні $k = 5:1$ відповідно при загальному тиску в трубці $p_0 = 800$ Па. Яку кількість лазерних трубок можна заповнити газом, який міститься в двох балонах об'ємом V = 2л кожен, якщо тиск у балоні з гелієм $p_1 = 6670$ Па, у балоні з неоном $p_2 = 2670$ Па.

8.45. У посудині об'ємом $V = 0,5$ л знаходиться m = 1г пароподібного J_2. При температурі $t = 1000$ °C тиск у посудині виявився рівним $p = 10^5$ Па. Знайти ступінь дисоціації молекул йоду J_2 на атоми J за цими умовами. Молярна маса J_2 дорівнює M = 0,254кг/моль.

8.46. У посудині, розділеній навпіл перегородкою, знаходиться $m_1 = 2$ г водню і $m_2 = 32$ г кисню при температурі $t_0 = 27$ °C і однаковому тиску. Після того, як перегородку прибрали, і гази прореагували, установилася температура $t = 127$ °C і тиск $p = 10^5$ Па. Визначити початковий тиск у посудині.

8.47. Об'єм циліндра поршневого насоса V_1 = 0,5 л. Насос з'єднаний з балоном ємністю V_2 = 3,0 л, який містить повітря за нормальног атмосферного тиску. Знайти тиск повітря в балоні після n = 6 рабочих ходів поршня у випадках режимів роботи 1) нагнітаючого; 2) розріджуючого.

8.48. Автомобільну камеру об'ємом V = 12 л необхідно накачати до тиску p = 3,5атм. Визначити кількість ходів насоса, який забирає при кожному ході V_1 = 600см^3 повітря за нормального тиску, якщо камера спочатку 1)була порожня; 2) напівзаповнена; 3) повністю заповнена за нормального атмосферного тиску.

8.49. Який тиск установиться в резервуарі пневматичного гальма трамвайного вагона після 250 ходів насосу? Об'єм резервуара дорівнює V=30 л, а насос за один хід подає V_1 = 500см^3 повітря за нормального тиску. Зміною температури знехтувати.

8.50. Об'єм посудини $V=5\cdot10^3$ см^3, об'єм циліндра насоса, який працює у розріджу вальному режимі, дорівнює 250 см^3. Після n = 50 ходів поршня в посудині установився тиск h = 5,5кПа. Яким був початковий тиск у посудині?

Тестові завдання

1. **Установити відповідність:**

Процес	Рівняння процесу
1. ізотермічний	А. $\frac{V}{T}=const$
2. адіабатний	Б. $PV=const$
3. ізохорний	В. $PV^{\gamma}=const$
4. ізобарний	Г. $\frac{P}{T}=const$

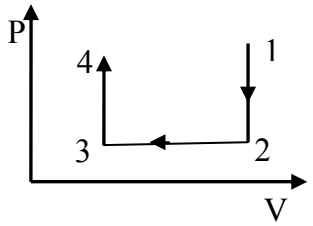
2.

Процес	Параметр, який залишається незмінним
1. ізотермічний	А. тиск P
2. адіабатний	Б. температура T
3. ізохорний	В. ентропія S
4. ізобарний	Г. об'єм V

Вибрати вірну відповідь.

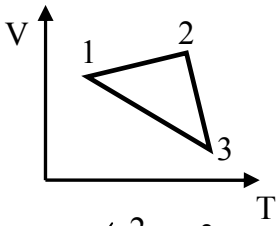
3. Якщо температуру газу, що знаходиться в балоні, збільшити у 3 рази, то густина газу в балоні

1. зменшиться у 3 рази
2. зменшиться у 6 разів
3. збільшиться у 3 рази
4. збільшиться у 6 разів
5. не зміниться



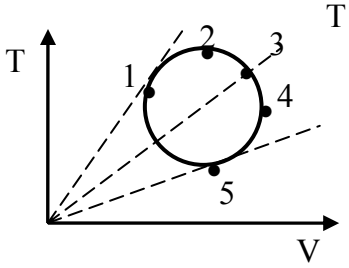
4. Яка точка на p-V – діаграмі зміни стану ідеального газу, що зображена на рисунку, відповідає мінімальній температурі?

1 1; 2) 2 3) 3 4) 4



5. Ідеальний газ здійснює замкнений цикл, показаний на рисунку. Тиск газу зменшується на ділянках

1. 1 – 2
2. 1 – 2 і 2 – 3
3. 2 – 3
4. 2 – 3 і 3 – 1
5. 3 – 1



6. Ідеальний газ здійснює замкнений цикл, показаний на рисунку. Тиск газу є максимальним у точці

1. 1 2. 2 3. 3 4. 4 5. 5

7. Рівняння Менделєєва – Клапейрона виражає формула

1. $PV=const$ 2. $PV=\frac{2}{3}W_k$ 3. $PV=\frac{m}{M}RT$ 4. $PV^{\gamma}=const$

8. Якщо при ізобарному нагріванні ідеального газу від температури 17°C його густина зменшилась у 2 рази, то температура газу збільшилась на

1. 34°C 2. 17°C 3. 68°C 4. 290°C 5. 563°C

9. Якщо бульбашка повітря підіймається при постійній температурі і атмосферному тиску 100 кПа з глибини 80 м на поверхню водоймища, її об'єм збільшується в

1. 16 разів 2. 8 разів 3. 4 рази 4. 6 разів 5. 9 разів

10. Для збільшення об'єму газу в 2 рази порівняно з його об'ємом при температурі T=273 K, цей газ потрібно ізобарно нагріти на

1. 546 K 2. 273 K 3. 200 K 4. 117 K 5. 77 K

11. Якщо повітря у відкритій посудині нагріти від 27 до 127 °C, то його маса в посудині зменшиться у

1. 0,5 разу 2. 2,7 разу 3. 1,33 разу 4. 3 разу 5. не зміниться

12. Водень H_2, кисень O_2, азот N_2 та водяна пара H_2O (Молярні маси відповідно дорівнюють $2\cdot10^{-3}$ кг/моль, $32\cdot10^{-3}$ кг/моль, $28\cdot10^{-3}$ кг/моль та $18\cdot10^{-3}$ кг/моль) знаходяться за однакового тиску і температури. При цих умовах мінімальну густину має

1.водень 2. кисень 3. азот 4. водяна пара

13. В однакових посудинах за однакових температур знаходяться однакові маси водню H_2, кисню O_2, азоту N_2 та водяної пари H_2O. (Молярні маси відповідно дорівнюють $2\cdot10^{-3}$ кг/моль, $32\cdot10^{-3}$ кг/моль, $28\cdot10^{-3}$ кг/моль та $18\cdot10^{-3}$ кг/моль). Найбільшим буде тиск в посудині з

1. воднем 2. киснем 3. водяною парою 4. азотом

14. Якщо кисень (O_2) і метан (CH_4) знаходяться за однакового тиску і однакової температури, відношення густини кисню до густини метану дорівнює

1. 0,9 2. 1,2 3. 1,5 4. 2 5. 3

15. При випуску з балона частини газу його температура зменшилась у n разів, тиск – у k разів. Із балона була випущена частина газу $\frac{\Delta m}{m} = \frac{m - m_1}{m}$, яка дорівнює

1. $\frac{k-1}{n}$ 2. $\frac{1-n}{k}$ 3. $\frac{n}{k}$ 4. $\frac{k}{n}$ 5. $1-\frac{n}{k}$

16. Якщо газ розширюється за законом $pV^2 = const$, його температура

1. зростає
2. зменшується
3. не змінюється
4. відповідь залежить від кількості речовини у газі
5. газ не може здійснити такий процес

17. Якщо газ розширюється за законом $\frac{p}{V^2} = const$, його температура

1. зростає
2. зменшується
3. не змінюється
4. відповідь залежить від кількості речовини у газі
5. газ не може здійснити такий процес

Розділ 9. Основи молекулярно-кінетичної теорії газів

Тема: Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії ідеального газу. Середня кінетична енергія руху молекул. Швидкості молекул газу. Закон розподілу молекул за швидкостями. Барометрична формула. Розподіл частинок у потенціальному полі. Розподіли Максвелла і Больцмана як окремі випадки розподілу Гіббса.

Зіткнення молекул і явища переносу: дифузія, в'язкість і теплопровідність газів.

Основні поняття і формули

● Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії ідеальних газів зв'язує між собою макро- і мікропараметри стану. Може бути виведено з використанням статистичного методу на основі уявлення про тиск газу як результат зміни імпульсу стінки при зіткненні з нею молекул.

Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії ідеальних газів:

$$p = \frac{1}{3} m_0 n \left\langle v^2 \right\rangle. \qquad (9.1)$$

Тиск, який спричиняють молекули ідеального газу на стінки посудини, є пропорційним масі молекули m_0, концентрації молекул n та середньому значенню квадрата швидкості молекули $\left\langle v^2 \right\rangle$.

Рівнянню (9.1) можна надати вигляду:

$$p = \frac{2}{3}\, n \ < \varepsilon_k >, \qquad (9.1а)$$

де $< \varepsilon_k >$ – середня кінетична енергія поступального руху молекули.

Множення виразу (9.1а) на об'єм газу V дає:

$$pV = \frac{2}{3} W_k \qquad (9.1б)$$

Добуток тиску ідеального газу на його об'єм дорівнює $2/3$ величини кінетичної енергії поступального руху всіх його молекул.

● Для одноатомної молекули середня кінетична енергія поступального руху молекули при температурі T дорівнює

$$< \varepsilon_k > = \frac{3}{2} kT \quad (k \text{ –стала Больцмана}),$$

що відповідає трьом ступеням вільності (i=3), оскільки для завдання положення центра молекули необхідні три координати (x, y, z).

Двохатомні (подібні гантелі) або багатоатомні молекули окрім енергії поступального руху мають також кінетичну енергію обертального руху, причому при зіткненні двох молекул енергія одного виду руху переходить в інший (див. рис. 9.1).

Закон рівнорозподілу енергії: середня енергія, яка припадає на одну ступінь вільності молекули, дорівнює $\frac{1}{2}kT$.

Таким чином, для багатоатомної молекули

$$<\varepsilon_k> = \frac{i}{2}kT, \qquad (9.2)$$

де i – кількість ступенів вільності молекули.

Для одноатомного газу $i = 3$;

для двохатомного $i = 5$ ($i_{пост.}=3; i_{оберт.}=2$);

для багатоатомного $i=6$ ($i_{пост.}=3; i_{оберт.}=3$).

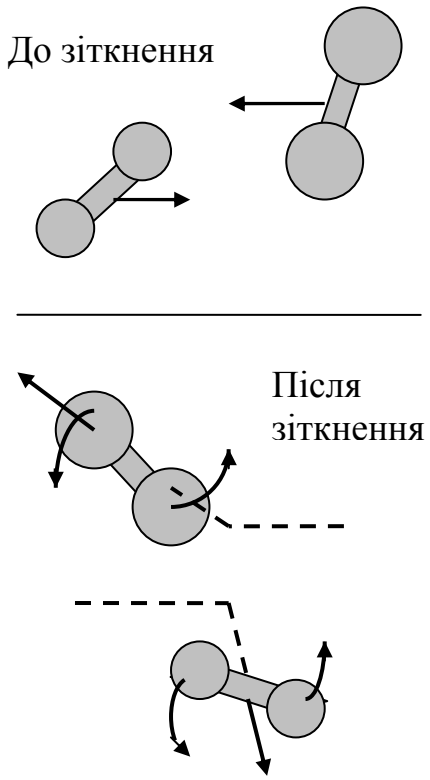


Рис.9.1 Після зіткнення двох молекул виникає обертальний рух.

Статистичний опис хаотичного руху молекул

● **Поняття функції розподілу густини ймовірності.** Нехай x_i – деяка характеристика системи (наприклад, швидкість руху молекул). Припустимо, що в результаті серії, яка складалась із N випробувань, значення величини x_i випало N_i разів.

Імовірністю p_i появи події x_i називають границю відношення N_i/N при нескінченній кількості іспитів: $p_i = \lim N_i/N$ при $N \to \infty$.

Середнє значення дискретної величини x дорівнює:

$$\langle x \rangle = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i . \qquad (9.3)$$

Для аналізу розподілу неперервних величин використовують поняття **функції розподілу густини ймовірності f(x)**, яка дорівнює відношенню ймовірності dp попадання величини x в інтервал від x до x+ dx до ширини цього інтервалу.

$$f(x) = dp/dx. \qquad (9.4)$$

За допомогою функції f(x) можна розрахувати ймовірність попадання величини x до шуканого інтервалу значень, наприклад, від x_1 до x_2.

$$P(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx . \qquad (9.5)$$

Якщо всі можливі значення випадкової величини x належать до інтервалу (a,b), то її середнє значення і середнє значення її квадрата розраховують за формулами:

$$\langle x \rangle = \int_a^b x\, f(x)\, dx\,; \tag{9.6}$$

$$\langle x^2 \rangle = \int_a^b x^2\, f(x)\, dx\,. \tag{9.7}$$

Інтеграл функції f(x) у межах від $-\infty$ до $+\infty$ відповідає достовірній події і дорівнює 1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1\,. \tag{9.8}$$

Ця умова носить назву **умови нормування** функції густини розподілу ймовірності.

● **Закон розподілу молекул за швидкостями (закон Максвелла).**

При рівноважному стані ідеального газу зіткнення молекул приводять до рівномірного розподілу у просторі напрямів їх руху.

Усі напрями руху молекул газу мають рівну ймовірність! Можливі значення швидкостей знаходяться в межах від 0 до ∞, але їх імовірність є різною.

Функція розподілу молекул газу за швидкостями має назву розподілу Максвелла.

Згідно розподілу Максвелла кількість молекул dN, модуль швидкості яких лежить у діапазоні від v до v + dv, дорівнює

$$dN = N \cdot 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} v^2 dv\,, \tag{9.9}$$

де N – повна кількість молекул; m_0 – маса молекули.

Відповідно до формули (9.9) функція розподілу густини ймовірності $f(v) = \frac{dN}{N \cdot dv}$, яка, з одного боку, визначає густину ймовірності того, що окрема молекула має швидкість, яка належить до одиничного інтервалу швидкостей поблизу даної швидкості v; з другого боку –визначає відносну кількість молекул, швидкості яких належать до цього інтервалу, має вигляд:

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} v^2\,. \tag{9.10}$$

Графічне зображення функції розподілу Максвелла (9.6) наведено на рис.9.2. Крива розподілу дозволяє визначити відносну кількість молекул $\frac{\Delta N}{N}$, швидкості яких попадають в будь-який інтервал, наприклад, від v_1 до v_2:

$$\frac{\Delta N}{N} = \int_{v_1}^{v_2} f(v)dv. \quad (9.11)$$

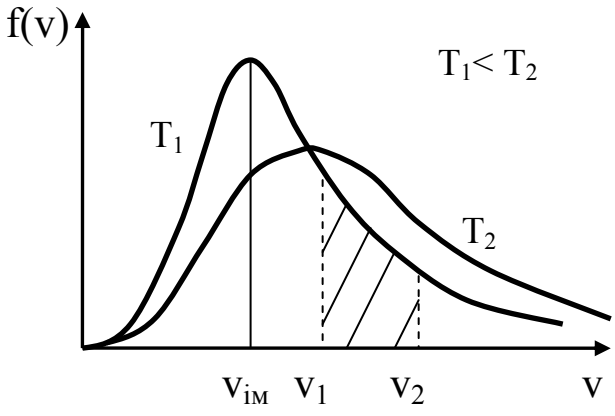


Рис. 9.2

На рис. 9.2 ця кількість молекул зображується площиною заштрихованої смуги.

Швидкість, що відповідає максимуму функції розподілу (рис.9.2), має назву найбільш імовірної швидкості $v_{ім}$. Для її визначення необхідно дослідити функцію розподілу (9.6) на екстремум.

Результат такого дослідження дає:

$$v_{ім} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}. \quad (9.12)$$

Більшість молекул мають швидкості близькі до значення $v_{ім}$ (див. табл. 9.1). При збільшенні температури $v_{ім}$ зростає, і максимум кривої розподілу (рис.9.2) зміщується вправо.

Таблиця 9.1.

$\frac{v}{v_{ім}}$	$\frac{\Delta N}{N}$,%
0 – 0,5	8,1
0,5 – 1,5	70,7
1,5 – 2	16,6
2 – 3	4,6
3	0,04
5	$6 \cdot 10^{-9}$

Підстановка (9.12) у формулу (9.10) надає максимальне значення функції розподілу $f(v_{ім})$, яке пропорційне $\sqrt{\frac{m_0}{T}}$. Отже, при збільшенні температури крива розподілу стає все нижчою, більш пологою, але площа під нею не змінюється і залишається рівною одиниці, згідно з умовою нормування.

Використання функції розподілу Максвелла для обчислення середньої та середньоквадратичної швидкості молекул ідеального газу за формулами (9.6) і (9.7) дає:

– середня арифметична швидкість $< v > = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$; (9.13)

– середня квадратична швидкість $v_{кв} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$. (9.14)

Введення у розгляд відносної швидкості молекул $u = \frac{v}{v_{ім}}$, де v – задана швидкість, $v_{ім}$ – найбільш ймовірна швидкість, дозволяє надати функції розподілу (9.10) більш компактного виду, який часто використовують при розв'язкуванні задач:

$$f(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2 . \qquad (9.10a)$$

● **Розподіл частинок у потенціальному полі (розподіл Больцмана).**

Функція розподілу частинок за координатами в потенціальному полі сил має назву розподілу Больцмана. У випадку, якщо потенціальна енергія частинок залежить тільки від координати z., розподіл Больцмана має вигляд:

$$f(z) = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{U(z)}{kT}} dz} e^{-\frac{U(z)}{kT}}, \qquad (9.15)$$

де $U(z)$ - потенціальна енергія частинки в точці з координатою z.

Як наслідки з розподілу Больцмана можна отримати:

- барометричну формулу;
- формулу розподілу концентрації частинок за координатами в потенціальному полі сил.

● **Барометрична формула.** Усі тіла на земній поверхні, в тому числі молекули, знаходяться в полі тяжіння Землі. Внаслідок дії сили тяжіння і хаотичного руху молекул повітря установлюється деякий нерівномірний розподіл молекул за висотою: чим вище шар повітря, тим менша там концентрація молекул і меншим є тиск.

Барометрична формула, яка надає залежність тиску газу від висоти h в полі сили тяжіння, має вигляд

$$p = p_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}, \qquad (9.16)$$

де p_0 – тиск при h = 0; p – тиск на висоті h; g – прискорення сили тяжіння.

При використанні барометричної формули слід пам'ятати, що вона виведена за таких припущень:

- температура атмосфери є однаковою на різних висотах (так звана, ізотермічна атмосфера);
- прискорення вільного падіння не залежить від висоти (g = const);
- повітря – ідеальний газ.

● **Залежність концентрації частинок від $\vec{r}$ в потенціальному полі сил $U(\vec{r})$:**

$$n(\vec{r}) = n(\vec{r}_0)e^{-\frac{U(\vec{r})}{kT}}, \qquad (9.17)$$

де $n(\vec{r}_0)$ - концентрація частинок в точці з нульовою потенціальною енергією $U(\vec{r}_0) = 0$.

Згідно з формулою (9.17) концентрація частинок більше там, де менше їх потенціальна енергія, і навпаки, менше в тих місцях, яким відповідає більше значення потенціальної енергії.

Для розподілу частинок в потенціальному полі тяжіння Землі $U = m_0 gh$, і формула (9.17) набуває вигляду

$$n = n_0 e^{-\frac{m_0 gh}{kT}} \qquad (9.18)$$

Формулу (9.14), яка характеризує розподіл концентрації молекул газів, що входять до складу повітря, з висотою можна отримати також із барометричної формули (9.16) за допомогою формули (8.8) $p = nkT$.

Для обох розподілів – Максвелла і Больцмана є характерною наявність експоненціального множника, в показнику якого стоїть відношення кінетичної енергії $\left(\frac{m_0 v^2}{2}\right)$ або потенціальної енергії (W_p) до величини, яка визначає середню енергію теплового руху молекул (kT).

Об'єднання формул (9.10) і (9.17) визначає середню концентрацію молекул dn у деякому місці простору, швидкості яких належать до інтервалу (v, v+dv):

$$dn = \frac{4}{\sqrt{\pi}} n_0 \left(\frac{m_0}{2kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{U+\frac{mv^2}{2}}{kT}} v^2 dv. \qquad (9.19)$$

Таким чином, dn визначається тільки повною енергією молекули $W = U + \frac{mv^2}{2}$.

Зауваження. Температура газу визначається середньою кінетичною енергією молекул. Виникає питання, чому в потенціальному полі температура є постійною, хоча зміна потенціальної енергії молекули обов'язково повинна приводити до зміни її кінетичної енергії? Тобто, чому при русі молекул уверх, кінетична енергія кожної з них зменшується, а температура залишається постійною, тобто постійною є середня кінетична енергія молекул? Справа в тому, що при русі уверх молекули дійсно уповільнюються, але найбільш повільні з них вибувають із пучка. При русі донизу, навпаки, молекули не тільки прискорюються, але одночасно пучок поповнюється більш повільними молекулами. Ці процеси приводять до того, що середня швидкість теплового руху молекул залишається незмінною.

Методичні вказівки.

● У кінетичній теорії, яка розглядає газ як сукупність великої кількості молекул, що рухаються хаотично, і тому є статистичною теорією, використовуються різні типи середніх швидкостей молекул: середня квадратична швидкість $v_{кв}$, середня арифметична швидкість $< v >$ і найбільш ймовірна швидкість $v_{ім}$. Ці три швидкості зв'язані між собою залежністю яку визначають формули (9.12) – (9.14). Для будь-якого газу при тій самій температурі $v_{ім} : < v > : v_{кв}$ = 1,41 : 1,60 : 1,73.

Середню квадратичну швидкість $v_{кв}$ використовують у тих випадках, коли необхідно розрахувати фізичну величину, яка є пропорційною квадрату швидкості молекул, наприклад, тиск газу, кінетичну енергію поступального руху молекул.

Середня арифметична швидкість $< v >$ використовується для визначення середніх значень фізичних величин, до формул яких швидкість входить у першому степені, наприклад середній імпульс молекул, середня кількість зіткнень в одиницю часу, середня довжина вільного пробігу молекул.

Найбільш імовірна швидкість $v_{ім}$, якій відповідає максимум функції розподілу, є корисною при розв'язуванні задач, пов'язаних із застосуванням функції розподілу. Вона дозволяє перейти до функції розподілу відносної швидкості $u = \frac{v}{v_{ім}}$ у вигляді $f(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2$ (9.10а).

● Для невеликих інтервалів швидкостей $\Delta u << u$, що є рівносильним нерівності $\Delta v << v$, функція $f(u)$ дозволяє обчислити кількість молекул ΔN, відносні швидкості яких лежать в інтервалі від u до u + Δu за формулою

$$\Delta N = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N e^{-u^2} u^2 \Delta u , \qquad (9.20)$$

де N – загальне число молекул; $\Delta u = \frac{\Delta v}{v_{ім}}$.

При розв'язуванні таких задач зручно використовувати таблицю 9.2.

Таблиця 9.2

u	$\frac{\Delta N}{N \Delta u}$	u	$\frac{\Delta N}{N \Delta u}$	u	$\frac{\Delta N}{N \Delta u}$
0	0	0,9	0,81	1,8	0,29
0,1	0,02	1,0	0,83	1,9	0,22
0,2	0,09	1,1	0,82	2,0	0,16
0,3	0,18	1,2	0,78	2,1	0,12
0,4	0,31	1,3	0,71	2,2	0,09

0,5	0,44	1,4	0,63	2,3	0,06
0,6	0,57	1,5	0,54	2,4	0,04
0,7	0,68	1,6	0,46	2,5	0,03
0,8	0,76	1,7	0,36		

Якщо інтервали швидкостей, які розглядаються в задачі, не задовольняють вище указаній нерівності, повну кількість молекул ΔN, швидкості яких лежать в інтервалі $\Delta u = u_1 - u_2$ можна знайти тільки інтегруванням:

$$\Delta N = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du .$$

● У випадку, коли розглядається розподіл молекул газу за значеннями проекції швидкості v_x слід використовувати функцію розподілу у відповідному вигляді:

$$f(v_x) = \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{m_0 v_x^2}{2}} . \qquad (9.21)$$

● Основне рівняння кінетичної теорії газів (9.1) і закон Максвелла про розподіл молекул за швидкостями (формули (9.9), (9.10), (910а)) є справедливими тільки для ідеального газу, бо при їх виведенні не ураховується потенціальна енергія взаємодії молекул на відстані. Тому ці рівняння, а також рівняння (9.1,а,б), (9.12) - (9.14), що зв'язані з ними, можна використовувати тільки для не дуже сильно стиснених газів.

Приклади розв'язання задач

Приклад 9.1 . Середня квадратична швидкість руху молекул деякого газу $v_{кв}$=800м/с. Знайти його густину ρ, якщо тиск p у балоні 380мм рт.ст.

p = 380мм рт.ст.
$v_{кв}$=800м/с

ρ - ?

Розв'язання

Середня квадратична швидкість теплового руху молекул газу за формулою (9.14) дорівнює

$$v_{кв} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} , \qquad (1)$$

де $R = 8{,}31 Дж/(моль \cdot К)$; T – абсолютна температура; M – молярна маса газу. Звідки

$$v_{кв}^2 = \frac{3RT}{M} . \qquad (2)$$

Порівняємо з рівнянням Менделєєва-Клапейрона

$$pV = \frac{m}{M} RT \qquad (3)$$

З (2) виразимо $\frac{RT}{M}=\frac{v_{кв}^2}{3}$ і підставимо в (3):

$$pV=\frac{mv_{кв}^2}{3}, \text{ або } p=\frac{m}{V}\cdot\frac{v_{кв}^2}{3} \qquad (4)$$

За означенням густина ρ= m/V, тому з (4) $\rho=\frac{3p}{v_{кв}^2}$. (5)

Переведемо тиск у одиницю вимірювання в СІ:

p =380 мм рт. ст.·133 = 0,5 Па.

Підстановка у (5) числових даних дає $\rho=\frac{3\cdot 0{,}5\cdot 10^5}{(800)^2}=0{,}23$ кг/м^3.

Перевірка одиниці вимірювання: $[\rho]=\frac{Па}{м^2/с^2}=\frac{Н/м^2}{м^2/с^2}=\frac{кг\cdot м/с^2}{с^2\cdot м^4}=\frac{кг}{м^3}$.

Відповідь: ρ=0,23 кг/м^3.

Приклад 9.2. Середня кінетична енергія поступального руху молекул водню $<\varepsilon_k>=5{,}86\cdot 10^{-21}$ Дж. Визначити середню швидкість молекул водню за тими ж умовами.

$<\varepsilon_k>=5{,}86\cdot 10^{-21}$ Дж
$M = 2\cdot 10^{-3}$ моль/К
$N_A= 6{,}02\cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$

$\langle v\rangle$-?

Розв'язання

Середня енергія поступального руху молекули дорівнює $<\varepsilon_k>=\frac{m_0 v_{кв}^2}{2}$. Звідки

$$v_{кв}=\sqrt{\frac{2<\varepsilon_k>}{m_0}}, (1)$$

де $m_0=\frac{M}{N_A}$ (2) – маса молекули водню.

Формули (9.13) і (9.14), які надають $<v>$ і $v_{кв}$, дозволяють установити зв'язок між їх значеннями: $<v>=\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$; $v_{кв}=\sqrt{\frac{3RT}{M}}$.

Тоді $\frac{<v>}{v_{кв}}=\sqrt{\frac{8}{3\pi}}$, звідки з урахуванням формул (1) і (2) отримуємо

$$<v>=v_{кв}\sqrt{\frac{8}{3\pi}}=\sqrt{\frac{8}{3\pi}\cdot\frac{2<\varepsilon_k>}{m_0}}=\sqrt{\frac{16}{3\pi}\cdot\frac{<\varepsilon_k>N_A}{M}}.$$

$$<v>=\sqrt{\frac{16\cdot 5{,}86\cdot 10^{-21}\cdot 6{,}02\cdot 10^{23}}{3\cdot 3{,}14\cdot 2\cdot 10^{-3}}}=1731(м/с); \quad [\langle v\rangle]=\left(\frac{Дж\cdot моль^{-1}}{кг\cdot моль^{-1}}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{м}{с}$$

Відповідь: $\langle v\rangle$ = 1731 м/с.

Приклад 9.3. В деякому об'ємі газу знаходиться кількість молекул, яка дорівнює числу Авогадро N_A. Визначити кількість ΔN молекул, швидкості яких не перевищують 0,001 найбільш імовірної швидкості $v_{ім}$. Газ вважати ідеальним.

Розв'язання

$N = N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ $v < v_{ім} \cdot 10^{-3}$	Для розв'язання задачі зручно скористатися розподілом молекул за відносними швидкостями (9.10а), згідно якому $\frac{dN}{Ndu} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2$. Звідки
ΔN - ?	

$$dN = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2 du, \qquad (1)$$

де N – повна кількість молекул в заданому об'ємі.

За умовою $v_{max} = 0{,}001 v_{ім}$, звідки $u_{max} = \frac{v_{max}}{v_{ім}} = 0{,}001$. Для таких значень u вираз (1) спрощується, якщо розкласти експоненту в ряд. Дійсно, для u<<1 $e^{-u^2} \approx 1 - u^2$. Нехтуючи значенням $u^2 = 10^{-6}$ порівняно з одиницею, тобто обмежуючись першим членом розкладу, вираз (1) можна переписати у вигляді:

$$dN = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} u^2 du. \qquad (2)$$

Інтегрування (2) за змінною u у межах від 0 до u_{max} дає:

$$\Delta N = \frac{4N_A}{\sqrt{\pi}} \int_0^{u_{max}} u^2 du = \frac{4N_A}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{u^3}{3} \right) \Bigg|_0^{u_{max}} = \frac{4N_A}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{u_{max}^3}{3}.$$

$$\Delta N = \frac{4 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} \cdot 10^{-9}}{\sqrt{3{,}14} \cdot 3} = 4{,}53 \cdot 10^{14} \text{ (молекул)}.$$

Відповідь: $\Delta N = 4{,}53 \cdot 10^{14}$ молекул.

Примітка: Якщо за умовою задачі u можна порівняти з одиницею, підінтегральну функцію слід розкласти в ряд Маклорена

$$e^{-u^2} = 1 - \frac{u^2}{1!} + \frac{u^4}{2!} - \frac{u^6}{3!} + \frac{u^8}{4!} - \ldots$$

$$u^2 e^{-u^2} = u^2 - \frac{u^4}{1} + \frac{u^6}{2} - \frac{u^8}{6} + \ldots$$

Далі проводять інтегрування, обмежуючись певною кількістю (наприклад, 4-5) членів розкладу.

Приклад 9.4. Яка частина молекул азоту при температурі $t=150^{o}C$ має швидкості від v_1=300м/с до v_2=310м/с?

$t=150^{o}C$ v_1=300м/с v_2=310м/с	Розв'язання Оскільки інтервал швидкостей є невеликим ($\Delta v << v$), відносну кількість молекул $\frac{\Delta N}{N}$ можна обчислити за наближеною формулою (9.20):
$\frac{\Delta N}{N}$ - ?	

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2 \Delta u, \qquad (1)$$

де u – відносна швидкість, яка дорівнює $u = \frac{v}{v_{ім}}$. (v – швидкість молекули; $v_{ім}$ – найбільш імовірна швидкість молекул.) За формулою (9.12) $v_{ім} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$. За умовою задачі $v_{ім} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8{,}31 \cdot (150+273)}{28 \cdot 10^{-3}}} = 500$ (м/с).

Тоді, $u = \frac{300}{500} = 0{,}6$; $u^2 = 0{,}36$; $\Delta u = \frac{10}{500} = 0{,}02$; $e^{-u^2} = e^{-0.36} = 0{,}7$

і формула (1) дає: $\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}36 \cdot 0{,}02 = 0{,}0064 = 0{,}64\%$

Приклад 9.5. На якій висоті h атмосферний тиск p складає 50% від тиску p_0 на рівні моря? Температуру вважати постійною і рівною $t=0^{o}C$, молярну масу для повітря вважати рівною M=0,029 кг/моль.

$t=0^{o}C$ $p=0{,}5p_0$ M=0,029 кг/моль	Розв'язання Залежність атмосферного тиску від висоти над рівнем моря представлена барометричною формулою (9.16): $p = p_0 \cdot e^{-\frac{Mgh}{RT}}$, (1)
h - ?	

де p – тиск на висоті h; p_0 - тиск на рівні моря; M– молярна маса повітря; g=9,8 $м/с^2$ – прискорення сили тяжіння; R=8,31 $Дж/(моль \cdot K)$ – газова стала; T – термодинамічна температура.

Поділимо обидві частини рівняння (1) на p: $\frac{p}{p_0} = e^{-\frac{Mgh}{RT}}$, звідки $\frac{p_0}{P} = e^{\frac{Mgh}{RT}}$.

За умовою задачі $\frac{p}{p_0}$=2, тому $2 = e^{\frac{Mgh}{RT}}$. (2) Логарифмуємо вираз (2):

$\ln 2 = \frac{Mgh}{RT}$, звідки $h = \frac{RT \cdot \ln 2}{Mg}$.

$$h = \frac{8{,}31 \cdot 273 \cdot 0{,}693}{0{,}029 \cdot 9{,}8}\ \text{м} = 5{,}53 \cdot 10^3\ \text{м} = 5{,}5\text{км}.$$

$$[h] = \frac{\text{Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}) \cdot \text{К}}{\text{кг}/\text{моль} \cdot \text{м}/\text{с}^2} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2 \cdot \text{м}}{\text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2} = \text{м}.$$

Відповідь: h=5,53 км.

Приклад 9.6. Визначити додатковий тиск на обшивку літака за рахунок різниці тиску в салоні і зовні літака. Висота польоту h = 8км, температура за бортом $t = -18°C$ і не залежить від висоти. Тиск у салоні літака і на поверхні землі дорівнює p_0 = 100гПа.

Розв'язання

$h = 8 \cdot 10^3$м
$T = 255$ К
$p_0 = 10^5$ Па
$g = 9{,}8$м/с^2
$M = 29 \cdot 10^{-3}$кг/моль
$R = 8{,}31$ Дж/(моль·К)

Δp -?

Додатковий тиск, що діє зсередини на обшивку літака, дорівнює $\Delta p = p_0 - p_h$, де p_0 – тиск у салоні, p_h - тиск за бортом на висоті h.

Значення p_h знаходимо за барометричною формулою (9.16). Тоді $\Delta p = p_0\left(1 - e^{-\frac{Mgh}{RT}}\right)$,

де $M = 29 \cdot 10^{-3}$кг/моль – молярна маса повітря.

Обчислення дає

$$\Delta p = 1 \cdot 10^5\left(1 - e^{-\frac{29 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}8 \cdot 8 \cdot 10^3}{8{,}31 \cdot 255}}\right) = 0{,}66 \cdot 10^5\ (\text{Па}).$$

Відповідь: $\Delta p = 0{,}66 \cdot 10^5$ Па. Отримане значення додаткового тиску показує, що значення сили, яка діє на одиницю площі обшивки літака є досить великим. Тому його слід ураховувати при розрахунку конструкцій літака.

Приклад 9.7. Пилинки масою $m = 10^{-21}$ кг розподілені в повітрі. Визначити товщину шару повітря, в межах якого концентрація пилинок відрізняється не більше, ніж на 1%. Температура T повітря є однаковою і дорівнює 300К.

Розв'язання

$m = 10^{-21}$ кг
$\frac{\Delta n}{n} = 0{,}01$
T = 300К

Δh -?

Розподілу пилинок можна описати формулою Больцмана (9.18): $n = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}$ (1).

Оскільки $\frac{\Delta n}{n}$ є малим, зміну концентрації замінюємо диференціалом dn, який знаходимо із формули (1):

$$dn = -n_0 \frac{mg}{kT} e^{-\frac{mgh}{kT}} dh.$$

$n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}} = n$, тому $dn = -n\frac{mg}{kT}dh$. Звідки виражаємо зміну висоти, що відповідає шуканому шару повітря: $dh = -\frac{kT}{mg}\cdot\frac{dn}{n}$. (2)

Знак мінус показує, що зростанню координати відповідає зменшення концентрації. В даному випадку знак несуттєвий і може не ураховуватися. Замінюємо в виразі (2) диференціали на Δh та Δn. Тоді

$$\Delta h = -\frac{kT}{mg}\cdot\frac{\Delta n}{n}. \qquad (3)$$

$$\Delta h = \frac{1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot 300\cdot 0{,}01}{10^{-21}\cdot 9{,}8} = 4{,}23\cdot 10^{-3}\,(\text{м})$$

$$[\Delta h] = \frac{\text{Дж}\cdot\text{К}\cdot\text{с}^2}{\text{К}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}^2}{\text{с}^2\cdot\text{кг}\cdot\text{м}} = \text{м}$$

Відповідь: $\Delta h = = 4{,}23\cdot 10^{-3}$ м.

Приклад 9.8. Визначити середнє значення вертикальної координати молекул повітря в полі тяжіння Землі при температурі $t = 0°C$. Атмосферу вважати ізотермічною, залежністю прискорення вільного падіння від висоти знехтувати.

T = 273 К g = 9,8м/с^2 M = 29·10^{-3}кг/моль R = 8,31 Дж/(моль·К) $\langle z\rangle$ - ?	Розв'язання Середнє значення координати $\langle z\rangle$ можна визначити за формулою (9.6) $\langle x\rangle = \int_a^b x f(x)dx$, де у якості змінної x виступає координата z, а $f(z)$ – функція розподілу частинок за координати (розподіл Больцмана), яка в потенціальному полі Землі має вигляд:

$$f(z) = \frac{1}{\int_0^\infty e^{-\frac{m_0 gz}{kT}}dz} e^{-\frac{m_0 gz}{kT}}. \qquad (1)$$

Окремо обчислюємо інтеграл у знаменнику:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{m_0 gz}{kT}}dz = -\frac{kT}{m_0 g}e^{-\frac{m_0 gz}{kT}}\Big|_0^\infty = \frac{kT}{m_0 g}. \qquad (2)$$

З урахуванням того, що $\frac{k}{m_0} = \frac{R}{M}$, після підстановки виразів (1) і (2) у

формулу (9.6) отримуємо: $\langle z\rangle = \frac{Mg}{RT}\int_0^\infty z e^{-\frac{Mgz}{RT}} dz$ (3) . Заміна змінної $z = \frac{RT}{Mg} t$ перетворює інтеграл (3) у вигляд $\langle z\rangle = \frac{RT}{Mg}\int_0^\infty t e^{-t} dt$.

Інтегрування частинами дає:

$$\langle z\rangle = \frac{RT}{Mg} = \frac{8{,}31\cdot 273}{29\cdot 10^{-3}\cdot 9{,}8}\,\text{м} = 7983\text{м} \approx 8\,\text{км}.$$

Зауваження. Відповідь $\langle z\rangle$ = 8км свідчить, що більшість маси повітря зосереджена у невеликому шарі поблизу поверхні Землі порівняно з загальним об'ємом атмосфери. Це зайвий раз підкреслює актуальність питань охорони земної атмосфери від промислових викидів.

Приклад 9.9. Ротор центрифуги обертається з кутовою швидкістю ω. За допомогою функції розподілу Больцмана, знайти розподіл концентрації n частинок масою m в залежності від відстані до осі обертання.

Розв'язання

Функція розподілу концентрації частинок в одновимірному потенціальному полі згідно (9.17)

$$n(r) = n(r_0) e^{-\frac{U(r)}{kT}}, \qquad (1)$$

де $n(r_0)$ - концентрація частинок в точці з нульовою потенціальною енергією $U(r_0) = 0$.

При обертанні центрифуги з кутовою швидкістю ω на кожну частинку, яка знаходиться на відстані r від осі обертання, діє відцентрова сила $\vec{F}(r) = m\omega^2\vec{r}$. Потенціальну енергію, що відповідає заданому полю сил, знаходимо за зв'язком між силою і потенціальною енергією:

$$U(r) = -\int F_r \cdot dr = -\int m\omega^2 r \cdot dr = -\frac{m\omega^2 r^2}{2} + C.$$

Припустимо, що при r = 0, U(r) = 0. Звідки константа C = 0. Остаточно

$$U(r) = -\frac{m\omega^2 r^2}{2}. \qquad (2)$$

Підстановка енергії (2) у функцію розподілу концентрації (1) дає для розподілу концентрації n частинок в залежності від відстані r до осі обертання вираз:

$$n(r) = n(r_0) e^{\frac{m\omega^2 r^2}{2kT}}.$$

Задачі для самостійного розв’язування

9.1. У скільки разів середня квадратична швидкість молекул водню більша за середню квадратичну швидкість молекул кисню? Температуру газів вважати однаковою.

9.2. Вичислити найбільш імовірну швидкість молекул ідеального газу, у якого за нормального атмосферного тиску густина ρ=1 г/л.

9.3. Вичислити середню арифметичну і середню квадратичну швидкості молекул ідеального газу, у якого за нормального атмосферного тиску густина ρ=1 г/л.

9.4.Знайти середню арифметичну, середню квадратичну і найбільш імовірну швидкості молекул ідеального газу, у якого при тиску P=300мм.рт.ст. густина дорівнює ρ=0,3кг/м^3.

9.5.За якої температури середня квадратична швидкість молекул азоту більша за їх найбільш імовірну швидкість на Δv=50 м/с?

9.6. Визначити температуру водню, за якої середня квадратична швидкість молекул більша за їх найбільш імовірну швидкість на Δv=400 м/с. Знайти середню арифметичну швидкість молекул водню при цій температурі.

9.7. За якої температури газу, що складається з суміші азоту і кисню, найбільш імовірні швидкості молекул азоту і кисню відрізнятимуться одна від одної на Δv=30 м/с.

9.8. Знайти середню кінетичну енергію $<\varepsilon_k>$ руху однієї молекули гелію, а також сумарну кінетичну енергію усіх молекул в одному кіломолі та в одному кілограмі гелію при температурі $t = -200\,°C$.

9.9. Знайти середню кінетичну енергію $<\varepsilon_{\text{î áåðò.}}>$ обертального руху однієї молекули водню, а також сумарну кінетичну енергію W_k усіх молекул в одному кіломолі водню при температурі t=17°C.

9.10. Визначити імпульс p молекули гелію при температурі t = 27^{0}C. Швидкість молекул вважати рівною середній арифметичній швидкості молекули <v>.

9.11. Знайти середню кінетичну енергію $<\varepsilon_{\text{î áåðò.}}>$ обертального руху однієї молекули водню, а також сумарну кінетичну енергію W_k усіх молекул в одному кіломолі водню при температурі t=17°C.

9.12. Газ займає об'єм V= 1 л, під тиском p=2 атм. Визначити кінетичну енергію поступального руху всіх молекул, які знаходяться в цьому об'ємі.

9.13. У балоні об’ємом V = 10л міститься гелій під тиском p = 10^{4}Па. Знайти кінетичну енергію W поступального руху його молекул.

9.14. Середня квадратична швидкість молекул ідеального газу $v_{кв}$ = 500м/с. Знайти густину газу ρ, якщо його тиск дорівнює p = 50кПа.

9.15. Посудина об’ємом V=4 л містить m=0,6 г деякого газу під тиском. Визначити середню квадратичну швидкість молекул газу.

9.16. Яку кількість молекул N містить m = 20г газу, якщо середня арифметична швидкість його молекул за нормальних умов дорівнює <v>= 425м/с?

9.17. Маленькі пилинки, що знаходяться в азоті, рухаються, ніби дуже великі молекули. Маса кожної порошинки $m_1=10^{-10}$ г. Температура газу $t=20°C$. Знайти середні квадратичні швидкості та середні кінетичні енергії поступального руху молекул азоту та пилинок.

9.18. Визначити енергію W обертального руху молекул, які містяться у m = 10г водню при температурі $t = 17^0C$.

9.19. Визначити середню кінетичну енергію $<\varepsilon_{оберт.}>$ обертального руху однієї молекули двоатомного газу, якщо сумарна кінетична енергія молекул одного кіломолю цього газу $W_k = 3{,}01$МДж/кмоль.

9.20. Двоатомний газ міститься у посудині об'ємом V = 5л під тиском p=520 мм рт.ст. Знайти енергію W теплового руху його молекул.

2.98. Знайти енергію теплового руху W молекул двоатомного газу масою m = 2кг, який знаходиться під тиском p = 20кПа і має густину ρ = 2кг/м^3.

9.21. При якій температурі середня кінетична енергія теплового руху молекули ідеального газу дорівнює $<\varepsilon_k> = 6{,}21\cdot10^{-21}$Дж?

9.22. У скільки разів енергія теплового поступального руху двохатомної молекули $<\varepsilon_{пост.}>$ більша за енергію її обертального руху $<\varepsilon_{оберт.}>$? Зв'язок між атомами вважати жорстким.

9.23. Яка частина молекул азоту має швидкості v, які відрізняються від найбільш імовірної $v_{ім}$ не більш ніж на 5м/с? Температуру вважати рівною $t = 27^0C$.

9.24. У посудині об'ємом V = 10л міститься гелій при температурі $t = 17^0C$ і тиску p = 760мм рт.ст. Знайти кількість молекул ΔN, швидкості яких лежать у інтервалі від $v_1= 1{,}10\cdot10^3$м/с до $v_2=1{,}12\cdot10^3$м/с .

9.25. Визначити температуру кисню, за якою функція розподілу молекул по модулю швидкості f(v) матиме максимум при швидкості $v_{ім}=920$м/с. Знайти значення середньої арифметичної і середньої квадратичної швидкостей молекул кисню при цій температурі.

9.26. Знайти температуру азоту, при якій швидкостям молекул $v_1 = 300$м/с і $v_2 = 600$м/с відповідають однакові значення функції розподілу за модулем швидкості f(v).

9.27. Визначити швидкість молекул аргону, при якій значення функції розподілу за модулем швидкості f(v) для температури $T_0 = 300$ К буде таким же, як і для температури в n=5 разів більшої. Молярна маса аргону $M_1=40\cdot10^{-3}$ кг/моль.

9.28. Визначити швидкість молекул ідеального газу, при якій значення функції розподілу за модулем швидкості f(v) для температури T_0 буде таким самим, як і для температури в η разів більшої.

9.29. Визначити тиск повітря p на висоті h = 10км над рівнем моря. Температуру вважати незалежною від висоти і рівною $t = 0^0C$.

9.30. На якій висоті h атмосферний тиск повітря p складає 50% від тиску на рівні моря? Температуру вважати постійною і рівною $t = 0^0C$.

9.31. На якій висоті h над рівнем моря густина кисню ρ складає 75% від його густини на рівні моря? Температуру вважати постійною і рівною $t=0^0C$.

Тестові завдання

Вибрати вірну відповідь.

1. На ступінь вільності поступального руху молекули припадає енергія

1. kT 2. $\frac{1}{2}kT$ 3. $\frac{3}{2}kT$ 4. $\frac{5}{2}kT$ 5. $\frac{1}{3}kT$

2. На обертальний рух двохатомної молекули з жорстким зв'язком припадає частка від всієї кінетичної енергії

1. 1/3 2. 2/5 3. 3/2 4. 1/2

3. На поступальний рух двохатомної молекули з жорстким зв'язком припадає частка від її всієї кінетичної енергії

1. 1/3 2. 3/2 3. 3/5 4. 1/2

4. Трьохатомна молекула має жорсткий зв'язок між атомами. На поступальний рух припадає частка від всієї кінетичної енергії

1. 1/2 2. 3/5 3. 2/5 4. 3/7

5. На обертальний рух трьохатомної молекули з жорстким зв'язком припадає частка від всієї кінетичної енергії

1. 1/3 2. 2/5 3. 3/2 4. 1/2

6. Якщо об'єм газу зменшити в 3 рази, а середню кінетичну енергію руху його молекул збільшити в 2 рази, то тиск газу

1. зменшиться в 1,5 разу 2. збільшиться в 1,5 разу 3. збільшиться в 3 рази
4. зменшиться в 6 разів 5. збільшиться в 1,5 разу

7. Середня швидкість молекули ідеального газу зі зростанням температури:

1. не змінюється 2. обернено пропорційно зменшується
3. прямо пропорційно зростає 4. зростає пропорційно $\sqrt{T}$

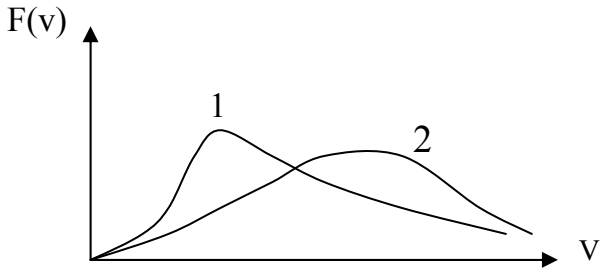
8. Молекули кисню і водню мають однакові середні квадратичні швидкості поступального руху. Значення швидкості молекул водню після того, як гази перемішали,

1. зростає 2. зменшується 3. не змінюється

9. Атмосферне повітря – складається з декількох газів. Середня квадратична швидкість хаотичного руху молекул водню порівняно зі швидкістю молекул азоту при даній температурі повітря буде:

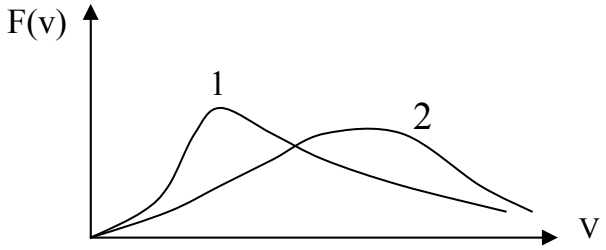
1.більшою 2.такою самою
3. меншою 4. не залежить від природи молекул

10. На рисунку зображено розподіл Максвела для газу при різних температурах. Більшій температурі відповідає:



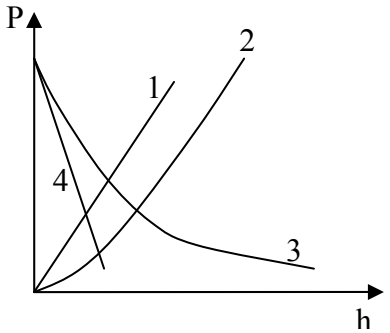
1. крива 1
2. крива 2
3. хід кривих не залежить від температури газу

11. На рисунку зображено розподіл Максвела для різних газів при однаковій температурі. Газу з більшою масою молекул відповідає



1. крива 1
2. крива 2
3. хід кривих не залежить від маси молекули газу

12. Залежність атмосферного тиску від висоти над рівнем моря (барометричну формулу) правильно зображує



1. крива 1 2. крива 2
3. крива 3 4. крива 4

13. Атмосферний тиск із збільшенням висоти над рівнем моря

1. зменшується обернено пропорційно
2. не змінюється
3. прямо пропорційно зростає
4. зменшується за експоненціальним законом

14. Атмосфера Землі складається в основному з кисню і азоту. Якби частка водню та інших легких газів, що входять до складу атмосфери, суттєво збільшилась, тиск на висоті **h**:

1. не змінився 2.зменшився
3. збільшився 4. склад атмосфери не впливає на атмосферний тиск.

(Тиск біля поверхні Землі в обох випадках вважати однаковим, а атмосферу – ізотермічною)

15. Атмосфера Землі складається в основному з кисню і азоту. Якби, замість суміші газів, атмосфера складалась з чистого кисню, тиск на висоті **h**:

1. не змінився 2.зменшився
3. збільшився 4. склад атмосфери не впливає на атмосферний тиск.

(Тиск біля поверхні Землі в обох випадках вважати однаковим, а атмосферу – ізотермічною)

16. **Установити відповідність:**

Вид рівняння	**Формула**
1. Основне рівняння МКТ	А. $PV = const$
2. Рівняння стану ідеального газу	Б. $PV^{\gamma} = const$
3. Рівняння Пуассона	В. $PV = \frac{2}{3}W_k$
4. Рівняння Бойля – Маріотта	Г. $PV = \frac{m}{M}RT$

Розділ 10. Процеси переносу в газах

Тема: Основні кінематичні характеристики молекулярного руху: середня довжина вільного пробігу і середнє число зіткнень за одиницю часу. Явища переносу – дифузія, в'язкість, теплопровідність та їх рівняння і кінетичні коефіцієнти.

Основні поняття і формули

В процесі хаотичного руху молекули переносять із однієї точки об'єму газу в іншу другу характерні для них значення енергії, маси, імпульсу. При наявності у просторі градієнтів температури, густини речовини, або якщо межують шари рідини або газу, що рухаються з різними швидкостями, виникають процеси вирівнювання цих неоднорідносте й, які об'єднуються загальною назвою – явища переносу.

До явищ переносу належать:
- дифузія (зумовлена переносом маси);
- теплопровідність (зумовлена переносом енергії);
- внутрішнє тертя або в'язкість (зумовлена переносом імпульсу).

Ці явища виникають внаслідок порушення повної хаотичності руху молекул. Для газів це означає відхилення від формули Максвелла для розподілу молекул газу за швидкостями.

Основні кінематичні характеристики молекулярного руху.

Швидкості молекул дуже великі – порядку сотень метрів в секунду (при кімнатних температурах). Можна припустити, що всі процеси, які відбуваються в газах (вирівнювання температур, розповсюдження запахів і т. ін.) повинні здійснюватись з великою швидкістю. Але практика свідчить про інше. Причина в тому, що при русі в газі молекули внаслідок зіткнень між собою змінюють напрям свого руху, траєкторії руху молекул газу – ламані лінії (рис.10.1), що й спричиняє уповільнення процесів переносу.

При кількісному аналізі процесів переносу основними кінематичними характеристиками молекулярного руху є:
- ефективний діаметр молекул;
- ефективний переріз;
- частота зіткнень;
- середня довжина вільного пробігу.

● **Ефективний діаметр молекули $d_{еф}$** – мінімальна відстань, до якої наближаються при зіткненні центри двох молекул.

● **Ефективний переріз σ** – площа мішені, в яку повинен попасти центр молекули для зіткнення з даною молекулою. Тобто ефективний переріз – це площа кола, радіус якого дорівнює ефективному діаметру молекули:

$$\sigma = \pi d_{еф}^2 . \qquad (10.1)$$

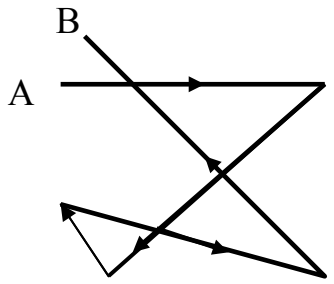


Рис. 10.1

Це уявна, а не геометрична площа, яка обирається такою, щоб ймовірність результату зіткнень дорівнювала ймовірності того, що частинка, рухаючись прямолінійно без взаємодії, попадає в площадку σ.

● **Середня довжина вільного пробігу $\langle \lambda \rangle$.**

Відстань, яку молекула проходить від зіткнення до зіткнення, може бути великою або малою. Однак, внаслідок хаотичності руху середнє значення цієї величини $\langle \lambda \rangle$, яке називають **середньою довжиною вільного пробігу** молекул, для даного стану газу є постійною. Отже, за означенням середня довжин вільного пробігу дорівнює: $\langle l \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} l_i$ (N – число відрізків ламаної траєкторії молекули, довжина яких - l_i). Фактично $\langle l \rangle$ – це довжина шляху, при якому ймовірність зіткнення молекули з деякою іншою дорівнює одиниці.

Середня довжина вільного пробігу молекули дорівнює

$$< l > = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi d_{еф}^2 n} = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi \sigma n} , \qquad (10.2)$$

де σ – ефективний переріз; n – концентрація молекул.

З (10.1) випливає, що довжина вільного пробігу молекул обернено пропорційна концентрації молекул і ефективному перерізу. Ефективний переріз зменшується при збільшенні температури, оскільки молекули внаслідок збільшення швидкості можуть наближатися на меншу відстань одна до одної.

В ізотермічному процесі спостерігається простий зв'язок між $\langle l \rangle$ і тиском p, який можна отримати за допомогою рівняння $p = nkT$:

$$\langle l \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2} p \sigma} . \qquad (10.2a)$$

● Частинка, яка налітає на інші частинки, рухається із середньою швидкістю $\langle v \rangle$ і проходить довжину вільного пробігу за час $\langle \tau \rangle = \langle l \rangle / \langle v \rangle$. Тому **середнє число зіткнень** $< z >$ кожної молекули з іншими в одиницю часу дорівнює

$$< z > = \frac{< v >}{< l >} = \sqrt{2} n \langle v \rangle \pi d_{еф}^2 = \sqrt{2} n \langle v \rangle \sigma \qquad (10.3)$$

Рівняння переносу

● **Дифузія.** Маса ΔM газу, яка переноситься внаслідок дифузії крізь площадку ΔS, перпендикулярну до напряму дифузії, за час Δt, визначається законом Фіка (рівнянням дифузії), який в одновимірному випадку має вигляд:

$$\Delta M = -D\frac{\Delta n}{\Delta x}\Delta S \Delta t\, m_0, \qquad (10.4)$$

де $\frac{\Delta n}{\Delta x}$ – градієнт концентрації молекул певного сорту; D – коефіцієнт дифузії; m_0 - маса однієї молекули.

Градієнт концентрації – вектор, напрям якого указує напрям найбільш швидкого зростання концентрації у просторі , а величина дорівнює похідній по координаті в цьому напрямі.

У рівнянні (2.32)припущено, що градієнт концентрації направлений у позитивному напрямку осі OX. У загальному випадку $\mathrm{grad}\, n$ (або ∇n) дорівнює $\nabla n = \frac{\partial n}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial n}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial n}{\partial z}\vec{k}$.

Знак $''-''$ у формулі (2.32) показує, що перенос маси відбувається у напрямі, протилежному напряму градієнта концентрації. При цьому концентрація усього газу, а не виділеної компоненти, повинна бути однаковою по всьому об'єму. Інакше перенос газу буде зумовлений не тільки дифузією, але й різницею тиску в різних частинах об'єму, і рівняння (2.32) не буде надавати повний потік частинок.

Коефіцієнт дифузії D – фізична величина, яка характеризує властивості речовини і чисельно дорівнює її масі, яка переноситься крізь одиницю поверхні, перпендикулярної до напряму дифузійного потоку, за одиницю часу при градієнті густини $\frac{\Delta(nm_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta\rho}{\Delta x}$, який дорівнює одиниці.

Коефіцієнт дифузії газу D є пропорційним середній арифметичній швидкості молекул $\langle v \rangle$ та їх середній довжині вільного пробігу $\langle l \rangle$:

$$D = \frac{1}{3} < v > \cdot < l >. \qquad (10.5)$$

● **В'язкість.** Сила F внутрішнього тертя (в'язкості), що діє між шарами газу або рідини, виражається рівнянням Ньютона:

$$F = -\eta\frac{\Delta v}{\Delta z}\Delta S, \qquad (10.6)$$

де $\Delta v/\Delta z$ – градієнт швидкості течії газу у напрямку, перпендикулярному до ΔS, тобто відношення зміни швидкості Δv двох шарів газу, які знаходяться на відстані Δz, до величини цієї відстані; η – коефіцієнт

внутрішнього тертя або динамічний коефіцієнт в'язкості; ΔS – площина шарів газу, між якими діє сила внутрішнього тертя.

Формула (2.34) визначає (у відповідності з третім законом Ньютона) модуль двох протилежно направлених сил, з якими шари діють один на одного вздовж поверхні ΔS.

Коефіцієнт внутрішнього тертя η – фізична величина, яка характеризує властивості речовини і чисельно дорівнює силі внутрішнього тертя, яка діє на одиницю площини дотику шарів при одиничному градієнті швидкості.

Коефіцієнт внутрішнього тертя η є пропорційним густині газу ρ, середній арифметичній швидкості молекул $\langle v \rangle$ та їх середній довжині вільного пробігу $\langle l \rangle$:

$$\eta = \frac{1}{3} < \mathrm{v} > \cdot < l > \rho \ . \qquad (10.7)$$

Поряд з динамічною в'язкістю використовують також кінематичну в'язкість ν, яка дорівнює динамічній в'язкості, віднесеній до густини:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}. \qquad (10.8)$$

● **Теплопровідність.** Кількість теплоти ΔQ, яка переноситься внаслідок теплопровідності крізь площадку ΔS за час Δt, визначається законом Фур'є (рівнянням теплопровідності), який в одновимірному випадку має вигляд:

$$\Delta Q = -\ \lambda \frac{\Delta T}{\Delta x} \Delta S \Delta t \ , \qquad (10.9)$$

де ΔQ – кількість теплоти, яка переноситься за час Δt крізь площадку ΔS; $\Delta T/\Delta x$ – градієнт температури; λ – коефіцієнт теплопровідності.

Знак "–" показує, що перенос теплоти відбувається у напряму, протилежному напрямку градієнта температури, який спрямований у бік максимального зростання температури.

Коефіцієнт теплопровідності λ – фізична величина, яка характеризує властивості речовини і чисельно дорівнює кількості теплоти, яка переноситься крізь одиницю поверхні, перпендикулярної до напряму теплового потоку, за одиницю часу при градієнті температури, який дорівнює одиниці.

У випадку газу коефіцієнт теплопровідності λ є пропорційним питомій теплоємності газу, густині газу ρ, середній арифметичній швидкості молекул $\langle \mathrm{v} \rangle$ та їх середній довжині вільного пробігу $\langle l \rangle$:

$$\lambda = \frac{1}{3} < \mathrm{v} > \cdot < l > \cdot \rho \cdot \mathrm{c_v}, \qquad (10.10)$$

Методичні вказівки

● При застосування рівнянь переносу для розв'язування задач слід пам'ятати, що рівняння (10.4), (10.6), (10.9) справедливі тільки в одновимірному випадку, коли градієнти відповідних параметрів системи направлені вздовж певної осі координат. При довільному напрямку градієнту рівняння переносу мають більш складний вигляд.

● Вирази (10.5), (10.7), (10.10) для коефіцієнтів, які характеризують відповідні явища переносу, визначені для ідеальних газів. Із них можна отримати простий зв'язок, який існує між коефіцієнтами:

$$\lambda = \eta c_v;$$

$$D = \frac{\eta}{\rho} = \frac{\lambda}{c_v \rho}.$$

Це дозволяє за значенням одного з них визначити інший. Наявність зв'язку між коефіцієнтами процесів переносу зумовлена однаковістю фізичної природи процесів і тим, що їх описують рівняння одного вигляду.

Розмірності коефіцієнтів: $[D] = \frac{м^2}{с}$; $[\eta] = [Па \cdot с] = \frac{кг}{м \cdot с}$; $[\lambda] = \frac{Вт}{К \cdot м}$.

● Коефіцієнти динамічної в'язкості η і теплопровідності λ, у вирази яких входить добуток $<l> \cdot \rho$, не залежать від густини, а також від тиску, оскільки $<l>$ є обернено пропорційним тиску, а ρ – прямо пропорційним. Це справедливо, доки $<l>$ є малим, порівняно з деяким характерним розміром d (наприклад, розмірами посудини при теплопровідності, або діаметром труби, по якій тече газ). Коли значення $<l>$ внаслідок зниження тиску наближається до d, довжина вільного пробігу перестає залежати від тиску, а η і λ зменшуються зі зменшенням тиску.

Саме такий стан газу, при якому довжина вільного пробігу молекул у посудині досягає його розмірів (відстані між протилежними стінками) називають фізичним вакуумом.

Незалежність названих коефіцієнтів від густини також порушується при великих значеннях густини газу, коли розмірами молекул не можна знехтувати порівняно з середньою довжиною вільного пробігу.

Залежність кінетичних коефіцієнтів η і λ від температури визначається в основному залежністю від неї середньої швидкості. Оскільки $\langle v \rangle$ пропорційно $\sqrt{T}$, то динамічна в'язкість і теплопровідність зростають приблизно прямо пропорційно кореню квадратному від температури, якщо знехтувати невеличким зростом, зв'язаним зі зменшенням ефективного перерізу, яке приводить до зростання $<l>$.

● Формула (10.5) коефіцієнта дифузії є справедливою у випадку дифузії «помічених» деяким способом молекул даного газу в середовищі інших

молекул того самого газу (самодифузії). Вона також є приблизно справедливою і для випадку дифузії двох газів з близькими значеннями відносної молекулярної маси і ефективних діаметрів молекул.

У випадку взаємної дифузії газів, які сильно розрізняються значеннями указаних параметрів, формула не є справедливою і набуває більш складного вигляду.

При постійній температурі швидкість $\langle v \rangle$ є постійною, $< l >$ є обернено пропорційним тиску. Тобто і коефіцієнт дифузії D при постійній температурі є обернено пропорційним тиску p. З іншого боку, при фіксованому значенні тиску $\langle v \rangle$ зростає пропорційно $\sqrt{T}$, а $< l >$ пропорційно T, отже за постійного тиску D є пропорційним $T^{3/2}$.

Приклади розв'язання задач

Приклад 10.1. Визначити середню довжину вільного пробігу $\langle l \rangle$ молекул азоту за нормальних умов, а також середнє число зіткнень $\langle z \rangle$ молекули за одну секунду за даних умов.

T=273 К p=10^5 Па $d_{еф} = 3 \cdot 10^{-10}$ м k=$1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К	Розв'язання
$\langle l \rangle$-?	

Середню довжину вільного пробігу молекул можна визначити за допомогою співвідношення (10.2):

$$< l > = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi d_{еф}^2 n}\ , \qquad (1)$$

де $d_{еф}$ - ефективний діаметр молекули знаходимо із таблиць; n – концентрація молекул за даних умов.

Концентрацію молекул можна зв'язати з параметрами стану газу за допомогою рівняння (8.8):

$$p = nkT, \text{ звідки } n = \frac{p}{kT}, \qquad (2)$$

де p – тиск газу; T – термодинамічна температура; k – стала Больцмана.

Підставимо (2) у (1) :

$$\langle l \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d_{еф}^2 p}. \qquad (3)$$

$$\langle l \rangle = \frac{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 273}{\sqrt{2} \cdot 3{,}14 \cdot \left(3 \cdot 10^{-10}\right)^2 \cdot 10^5} = 9{,}52 \cdot 10^{-8} \text{ (м)}.$$

$$\left[\langle l \rangle\right] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{К} \cdot \text{м}^2}{\text{К} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{Н}} = \frac{\text{Дж}}{\text{Н}} = \text{м}.$$

Середнє число зіткнень кожної молекули за 1 секунду можна визначити за формулою

$$\langle z \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle l \rangle}, \qquad (4)$$

де $\langle v \rangle$ – середня арифметична швидкість теплового руху молекул; $\langle l \rangle$ – середня довжина вільного пробігу молекул, яку вже визначено за формулою (3).

Середню арифметичну швидкість молекул знайдемо за допомогою формули (9.13).

$$< v > = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 8,31 \cdot 273}{3,14 \cdot 28 \cdot 10^{-3}}} = 4,54 \cdot 10^2 \text{ м/с.}$$

Підставимо значення $\langle l \rangle$ і $\langle v \rangle$ у формулу (4): $\langle z \rangle = \frac{4,54 \cdot 10^2}{9,52 \cdot 10^{-8}} = 4,77 \cdot 10^9$ (c^{-1})

Відповідь: $\langle l \rangle = 9,52 \cdot 10^{-8}$ м; $\langle z \rangle = 4,77 \cdot 10^9$ c^{-1}.

Приклад 10.2. Знайти число зіткнень, які відбуваються протягом секунди між усіма молекулами водню, які знаходяться в об'ємі 1мм^3 за нормальних умов. Вважати для водню $d_{еф}$=2,3·10^{-10}м.

T=273 К p=10^5 Па $d_{еф}=3 \cdot 10^{-10}$ м t=1с V=10^{-9}м^3 p=1,013·10^5Па M=2·10^{-3}кг/моль k=$1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К R=8,31Дж/(моль·К)	Розв'язання Середнє число зіткнень однієї молекули за секунду надає формула (10.3): $\langle z \rangle = \sqrt{2} n \langle v \rangle \pi d_{еф}^2$. (1) Якщо $\langle z \rangle$ помножити на число усіх молекул N, то отримаємо результат, удвічі більший за шукану величину z. Дійсно, в одному зіткненні беруть участь одразу дві молекули, тому в число (z·N) кожне зіткнення входить двічі. Отже $z = \frac{\langle z \rangle N}{2}$. (2) Якщо n – кількість молекул в одиниці об'єму, то N = nV. (3)
z -?	

Концентрацію молекул визначаємо із рівняння p = nkT: $n = \frac{p}{kT}$. (4)

Середня швидкість теплового руху молекул $< v > = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$. (5)

Підставляємо у формулу (2) вирази (1) та (3) – (5) і отримуємо

$$z = \frac{\sqrt{2} \pi d_{еф}^2 p^2 V}{2k^2 T} \cdot \sqrt{\frac{8R}{\pi M T}}. \qquad (6)$$

Підстановка даних задачі і значень постійних k і R дає

$$z = \frac{\sqrt{2}\cdot 3{,}14\cdot 2{,}3^2\cdot 10^{-20}\cdot 1{,}013^2\cdot 10^{10}\cdot 10^{-9}\cdot\sqrt{8\cdot 8{,}31}}{2\cdot 1{,}38^2\cdot 10^{-46}\cdot 273\sqrt{3{,}14\cdot 2\cdot 10^{-3}\cdot 273}} = 1{,}6\cdot 10^{26}\,\text{с}^{-1}.$$

$$[z] = \frac{\text{м}^2\cdot\text{Н}^2\cdot\text{м}^3\cdot\text{К}^2}{\text{м}^4\cdot\text{Дж}^2\cdot\text{К}}\left(\frac{\text{Дж}\cdot\text{моль}}{\text{моль}\cdot\text{К}^2\cdot\text{кг}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\text{Н}^2\cdot\text{м}\cdot\text{К}\cdot\text{м}}{\text{Н}^2\cdot\text{м}^2\cdot\text{К}\cdot\text{с}} = \frac{1}{\text{с}}.$$

Відповідь: $z = 1{,}6\cdot 10^{26}\,\text{с}^{-1}$.

Приклад 10.3. На висоті h=20см над горизонтальною стрічковою трансмісією, яка рухається зі швидкістю v_1=70м/с, паралельно до неї підвішена пластинка площиною S=4см^2 (див. рис.10.2). Яку силу слід прикласти до цієї пластинки, щоб вона залишалася нерухомою? В'язкість повітря при нормальних умовах $\eta_0 = 1{,}7\cdot 10^{-5}$ кг/(м·с). В умовах досліду температура $t = 27°\text{C}$, тиск атмосферний.

h=0,2м
v_1=70м/с
S=4·10^{-4} м^2
$\eta_0 = 1{,}7\cdot 10^{-5}$ кг/(м·с)
T = 300К
T_0= 273К

F - ?

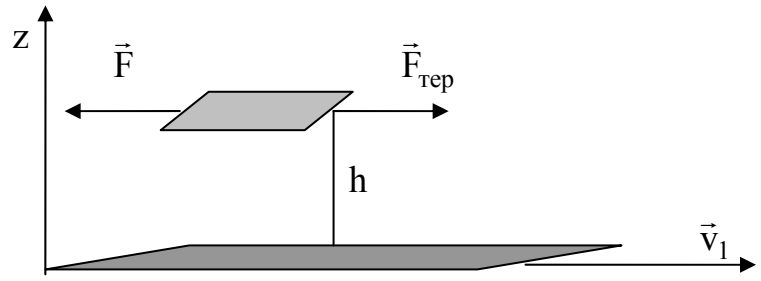


Рис. 10.2

Розв'язання

Пластинка залишиться нерухомою, якщо прикладена до неї сила $\vec{F}$ і сила тертя $\vec{F}_{тер}$, що діє з боку рухомих шарів повітря, будуть скомпенсовані:

$\vec{F} = -\vec{F}_{тер}$, а за модулем сили є рівними: $F = F_{тер}$.

Силу внутрішнього тертя виражаємо з рівняння Ньютона (10.6):

$$F_{тер} = \eta\frac{\Delta v}{\Delta z}S\ . \qquad (1)$$

За атмосферного тиску середня довжина вільного пробігу $\langle l\rangle << h$, тому для визначення динамічної в'язкості η можна скористатися формулою (10.7)

$$\eta = \frac{1}{3}<v>\cdot <l>\rho\ , \qquad (2)$$

де

$$<v> = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}\ ; (3) \qquad <l> = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi d_{еф}^2 n}\ ; (4) \qquad \rho = m_0 n = \frac{M\cdot n}{N_A}. \quad (5)$$

Підставляємо вирази (3) – (5) у формулу (2) і отримуємо

$$\eta = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi d_{еф}^2 n} \cdot \frac{M \cdot n}{N_A} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi d_{еф}^2} \cdot \frac{M}{N_A}\ . \qquad (6)$$

Аналогічно за нормальних умов:

$$\eta_0 = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT_0}{\pi M}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi d_{еф}^2} \cdot \frac{M}{N_A}\ . \qquad (7)$$

Діленням виразу (6) на (7) отримаємо $\frac{\eta}{\eta_0} = \sqrt{\frac{T}{T_0}}$,звідки $\eta = \eta_0\sqrt{\frac{T}{T_0}}$ (8)

Підставляємо вираз (8) у формулу (10) і визначаємо силу F:

$$F_{тер} = \eta_0\sqrt{\frac{T}{T_0}} \cdot \frac{v_1}{h} S\ .$$

Обчислення дає $F = 1{,}7 \cdot 10^{-5} \cdot \sqrt{\frac{300}{273}} \cdot \frac{70}{0{,}2} \cdot 4 \cdot 10^{-4} = 2{,}5 \cdot 10^{-6}$ Н.

$$[F] = \frac{кг}{м \cdot с} \cdot \left(\frac{К}{К}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{м \cdot м^2}{с \cdot м} = \frac{кг \cdot м}{с^2} = Н.$$

Відповідь: $F = 2{,}5 \cdot 10^{-6}$ Н.

Приклад 10.4. Коефіцієнт внутрішнього тертя азоту за нормальних умов дорівнює $\eta = 1{,}78 \cdot 10^{-5}$ $Н \cdot с / м^2$. Знайти коефіцієнт дифузії азоту D за цих умов.

$\eta = 1{,}78 \cdot 10^{-5}$ $Н \cdot с / м^2$
$P = 10^5$ Па
T=273 К;
R=8,31 Дж/(моль · К)
$M = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

D - ?

Розв'язання

Скористаємося формулами (10.5) і (10.7) для коефіцієнтів D і η

$$D = \frac{1}{3} < v > \cdot < l >; \qquad (1)$$

$$\eta = \frac{1}{3} < v > \cdot < l > \rho\ , \qquad (2)$$

де $< v >$ – середня арифметична швидкість теплового руху молекул;

$< l >$ – середня довжина вільного пробігу молекул; ρ – густина газу.

З порівняння (1) і (2) випливає, що $\eta = D\rho$. (3)

Таким чином, для знаходження коефіцієнта дифузії азоту треба знайти його густину за нормальних умов. З цією метою скористаємося рівнянням Менделєєва – Клапейрона (8.6): $PV = \frac{m}{M}RT$. (4)

За означенням густина речовини $\rho = m/V$, тому виразимо звідси m і підставимо у (4): $PV = \rho \cdot V \cdot \frac{RT}{M}$, звідки $\rho = \frac{PM}{RT}$. (5)

Тоді рівняння (3) з урахуванням співвідношення (5) набере вигляду:

$\eta = \frac{DPM}{RT}$, звідки $D = \frac{\eta RT}{PM}$.

$$D = \frac{1,78 \cdot 10^{-5} 8,31 \cdot 273}{10^5 \cdot 28 \cdot 10^{-3}} = 1,44 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$$

$$[D] = \frac{\text{Н} \cdot \text{с}/\text{м}^2 \cdot \text{Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}) \cdot \text{К}}{\text{Н}/\text{м}^2 \cdot \text{кг}/\text{моль}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{\text{кг}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{\text{с}^2 \cdot \text{кг}} = \text{м}^2/\text{с}$$

Відповідь: $D = 1,44 \cdot 10^{-5}$ м^2/с.

Приклад 10.5. Проміжок між двома концентричними сферами заповнений однорідною ізотропною речовиною. Радіуси сфер дорівнюють: R_1 = 10см і R_2 = 12см. Поверхня внутрішньої сфери підтримується за температури T_1=320К, поверхня зовнішньої сфери – за температури T_2=300К. За цими умовами від внутрішньої сфери до зовнішньої установлюється потік тепла $\frac{dQ}{dt}$=2,00кВт. Вважаючи, що коефіцієнт теплопровідності λ речовини у проміжку не залежить від температури, визначити: а) значення λ;
б) залежність температури у проміжку від відстані r до центра сфери – T(r).

R_1 = 0,10м R_2 = 0,12м T_1=320К T_2=300К $\frac{dQ}{dt}$=2,0кВт	Розв'язання а) Оскільки за умовою задачі температура залежить тільки від відстані до центра сфери, згідно рівнянню (10.9) потік тепла через сферичну поверхню можна виразити як
λ, T(r) - ?	

$$\frac{dQ}{dt} = -\lambda \frac{dT}{dr} S, \quad (1)$$

де площа поверхні $S = 4\pi r^2$ (2).
У якості радіуса r сферичної поверхні беремо радіус зовнішньої сфери R_2. З рівняння (1) знаходимо коефіцієнт теплопровідності речовини

$$\lambda = -\frac{dQ}{dt} \frac{\Delta R}{4\pi R_2^2 \Delta T} = -\frac{dQ}{dt} \cdot \frac{R_2 - R_1}{4\pi R_2^2 (T_2 - T_1)}.$$

$$\lambda = -2 \cdot 10^3 \cdot \frac{0,02}{4 \cdot 3,14 \cdot (300 - 320)} = 13,3 \frac{\text{Вт}}{\text{К} \cdot \text{м}}.$$

$$[\lambda] = \frac{\text{Вт} \cdot \text{м}}{\text{К} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Вт}}{\text{К} \cdot \text{м}}.$$

б) З рівняння (1) з урахуванням виразу (2) для площі поверхні виражаємо зміну температури dT при зміні відстані від r до r + dr:

$$dT = -\frac{dQ}{dt} \cdot \frac{1}{4\pi\lambda} \cdot \frac{dr}{r^2}. \qquad (3)$$

Проводимо інтегрування виразу (3) у межах від значень T_1, R_1, які відповідають внутрішній сфері до значень T і r, які відповідають довільній точці на відстані r від центру концентричних сфер.

$$\int_{T_1}^{T} dT = -\frac{dQ}{dt} \cdot \frac{1}{4\pi\lambda} \int_{R_1}^{r} \frac{dr}{r^2}.$$

Тобто $T - T_1 = -\frac{dQ}{dt} \cdot \frac{1}{4\pi\lambda} \left(-\frac{dr}{r} \right)\Bigg|_{R_1}^{r} = -\frac{dQ}{dt} \cdot \frac{1}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{r} \right),$

Звідки $$T = T_1 - \frac{dQ}{dt} \cdot \frac{1}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{r} \right). \qquad (4)$$

$$T = 320 - \frac{2 \cdot 10^3}{12{,}56 \cdot 13{,}3} \left(\frac{1}{0{,}1} - \frac{1}{r} \right) = 320 - 120 + \frac{12}{r} = 200 + \frac{12}{r}.$$

Відповідь: $\lambda = 13{,}3 \frac{\text{Вт}}{\text{К} \cdot \text{м}}$; $T = \left(200 + \frac{12}{r} \right) \text{K}$.

Приклад 10.6. При заповненні посудини Дюара рідким азотом за деякий час випарилась маса M_1 = 20 г. Яка маса M_2 випариться за той самий час з тієї самої посудини, якщо її заповнити воднем? Температура кипіння рідкого азоту за атмосферного тиску дорівнює 77,3 К, водню – 20,4 К. Температуру оточуючого середовища взяти рівною 300 К.

m_1 = 0,02кг
T_1=77,3 К
T_2=20,4 К
T_0=300 К
L_1=199 кДж/кг
L_2=448 кДж/кг

m_2-?

Розв’язання

Посудини Дюара, в яких зберігають зріджені гази, – це скляні або металеві колби з подвійними стінками. З простору між стінками для зменшення теплопровідності відкачують повітря до високого вакууму: (10^{-3} – 10^{-5})мм рт. ст. Молекули повітря, які залишаються, переносять тепло від оточуючого середовища до рідини, що приводить до поступового википання зрідженого газу, внаслідок чого його температура залишається незмінною. Щоб запобігти вибуху посудини внаслідок зростання тиску газу, що випаровується, шийку посудини Дюара тримають відкритою для виходу газу в атмосферу.

Між стінками посудини створений фізичний вакуум: молекули проходять відстань між стінками без зіткнень. Тому формула (10.9), яка

виводиться у припущенні зіткнень між молекулами газу, не може використовуватись.

Для оцінки величини потоку тепла від зовнішньої стінки посудини Дюара до внутрішньої холодної стінки припустимо, що кожна молекула повітря, яка покидає стінку, має відповідну температурі стінки енергію. При зіткненні з протилежною стінкою молекула повністю віддає свою енергію, тобто зіткнення носять непружний характер.

Температуру зовнішньої стінки T_0 будемо вважати рівною температурі оточення. Температура внутрішньої стінки дорівнює температурі кипіння T_1. Потік енергії Q_0, який переносять молекули повітря від гарячої стінки до холодної, пропорційний кількості молекул, які покидають гарячу стінку за одиницю часу, та енергії молекули $\langle \varepsilon_k \rangle = \frac{i}{2} kT_0$ (1). Число таких молекул є пропорційним концентрації n_0 молекул, які мають температуру гарячої стінки, та їх середній швидкості $< v_0 > = \sqrt{\frac{8RT_0}{\pi M}}$ (2). З іншого боку, кількість цих молекул дорівнює числу молекул, які прилітають до гарячої стінки від холодної:

$$n_1 \langle v_1 \rangle S = n_0 \langle v_0 \rangle S, \qquad (3)$$

де n_1 – концентрація молекул, які мають температуру холодної стінки; $< v_1 > = \sqrt{\frac{8RT_1}{\pi M}}$ (4) – їх середня швидкість; S – площа кожної з поверхонь посудини (невеликою різницею між внутрішньою і зовнішньою площинами нехтуємо).

Потік енергії Q_1 визначається аналогічно потоку Q_0. Тоді потік тепла Q від гарячої стінки до холодної, який дорівнює різниці потоків енергії, має значення: $Q = Q_0 - Q_1 = n_0 \langle v_0 \rangle S \cdot \frac{i}{2} kT_0 - n_1 \langle v_1 \rangle S \cdot \frac{i}{2} kT_1$.

З урахуванням співвідношення (3) і формули (4) останньому виразу можна надати вигляду

$$Q = n_1 \langle v_1 \rangle S \cdot \frac{i}{2} k \left(T_0 - T_1 \right) = n_1 S \cdot \frac{i}{2} k \cdot \sqrt{\frac{8RT_1}{\pi M}} \left(T_0 - T_1 \right),$$

або, якщо комбінацію постійних величин означити через C,

$$Q = Cn_1 \sqrt{T_1} \left(T_0 - T_1 \right). \qquad (5)$$

Концентрацію молекул n_1 виразимо через повну концентрацію молекул повітря між стінками n, яка дорівнює $n = n_0 + n_1$ з урахуванням співвідношень (2)-(5): $n = n_1 + n_0 = n_1 + \frac{n_1 \langle v_1 \rangle}{\langle v_0 \rangle} = n_1 + n_1 \sqrt{\frac{T_1}{T_0}}$.

Звідки $n_1 = \dfrac{n}{1+\sqrt{\dfrac{T_1}{T_0}}}$. (6)

Остаточно для потоку тепла (5) отримуємо:

$$Q = \frac{Cn\sqrt{T_1}}{1+\sqrt{\dfrac{T_1}{T_0}}}\left(T_0 - T_1\right) = Cn\sqrt{T_0T_1}\left(\sqrt{T_0} - \sqrt{T_1}\right).$$

За рахунок цього потоку тепла за одиницю часу випаровується маса зрідженого газу m_1, яка дорівнює $m_1 = \dfrac{Cn}{L_1}\sqrt{T_0T_1}\left(\sqrt{T_0} - \sqrt{T_1}\right)$, (7)

де L_1 – питома теплота випаровування.

Співвідношення (7) буде справедливим для будь-якого іншого зрідженого газу з температурою кипіння T_2 і питомою теплотою випаровування L_2. Тому для відношення мас різних газів, які випаровуються за однаковий час з тієї самої посудини Дюара, отримуємо

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{L_1}{L_2}\cdot\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}\cdot\frac{\left(\sqrt{T_0} - \sqrt{T_2}\right)}{\left(\sqrt{T_0} - \sqrt{T_1}\right)}.$$

Звідки $m_2 = \dfrac{m_1L_1}{L_2}\cdot\sqrt{\dfrac{T_2}{T_1}}\cdot\dfrac{\left(\sqrt{T_0} - \sqrt{T_2}\right)}{\left(\sqrt{T_0} - \sqrt{T_1}\right)}$.

$$m_2 = 0{,}02\cdot\frac{199\cdot10^3}{448\cdot10^3}\cdot\sqrt{\frac{20{,}4}{77{,}3}}\cdot\frac{\sqrt{300}-\sqrt{20{,}4}}{\sqrt{300}-\sqrt{77{,}3}} = 6{,}85\cdot10^{-3}\text{ кг}$$

Відповідь: $m_2 = 6{,}85\cdot10^{-3}$ кг

Зауваження. Маса водню, який википає з посудини Дюара, менша за масу азоту, хоча температура кипіння водню є нижчою. Проте, швидкість википання за об’ємом у водню вища. Якщо від відношення мас перейти до відношення об’ємів, скориставшись значеннями густини рідкого азоту (ρ_1=0,8кг/м^3) і рідкого водню (ρ_2=0,07кг/м^3), отримуємо:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{6{,}85\cdot10^{-3}}{20\cdot10^{-3}}\cdot\frac{0{,}8}{0{,}07} = 3{,}9 \text{ (разів)}.$$

Тобто водень википає приблизно учетверо швидше відазоту.

Задачі для самостійного розв’язування

10.1. Визначити середню довжину вільного пробігу $\langle l \rangle$ молекул водню за температури $t = 27^0$C і тиску P = 1мм рт.ст.

10.2. Знайти кількість зіткнень $\langle z \rangle$ за одну секунду молекул газу, якщо за даних умов середня квадратична швидкість його молекул дорівнює

$v_{кв}$=500м/с, а середня довжина вільного пробігу молекули $<l>$ = 5мкм.

10.3. Оцініть число ударів молекул повітря об поверхню віконного скла площиною $S = 1м^2$ з боку аудиторії за інтервал часу $\Delta t = 1с$. Температура повітря в аудиторії $t = 27°C$, тиск $p = 10^5$ Па, молярна маса повітря M=0,029кг/моль.

10.4. Довжина вільного пробігу молекул водню за нормальних умов $\langle l \rangle$=1,28×10^{-5} см. Знайти ефективний діаметр молекули водню $d_{еф}$.

10.5. ν=5 молів повітря знаходяться у посудині об'ємом V=2 л. Знайти середню довжину вільного пробігу $<l>$ молекул повітря в цих умовах. Ефективний діаметр молекули повітря взяти рівним $d_{еф} = 0,3 \cdot 10^{-9}$ м.

10.6. Вичислити середню довжину $<l>$ вільного пробігу молекул хлору за температури t=0°C і тиску $p = 1,5 \cdot 10^5$ Па. Ефективний діаметр молекули хлору $d_{еф} = 3,5 \cdot 10^{-10}$ м.

10.7. За якого тиску p повітря, яке знаходиться при температурі t=27°C, середня довжина вільного пробігу його молекул становить $\langle l \rangle$=7,93×10^{-3} м? Ефективний діаметр молекули повітря взяти рівним $d_{еф} = 0,3$ нм.

10.8. Середня довжина вільного пробігу молекул водню за нормальних умов складає $\langle l \rangle$=0,1мкм. Визначити середню $<l_1>$ їх вільного пробігу при тиску p=0,1 мПа, якщо температура газу залишиться постійною.

10.9. Знайти середню довжину вільного пробігу $<l>$ молекул азоту, що знаходиться в колбі діаметром D=20см за тиску P=100мкПа і температурі T=280K. Чи можна вважати, що в колбі створений високий вакуум? Ефективний діаметр молекули азоту $d_{еф} = 0,38$ нм.

10.10. Кисень знаходитися при t=0°C в посудині з характерним розміром L=10 мм. Знайти тиск p газу, нижче за який середня довжина вільного пробігу молекул $\langle l \rangle$>L, і відповідну цьому тиску концентрацію молекул кисню. Ефективний діаметр молекули кисню $d_{еф} = 3,6 \cdot 10^{-10}$ м.

10.11. У скільки разів середня довжина $<l>$ вільного пробігу молекул азоту, що знаходиться за нормальних умов, більша від середньої відстані $\langle L \rangle$ між його молекулами? Ефективний діаметр молекули азоту $d_{еф} = 0,38$ нм.

10.12. Тиск при вакуумі в рентгенівській трубці складає p=10^{-6} мм рт.ст. за температурі t=15°C. У скільки разів довжина $<l>$ вільного пробігу електронів у цих умовах є більшою від відстані L=50 мм між катодом і антикатодом у трубці? Вважати, що середня довжина вільного пробігу електронів у газі в η=5,7 рази більша, ніж середня довжина вільного

пробігу молекул самого газу. Значення ефективного діаметра молекул повітря $d_{еô} = 3 \cdot 10^{-10}$ м.

10.13. Середня довжина вільного пробігу молекул вуглекислого газу за нормальних умов $\langle l \rangle = 4 \cdot 10^{-8}$ м. Яка середня арифметична швидкість $\langle v \rangle$ молекул? Скільки зіткнень z в секунду зазнає молекула? Молярна маса вуглекислого газу $M = 0,044$ кг / моль.

10.14. Знайти коефіцієнт дифузії D для кисню за нормальних умов.

10.15. Коефіцієнт внутрішнього тертя азоту за нормальних умов $\eta = 1,78 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с). Визначити коефіцієнт D дифузії за цих умов.

10.16. Визначити час τ між двома послідовними зіткненнями молекули водню за нормальних умовах.

10.17. Коефіцієнт внутрішнього тертя кисню за нормальних умов дорівнює $\eta = 18,8 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с). Знайти коефіцієнт теплопровідності æ кисню при цих умовах, вважаючи газ ідеальним.

10.18. Літак рухається зі швидкістю v = 400км/год. Вважаючи, що шар повітря, яке захоплює крило літака внаслідок в'язкості, має товщину $\Delta z = 5$ см, визначити дотичну силу, яка діє на одиницю поверхні крила. Коефіцієнт внутрішнього тертя взяти рівним $\eta = 1,72 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с).

10.19. Дві паралельні пластини розташовані на відстані L = 0,5см. Одна з пластин підтримується при температурі $t_1 = 17^0$C, а друга – при температурі $t_2 = 27^0$C. Простір між пластинами заповнений азотом. Визначити потік тепла $Q/(\Delta S \cdot \Delta T)$, який перетинає за одну секунду одиницю площі пластин. Коефіцієнт внутрішнього тертя азоту за даних умов взяти $\eta = 1,67 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с); розглядати газ як ідеальний і знехтувати крайовими ефектами. Вважати також, що розміри пластин набагато більші за відстань між ними.

Тестові завдання

Вибрати вірну відповідь:

1. Середня довжина вільного пробігу молекул в ізотермічному процесі зі збільшенням тиску

1. збільшується
2. зменшується
3. не змінюється
4. не залежить від тиску

2. У випадку ідеального газу не залежать від тиску

1. коефіцієнти дифузії та динамічної в'язкості
2. коефіцієнти теплопровідності та динамічної в'язкості
3. коефіцієнти дифузії та теплопровідності
4. усі три коефіцієнти.

Установити відповідність:

3. У явищах переносу здійснюється перенос фізичної величини

явище	**фізична величина**
1. дифузія	A. енергія
2. в'язкість	B. речовина
3. теплопровідність	C. імпульс молекули

Розділ 11. Основи термодинаміки.

11.1. Перший закон термодинаміки

Тема: Перший закон термодинаміки. Застосування рівняння першого закону термодинаміки до ідеальних газів. Внутрішня енергія, теплоємність ідеального газу. Робота ідеального газу в різних процесах.

Основні поняття і формули

● **Внутрішня енергія термодинамічної системи і способи її зміни.** Термодинамічна система може складатися із речовини у твердому, рідкому або газоподібному стані. Повна енергія такої системи складається з механічної енергії системи як цілого, внутрішньої енергії сукупності частинок, які хаотично рухаються та взаємодіють між собою, і енергії ядерної взаємодії нуклонів атомів системи.

З точки зору термодинаміки **внутрішня енергія системи – сума кінетичної енергії хаотичного руху частинок, які входять до неї, і потенціальна енергія їх взаємодії.**

● Термодинаміка розрізняє два способи обміну енергією між закритою системою і зовнішніми тілами:
- шляхом здійснення системою (або над системою) роботи;
- шляхом теплообміну.

Здійснення роботи обов'язково зв'язано з переміщенням зовнішніх тіл, які діють на систему, і супроводжується макроскопічними переміщеннями частин системи: може змінюватися взаємне положення частин системи, її розміри. Виконання роботи може привести до зміни будь-якого виду енергії системи (внутрішньої, механічної).

Теплообмін пов'язаний з сукупністю процесів обміну енергією між окремими частинками термодинамічної системи та зовнішнім середовищем і може відбуватися шляхом конвекції, теплопровідності та випромінювання. Шляхом теплообміну можна змінити тільки внутрішню енергію системи.

Зверніть увагу! Робота і теплота мають розмірність енергії (одиниця вимірювання в СІ – джоуль), але не є видами енергії. Вони характеризують лише спосіб і міру передачі енергії, тобто процес її передачі, але не стан системи. Немає сенсу говорити про запас теплоти або роботи, які має система. Ці величини не є функціями стану, відрізняються від нуля лише в процесі передачі енергії і залежать від шляху переходу системи з одного стану в інший.

Передача енергії, в свою чергу, визначає зміну її внутрішньої енергії ΔU. **Внутрішня енергія – функція стану термодинамічної системи.** Її значення не залежить від того, яким способом система була приведена в

певний термодинамічний стан. При поверненні системи в початковий стан після здійснення довільного термодинамічного циклу $\Delta U = 0$.

● **Перший закон (**принцип**)** термодинаміки – це закон збереження енергії при її перетвореннях в системах, які складаються з великої кількості частинок. Зокрема, рівняння першого закону термодинаміки виражає закон збереження і перетворення енергії стосовно теплових процесів.

Для нескінченно малих змін стану внутрішньої енергії системи dU є справедливим співвідношення:

$$\delta Q = \delta A + dU, \qquad (11.1)$$

де величини елементарної кількості теплоти δQ і роботи δA є додатними, якщо тепло надається системі, і система здійснює роботу проти дії зовнішніх сил.

Відповідно рівнянню (11.1) перший закон термодинаміки може бути сформульований так: **елементарна кількість теплоти, що надана системі йде на зміну її внутрішньої енергії і на виконання системою роботи проти зовнішніх сил.**

Для кінцевих змін параметрів системи, тобто для переходу системи зі стану 1 в стан 2 інтегрування рівняння (11.1) дає:

$$Q = \Delta U + A. \qquad (11.2)$$

У випадку здійснення термодинамічного циклу зміна внутрішньої енергії дорівнює нулю і з рівняння (5.2) отримуємо, що

$$A = Q. \qquad (11.2a)$$

Це означає, що для циклічного процесу робота, яка виконується термодинамічною системою, не може перевищувати отриману нею кількість теплоти.

Інакше: **неможливе створення вічного двигуна першого роду, тобто такого періодично діючого двигуна, який би виконував роботу, більшу за отриману ним енергію.**

Зауважимо, що з тієї обставини, що в рівняння (11.1), яке представляє собою загальне математичне формулювання першого закону термодинаміки, входить теплота δQ, не слід робити висновок, ніби це є вираження закону збереження стосовно окремого випадку лише теплових явищ.

Наприклад, для чисто механічних процесів, в яких теплота не приймає участі (δQ=0), рівняння (11.1) приймає більш простий вигляд, а саме: $-dU = \delta A$ (11.1a). Це означає, що виконана даною системою робота дорівнює зменшенню власної внутрішньої енергії системи.

В іншому випадку, коли в теплоізольованій системі не відбувається ніяких перетворень енергії, окрім теплообміну між тілами, які входять до системи, то кількість теплоти, яку віддають тіла, що охолоджуються, дорівнює кількості теплоти, яку отримують тіла, що нагріваються.

Сумарна внутрішня енергія системи при цьому не змінюється, тобто $\Delta U = 0$. Відповідне рівняння називають **рівнянням теплового балансу**.

Зауваження: при запису виразів для елементарної кількості теплоти та елементарної роботи часто замість позначень δQ та δA використовують dQ та dA, розуміючи під цими позначеннями тільки малість цих величин.

● **Теплоємність** тіла (системи) – фізична величина, яка чисельно дорівнює кількості теплоти, необхідній для нагрівання тіла (системи) на один кельвін:

$$C_т = \frac{\Delta Q}{\Delta T}, \qquad [C_т] = \left[\frac{Дж}{К}\right] \tag{11.3}$$

де ΔQ - теплота, що підведена до тіла при підвищенні його температури на ΔT.

Питома теплоємність с – величина, яка чисельно дорівнює кількості теплоти, необхідній для нагрівання на 1К одиниці маси речовини:

$$c = \frac{1}{m} \cdot \frac{dQ}{dT}. \qquad [c] = \left[\frac{Дж}{кг \cdot К}\right] \tag{11.4}$$

Молярна теплоємність С – величина, яка чисельно дорівнює кількості теплоти, необхідній для нагрівання на 1К одного моля речовини:

$$C = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{dQ}{dT} = \frac{M}{m} \cdot \frac{dQ}{dT}. \qquad [C] = \left[\frac{Дж}{моль \cdot К}\right] \tag{11.5}$$

Молярна та питома теплоємності зв'язані між собою співвідношенням:

$$C = Mc, \quad \text{де } M \text{ – молярна маса речовини.} \tag{11.6}$$

● **Застосування першого закону термодинаміки до ідеальних газів.**

Теплоємність газів залежить від процесу. Тому розрізняють теплоємність газу при постійному об'ємі (C_v) та теплоємність газу при постійному тиску (C_p).

При постійному об'ємі молярну та питому теплоємність газу надають формули:

$$C_v = \frac{i}{2}R; \qquad c_v = \frac{i}{2}\frac{R}{M}, \tag{11.7}$$

де; R – універсальна газова стала; i – кількість ступенів вільності молекул газу.

При постійному тиску молярна та питома теплоємність газу надається формулами

$$C_p = \frac{i+2}{2}R; \qquad c_p = \frac{i+2}{2}\frac{R}{M}. \tag{11.8}$$

Рівняння Р.Майєра зв'язує молярні теплоємності ідеального газу, виміряні за різними умовами:

$$C_p - C_v = R. \tag{11.9}$$

Рівняння (11.9) показує, що зміна температури молю ідеального газу на 1 К при постійному тиску потребує додаткової, порівняно з ізохорним нагріванням, теплоти, необхідної для виконання роботи при поширенні газу, без якого неможливо виконання умови $p = const$. Це значення дорівнює універсальній газовій постійній R.

Відношення теплоємності газу при постійному тиску і об'ємі γ, яке носить назву коефіцієнта Пуассона, визначається тільки кількістю ступенів вільності атомів або молекул газу і не залежить у явному вигляді від температури:

$$\gamma = \frac{i+2}{i}. \qquad (11.10)$$

У випадку багатоатомних молекул кількість ступенів вільності розраховується за формулою:

$$i = i_{пост.} + i_{оберт.} + 2i_{колив.}, \qquad (11.11)$$

$i_{пост.}, i_{оберт.}, i_{колив.}$ – кількість ступенів вільності поступального обертального та коливального рухів.

Значення $i_{колив.}$ у виразі (11.11) множиться на 2, оскільки у коливальному русі присутні складові кінетичної і потенціальної енергії, середні значення яких є рівними.

Зауважимо, що теоретичні значення теплоємностей і коефіцієнту Пуассона добре узгоджуються з експериментальними даними в широкому інтервалі температур тільки для одноатомних газів (i=3). Для багатоатомних молекул ці значення стрибкоподібно збільшуються при зростанні температури, оскільки при цьому збільшується кількість ступенів вільностей частинок. В області низьких температур здійснюється тільки поступальний рух молекул ($i = i_{пост.}$=3), в області більш високих (в тому числі кімнатних температур) до них додаються ступені вільності, які зв'язані з можливістю обертального руху ($i = i_{пост.} + i_{оберт.}$), а далі – коливального руху ($i = i_{пост.} + i_{оберт.} + 2i_{колив.}$).

● **Внутрішня енергія ідеального газу** дорівнює кінетичній енергії теплового руху його молекул (молекули не взаємодіють між собою):

$$U = \nu\frac{i}{2}RT = \nu C_v T, \qquad (11.12)$$

де $\nu = \frac{m}{M}$ – кількість молів ідеального газу. Звідки зміна внутрішньої енергії ідеального газу дорівнює:

$$\Delta U = \nu C_v \Delta T \qquad (11.13)$$

● **Елементарна робота,** яка виконується газом при елементарній зміні його об'єму dV, коли тиск **p** можна вважати постійним, дорівнює:

$$dA = pdV. \qquad (11.14)$$

При поширенні газу ($dV > 0$) робота газу – додатна величина. При стисканні газу $dV < 0$, і робота газу dA буде від'ємною величиною. Додатною в цьому випадку буде робота зовнішньої сили dA' = - dA > 0.

У загальному випадку робота, яка виконується газом при кінцевій зміні його об'єму від V_1 до V_2:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV . \qquad (11.15)$$

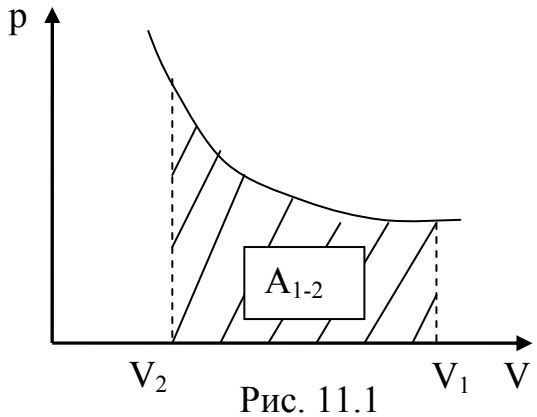


Рис. 11.1

Для обчислення роботи можна також скористатися графічним методом: за геометричним змістом інтегралу робота, яка виконується в деякому процесі, на p-V – діаграмі дорівнює площі фігури, яка обмежена віссю абсцис та лінією, що представляє собою графік процесу $p = f(V)$ (рис.11.1).

Окремі випадки:

а) ізобаричний процес: $A = p(V_2 - V_1)$; (11.16)

б) ізотермічний процес: $A = \nu RT\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$; (11.17)

в) адіабатний процес (який відбувається без теплообміну з оточуючим середовищем, Q = 0):

$$A = -\Delta U = -\nu C_V \Delta T, \text{ або } A = \frac{RT_1}{\gamma - 1}\frac{m}{M}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}\right] \qquad (11.18)$$

де C_V – молярна теплоємність при постійному об'ємі;

$\gamma = C_p/C_V$ – коефіцієнт Пуассона.

● **Адіабатний процес та політропні процеси.** Адіабатний процес – процес, який відбувається без теплообміну з навколишнім середовищем. Таким чином, для адіабатних процесів є характерною наявність якісної ізоляції від зовнішнього середовище або висока швидкість протікання процесу, при якій теплообмін з навколишнім середовищем є несуттєвим.

Приклади адіабатних процесів: робота двигунів внутрішнього згорання; процеси в термостатах; Розрідження та стискання газів при розповсюдженні звукової хвилі.

При адіабатному процесі параметри стану зв'язані рівняннями:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}; \qquad (11.19)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}; \qquad (11.20)$$

$$PV^{\gamma} = \text{const}; \qquad (11.21)$$

Останнє рівняння (11.21) має назву рівняння Пуассона.

На діаграмі p-V адіабата йде більш круто ніж ізотерма. Це пояснюється тим, що в ізотермічному процесі зміна тиску пов'язана тільки зі зміною об'єму і, внаслідок цього, концентрації молекул ($p = nkT$), а в адіабатному процесі на зміну тиску одночасно впливає також зміна температури.

Ізохорний, ізобарний, ізотермічний і адіабатний процеси – мають одну загальну властивість – їх теплоємність не змінюється в ході процесу.

Термодинамічні процеси, в яких теплоємність залишається постійною називають **політропними процесами**.

Рівняння політропи має вигляд:

$$pV^{n} = \text{const}, \qquad (11.22)$$

де n – показник політропи.

$$n = \frac{C - C_p}{C - C_v}. \qquad (11.23)$$

C – теплоємність процесу.

$$C = \frac{nC_v - C_p}{n - 1}. \qquad (11.24)$$

Ізохорний процес: $n = \infty$; $C = C_v$;

Ізобарний процес: n = 0; $C = C_p$;

Ізотермічний процес: n = 1; $C = \infty$;

Адіабатний процес: $n = \gamma$; C = 0.

Методичні вказівки.

● При розв'язанні задач даної теми, перш за все необхідно уявляти, в яким способом термодинамічна система обмінюється енергією з зовнішніми тілами. В залежності від цього, вона може бути замкненою, адіабатично замкненою, замкненою у механічному відношенні і незамкненою (відкритою). Відповідно рівняння першого закону термодинаміки (11.1) приймає різний вигляд.

▪ Якщо система замкнена, то теплообмін з навколишнім середовищем відсутній і робота не виконується. Має місце повна енергетична ізоляція системи від довкілля, тому внутрішня енергія системи не змінюється з часом. З рівняння першого закону термодинаміки випливає, що в цьому випадку зміна внутрішньої енергії системи $\Delta U = 0$. В такій системі може

відбуватися тільки теплообмін між тілами, що входять до її складу, який описує рівняння теплового балансу. Внаслідок система переходить у стан термодинамічної рівноваги.

Нагадаємо формули, які можуть бути корисними при складанні рівняння теплового балансу (див. приклад 11.1).
При нагріванні речовини системи від одного стану 1 до другого 2 отриману кількість теплоти можна розрахувати за формулою

$$Q = m\int_{1-2} c dT = \nu \int_{1-2} C dT, \qquad (11.25)$$

де c – питома теплоємність речовини, $[c] = \left[\frac{Дж}{кг \cdot К}\right]$; C – молярна теплоємність, $[C] = \left[\frac{Дж}{моль \cdot К}\right]$. У більшості випадків значення c і C можна вважати незалежними від температури і виносити за знак інтегралу. Тоді кількість теплоти Q, отриманої тілом масою m при нагріванні або віддане ним при охолодженні, визначається формулою

$$Q = cm\Delta T = \nu C\Delta T \qquad (11.26)$$

Кількість теплоти Q, необхідної для переходу маси речовини m із твердого стану у рідкий при температурі плавлення, визначається формулою

$$Q = Lm, \qquad (11.27)$$

де L– питома теплота плавлення, тобто кількість теплоти, необхідної для плавлення одиниці маси речовини. $[L] = \left[\frac{Дж}{кг}\right]$.

Кількість теплоти Q, необхідної для перетворення маси рідини m в пар при температурі кипіння, визначається формулою

$$Q = rm, \qquad (11.28)$$

де r – питома теплота пароутворення, тобто кількість теплоти, необхідної для перетворення одиниці маси речовини з рідкого стану в пар при температурі кипіння. $[r] = \left[\frac{Дж}{кг}\right]$.

При повному згоранні палива масою m виділяється кількість теплоти

$$Q = qm, \qquad (11.29)$$

де q – питома теплота згорання палива, тобто кількість теплоти, яка виділяється при згоранні одиниці маси палива. $[q] = \left[\frac{Дж}{кг}\right]$.

▪ У випадку адіабатичної замкненої системи теплообмін з оточенням відсутній, тому внутрішня енергія такої системи може змінюватися тільки за рахунок виконання роботи. Для такої системи $\Delta U = -A$.

▪ Якщо термодинамічна система є замкненою у механічному відношенні, то її внутрішня енергія може змінюватися тільки за рахунок теплообміну з навколишнім середовищем: $\Delta U = Q$.

▪ Зміна внутрішньої енергії незамкненої термодинамічної системи при переході з одного стану в інший обов'язково супроводжується зміною її механічної енергії. Згідно закону збереження і перетворення енергії для такої системи

$$\Delta W + \Delta U = Q - A, \qquad (11.30)$$

де ΔW – зміна повної механічної енергії системи. Цей закон є основою розв'язання багатьох задач з термодинаміки.

● Кількість теплоти, як випливає з першого закону термодинаміки, вимірюється в тих самих одиницях, що робота і енергія. Поряд з джоулем використовується позасистемна одиниця теплоти – калорія (кал), яка дорівнює кількості енергії, необхідної для нагріву 1 г води на один градус.

Співвідношення між калорією і джоулем виражає **механічний еквівалент теплоти** I = 4,185 Дж/кал, тобто 1 кал теплоти є еквівалентною роботі 4,185 Дж.

У кілокалоріях вимірюють, як правило, енергетичну цінність харчових продуктів. Наприклад, при окисленні одного грама тваринного жиру звільняється біля 10 ккал енергії, тобто 41,8 кДж.

● Розв'язання задач на застосування першого закону термодинаміки до ідеальних газів зручно починати із з'ясування характеру процесу, що відбувається у газі (зрозуміло, якщо про це не говориться в умові задачі). Це не викликає труднощів у випадку ізохорного (V=const) або ізобарного процесів (p=const).

Ізотермічний процес (T = const) розширення або стискання газу потребує достатнього теплообміну між газом і оточуючим середовищем. Цьому сприяє висока теплопровідність стінок посудини, в якій знаходиться газ, і повільне протікання процесу. Навпаки, умовою адіабатного процесу розширення або стискання газу є відсутність теплообміну з оточенням. На практиці ця умова виконується тим точніше, чим менша теплопровідність стінок посудини, в якій знаходиться газ, і чим швидше протікає процес.

● В ізохорному і ізобарному процесах кількість теплоти, отриманої газом, завжди зв'язана зі зміною його температури:

$$dQ = \nu C dT, \qquad (11.31)$$

де $C = C_v$ при ізохорному процесі і $C = C_p$ при ізобарному процесі. При тому знаки dQ і dT завжди співпадають: надання системі теплоти завжди приводить до її нагрівання і навпаки.

При ізотермічному і адіабатному процесах такого простого зв'язку між зміною температури газу і отриманою теплотою не існує. При ізотермічному процесі відсутня зміна температури (dT=0), хоча газ при цьому отримує або віддає теплоту. При адіабатному процесі, навпаки, газ не отримує і не віддає теплоту (dQ=0), хоча при цьому змінюється його температура.

- У випадку декількох послідовних процесів, що здійснюються з газом, побудова їх графіка може полегшити розв'язання задачі.

Приклади розв'язання задач

Приклад 11.1. Лід масою m_1 = 200г знаходиться у замкненому латунному калориметрі масою m_2 = 100г при температурі $t_1 = -10°C$. В калориметр впускають деяку кількість пари при температурі $t_2 = 150°C$. Визначити масу пари, якщо в результаті теплообміну в калориметрі установилася температура $t = 20°C$.

m_1 = 0,2кг
m_2 = 0,1кг
T_1 = 263К
T_2 = 423К
T = 293К
T_0= 273К
T' = 373К
c_1=2090Дж/(кг·К)
c_2=380Дж/(кг·К)
c=4190Дж/(кг·К)
c_3=2200Дж/(кг·К)
L=335кДж/кг
r =2,26МДж/кг

m_3 - ?

Розв'язання

Термодинамічну систему «лід-пар-калориметр» можна вважати замкненою, оскільки її механічна енергія не змінюється, а невеликим теплообміном з зовнішнім середовищем можна знехтувати. Тоді процеси, що відбуваються в системі, зводяться до теплообміну між її компонентами, і зміна внутрішньої енергії системи дорівнює нулю, тобто

$$\Delta U_л + \Delta U_к + \Delta U_п = 0 \qquad (1)$$

Де $\Delta U_л$, $\Delta U_к$, $\Delta U_п$ – відповідно зміна внутрішньої енергії льоду, калориметра і пари. Визначаємо кожен з доданків.

Зміна внутрішньої енергії льоду: при його нагріванні до температури плавлення $\Delta U_1 = c_1 m_1 (T_0 - T_1)$; у процесі плавлення $\Delta U_2 = L m_1$; у процесі подальшого нагрівання холодної води: $\Delta U_3 = c m_1 (T - T_0)$.

Повна зміна внутрішньої енергії льоду дорівнює

$$\Delta U_л = c_1 m_1 (T_0 - T_1) + L m_1 + c m_1 (T - T_0) \ , \qquad (2)$$

де c_1 і c – теплоємності льоду і води, L – питома теплота плавлення льоду, T_0 = 273К – температура плавлення льоду.

Зміна внутрішньої енергії калориметра $\Delta U_к = c_2 m_2 (T - T_1)$, (3)

де c_2 – теплоємність латуні.

Зміна внутрішньої енергії пари: при охолодженні до температури конденсації T' $\Delta U_4 = c_3 m_3 (T_2 - T')$;

у процесі конденсації $\Delta U_5 = -rm_3$ (знак $''-''$ ураховує віддачу теплоти парою в процесі конденсації);

при охолоджені води, що утворилася з пари, $\Delta U_6 = cm_3 \left(T' - T\right)$.

Повна зміна внутрішньої енергії пари дорівнює:

$$\Delta U_п = c_3 m_3 (T_2 - T') - rm_3 + cm_3 \left(T' - T\right). \qquad (4)$$

Підстановка виразів (2) – (4) у рівняння теплового балансу (1) дає:

$$c_1 m_1 \left(T_0 - T_1\right) + Lm_1 + cm_1 \left(T - T_0\right) +$$
$$+ c_2 m_2 \left(T - T_1\right) + c_3 m_3 (T_2 - T') - rm_3 + cm_3 \left(T - T'\right) = 0.$$

Звідки

$$m_3 = \frac{m_1 \left(c_1 \left(T_0 - T_1\right) + L + c\left(T - T_0\right)\right) + c_2 m_2 \left(T - T_1\right)}{c_3 (T' - T_2) + r + c\left(T' - T\right)}.$$

$$m_3 = \frac{0,2 \cdot \left(2,09 \cdot 10^3 \cdot 10 + 33,5 \cdot 10^4 + 4,19 \cdot 10^3 \cdot 20\right) + 380 \cdot 0,1 \cdot 30}{2,2 \cdot 10^3 \cdot 50 + 2,26 \cdot 10^6 + 4,19 \cdot 10^3 \cdot 80} = 0,034 кг$$

Відповідь: $m_3 = 34$ г.

Приклад 11.2. Яку найменшу швидкість повинна мати свинцева куля, щоб при зіткненні зі сталевою плитою вона могла б цілком розплавитися, якщо на внутрішню енергію плити перетворюється 25% енергії, що виділяється при ударі? Температура кулі в момент удару дорівнює t_1=17°C. Температура плавлення свинцю t_2=327°C.

k = 0,25 T_1=390K T_2=600K c = 130Дж/(кг·К) L = 25кДж/кг	Розв'язання
v_0 - ?	

При зіткненні пулі з плитою відбувається необоротний процес переходу механічної енергії у внутрішню. Розглянемо систему «куля-плита» безпосередньо до і після зіткнення. Повна енергія системи в початковому стані W_1 дорівнює сумі внутрішньої енергії кулі U_1, внутрішньої енергії плити U_2, кінетичної енергії кулі W_{k1} та потенціальній енергії W_{p1} системи в зовнішньому гравітаційному полі Землі, тобто

$$W_1 = W_{k1} + W_{p1} + U_1 + U_2 \qquad (1).$$

Аналогічно, кінцева енергія системи $W_2 = W_{p2} + U_1' + U_2'$ (2). Згідно закону збереження енергії, за яким $W_1 = W_2$, з рівнянь (1) і (2) з урахуванням того, що потенціальна енергія системи за час зіткнення не змінюється ($W_{p1} = W_{p2}$), а кінетична енергія кулі після зіткнення $W_{k2} = 0$

отримуємо: $\left(U_1' - U_1\right) + \left(U_2' - U_2\right) = W_{k1}$ (3), де $W_{k1} = \frac{mv_0^2}{2}$ – кінетична енергія кулі перед зіткненням.

Згідно з умовою задачі $\Delta U_2 = U_2' - U_2 = kW_{k1}$ (4).

З виразів (3) і (4) знаходимо зміну внутрішньої енергії кулі:

$$\Delta U_1 = U_1' - U_1 = \left(1-k\right)W_{k1} = \left(1-k\right)\frac{mv_0^2}{2}. \qquad (5)$$

Енергія, яку отримує куля, витрачається на її нагрівання від температури T_1 до температури плавлення свинцю T_2 і подальше плавлення: $\Delta U_1 = m\left[c\left(T_2 - T_1\right) + L\right]$ (6), де c – питома теплоємність свинцю; L–питома теплота його плавлення. Тоді з рівнянь (5) і (6) отримуємо:

$$m\left[c\left(T_2 - T_1\right) + L\right] = \left(1-k\right)\frac{mv_0^2}{2}.$$

Звідки $v_0 = \sqrt{\frac{2c\left(T_2 - T_1\right) + L}{\left(1-k\right)}}$.

$$v_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 130\left(600 - 390\right) + 2{,}5 \cdot 10^4}{1 - 0{,}25}} = 326(\text{м/с})$$

$$\left[v_0\right] = \left(\frac{\text{Дж} \cdot \text{К}}{\text{кг} \cdot \text{К}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Відповідь: v_0=326 м/с.

Приклад 11.3. Припустимо, що для підтримки життя умовної людині необхідно витрачати потужність у середньому 120Вт. 1) Скільки кілокалорій на день потрібно споживати людині, щоб не вмерти? 2) На яку висоту h могла б піднятися людина за рахунок енергетичного еквівалента свого мінімального повсякденного раціону калорій, якщо на роботу перетворюється 10% енергії? Маса людини дорівнює 60кг.

P = 120Вт t = 24 год. m = 60кг k = 0,1 g=9,8м/с^2	Розв’язання
Q; h - ?	1) За добу людина витрачає енергію, яка дорівнює $W = P \cdot t$. t = 24·3600 с = 86 400с. W = 120 Вт · 8,64·10^4 с = 1,04·10^7 Дж. Еквівалентну кількість калорій, яку людина витрачає за добу, знаходимо за допомогою механічного еквіваленту теплоти I = 4,185 Дж/кал:

$$Q = \frac{W}{I} = \frac{1{,}04 \cdot 10^7\,\text{Дж}}{4{,}185\ \text{Дж / кал}} = 2{,}48 \cdot 10^6\ \text{кал} = 2480\ \text{ккал}.$$

2) Робота людини по підйому себе на висоту h дорівнює $A = mgh$. Згідно умови задачі $A = kW$. Звідки $h = \frac{kW}{mg}$.

$$h = \frac{0,1 \cdot 1,04 \cdot 10^7}{60 \cdot 9,8} = 1,77 \cdot 10^3 \text{ (м)}.$$

$$[h] = \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}^2} = \text{м}$$

Відповідь: Q=2480 ккал; h =1,77км.

Приклад 11.4. Знайти енергію W обертального руху молекул, які містяться у m=2 кг водню при температурі t=27°C.

m=2 кг M=$2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль T = 300К $i_{оберт.} = 2$ R = 8,31Дж/(моль·К) $W_{оберт.}$-?	Розв'язання Кількість молекул, які містяться у даній масі газу дорівнює $N = \nu N_A$, (1) де ν - кількість речовини; N_A – постійна Авогадро. У свою чергу, $\nu = \frac{m}{M}$, де M – молярна маса. Тоді $N = \frac{m}{M} N_A$. (2)

Оскільки молекула водню H_2 складається з двох атомів, між якими при кімнатній температурі здійснюється жорсткий зв'язок, кількість ступенів вільності для такої молекули i =5. З них 2 припадає на обертальний рух: $i_{оберт.}$=2. Середня кінетична енергія однієї молекули (9.2)

$$< \varepsilon_k > = \frac{i}{2} kT, \quad (3)$$

де k – стала Больцмана; T – термодинамічна температура.

Загальна енергія обертального руху всіх молекул

$$W = N \cdot \frac{i}{2} kT, \text{ або } W = \frac{mN_A}{M} \cdot \frac{i}{2} kT.$$

Оскільки $N_A \cdot k = R$, де R – універсальна газова стала, $W = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{M} RT$. (4)

$$W = \frac{2 \cdot 2 \cdot 8,31 \cdot 300}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = 2,49 \cdot 10^5 \text{ Дж}.$$

$$[W] = \frac{\text{кг} \cdot \text{Дж} / (\text{моль} \cdot \text{К}) \cdot \text{К}}{\text{кг} / \text{моль}} = \text{Дж}$$

Відповідь: W= $2,49 \cdot 10^5$ Дж.

Приклад 11.5. Знайти молярну теплоємність кисню C_V, якщо відомо, що степінь його дисоціації α = 0,020 (див. приклад 7.5).

ν = 1 моль α=0,020 i_1 = 3 i_2 = 5 R = 8,31Дж/(моль·К) C_V - ?	Розв'язання Степінь дисоціації α – відношення кількості молекул, що зазнали дисоціації до їх початкової кількості. При степені дисоціації α з початкової кількості молів ν газу утворюється $\nu_1 = 2\alpha\nu$ молів атомарного кисню (оксигену) та залишається $\nu_2 = (1-\alpha)\nu$ молів молекулярного кисню.

Загальна кількість молів у посудині, де знаходиться кисень, внаслідок дисоціації складає: $\nu' = 2\alpha\nu + (1-\alpha)\nu = (1+\alpha)\nu$. (1)

Молярна теплоємність може бути визначена як відношення теплоємності усього газу $C_{газ}$ до кількості його молів ν': $C_\nu = \frac{C_{газ}}{\nu'}$ (2). Теплоємність газу $C_{газ}$ виражаємо через молярні теплоємності одноатомного та двохатомного газів, які за формулою (11.7) дорівнюють $C_\nu = \frac{i}{2}R$ (з i_1 = 3 для атомарного кисню та i_2 = 5 для молекулярного кисню), та кількість їх молів: $C_{газ} = \frac{3}{2}R \cdot 2\alpha\nu + \frac{5}{2}R \cdot (1-\alpha)\nu = \frac{1}{2}(5+\alpha)R\nu$. (3)

Підстановка виразів (1) та (3) у формулу (2) дає:

$$C_\nu = \frac{\frac{1}{2}(5+\alpha)R\nu}{(1+\alpha)\nu} = \frac{(5+\alpha)R}{2(1+\alpha)}.$$

$$C_\nu = \frac{(5+0,02)8,31}{2(1+0,02)} = 20,45 \text{ Дж/(моль·К)}.$$

Відповідь: C_ν = 20,45 Дж/(моль·К).

Приклад 11.6. Вважаючи, що молярна теплоємність ідеального газу C_V при постійному об'ємі є відомою, вивести формулу для величини молярної теплоємності газу у процесі, який описує закон $p = \frac{a}{T}$.

Розв'язання

І варіант. За означенням (11.5) молярна теплоємність газу C дорівнює

$$C = \frac{Q}{\nu\Delta T},$$

де ΔT – зміна температури газу; ν – число молів; Q – кількість теплоти, підведеної до газу. Величину Q можна знайти з першого закону

термодинаміки (11.2): $Q = \Delta U + A$. Тут ΔU – зміна внутрішньої енергії газу, а A – робота, яка здійснена газом.

ΔU пов'язана з ізохоричною $(V = const)$ теплоємністю газу співвідношенням

$$\Delta U = \nu C \Delta T,$$

а робота може бути порахована як $A = \int_{V_1}^{V_2} pdV$, де V_1, V_2 – межи зміни об'єму газу при температурах T_1 і T_2 $(\Delta T = T_2 - T_1)$ відповідно.

Використовуючи рівняння стану ідеального газу $pV = \nu RT$ і заданий в умові задачі закон залежності тиску від температури $p = \frac{\alpha}{T}$, робимо заміну змінних під знаком інтегралу:

$$\Delta A = \int_{V_1}^{V_2} pdV = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\alpha}{T} \cdot \frac{2\nu RTdT}{\alpha} = 2\nu R\Delta T.$$

Остаточно отримуємо

$$Q = \nu C_V \Delta T + 2\nu R\Delta T = \nu\left(C_V + 2R\right)\Delta T.$$

Отже, $C = C_V + 2R$.

II варіант. Розглянемо ще один варіант рішення. Нехай в указаному процесі сталася мала зміна параметрів газу: температури $(T \Rightarrow T + \Delta T)$ і об'єму $(V \Rightarrow V + \Delta V)$. У відповідності з рівнянням Менделєєва – Клапейрона:

$$\Delta V = \frac{\nu R}{\alpha}\left[\left(T + \Delta T\right)^2 - T^2\right] = \frac{\nu R}{\alpha}\Delta T\left(2T + \Delta T\right).$$

Робота газу $A = p\Delta V$ (оскільки зміна параметрів мала, тобто $\Delta p << p$, то й перехід з одного стану в інший можна вважати ізобаричним)

$$C = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{Q}{\nu \Delta T} = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{\Delta U + A}{\nu \Delta T} = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{\nu C_V \Delta T + \nu R\Delta T\left(2 + \Delta T / T\right)}{\nu \Delta T} = C_V + 2R.$$

Приклад 11.7. Вуглекислий газ масою m=66г, який має температуру t=7°C, ізотермічно розширюється так, що його об'єм збільшується вдвічі. Яку роботу виконує при цьому газ?

$m = 66 \cdot 10^{-3}$ кг T=280K $V_2 / V_1 = 2$ $M(CO_2) = 44 \cdot 10^{-3}$ кг/моль R = 8,31Дж/(моль·K)	Розв'язання Роботу, яку виконує газ, знайдемо, скориставшись формулою (11.15): $A = \int_{V_1}^{V_2} pdV.$ (1)
A - ?	

Оскільки під час ізотермічного процесу тиск p змінюється, виразимо тиск через об'єм газу з рівняння Менделєєва – Клапейрона (8.6): $pV = \nu RT$, звідки

$$p=\frac{\nu RT}{V} \qquad (2)$$

Підставимо (2) у (1) і виконаємо інтегрування:

$$A=\int_{V_1}^{V_2}\frac{\nu RT}{V}dV=\nu RT\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V}=\nu RT\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right). \qquad (3)$$

Зважаючи на те , що ν = m/M, маємо

$$A=\frac{m}{M}RT\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right).$$

$$A=\frac{66\cdot10^{-3}\cdot8{,}31\cdot280}{44\cdot10^{-3}}\cdot\ln2=2{,}41\cdot10^{3}\text{ Дж}=2{,}41\text{ кДж}.$$

$$[A]=\frac{\text{кг}}{\text{кг/моль}}\cdot\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}\cdot\text{К}=\text{Дж}$$

Відповідь: A=2,41 кДж.

Приклад 11.8. При ізобаричному нагріванні m = 6г водню з початковою температурою $t_1 = 27^{o}C$, його об'єм зріс у два рази ($V_2 = 2V_1$). Знайти: 1)роботу A газу; 2) зміну внутрішньої енергії ΔU газу; 3) кількість теплоти Q, яку надано газу.

T_1=300К
$V_2 = 2V_1$
$m = 6\cdot10^{-3}$ кг
$M = 2\cdot10^{-3}$ кг/моль
R = 8,31Дж/(моль·К)

A; ΔU; Q - ?

Розв'язання

1). Робота газу при ізобаричному нагріванні (11.16):

$$A=p(V_2-V_1).$$

Скористаємося рівнянням Менделєєва – Клапейрона, записавши його двічі: для початкового і кінцевого станів.

$$PV_1=\frac{m}{M}RT_1 \qquad (1)$$

$$PV_2=\frac{m}{M}RT_2 \qquad (2)$$

З (2) віднімаємо (1): $P(V_2-V_1)=\frac{m}{M}R(T_2-T_1)$, або

$$A=\frac{m}{M}R(T_2-T_1). \qquad (3)$$

Різницю температур можна знайти із закону Гей-Люссака (8.3а):

при $P = const$ $\quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}$.

За умовою задачі $\frac{V_2}{V_1} = 2$, тому $\frac{T_2}{T_1} = 2$.

Тобто $T_2 = 2T_1 = 2 \cdot (27 + 233) = 600\,К$. Тоді $T_2 - T_1 = 600К - 300К = 300\,К$.

Робота газу $A = \frac{6 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} \cdot 8{,}31 \cdot 300 = 7{,}48 \cdot 10^3$ Дж =7,48 кДж.

2). Внутрішня енергія газу визначається за формулою (11.12).

$$U = \nu \frac{i}{2} RT,$$

Тоді зміна внутрішньої енергії $\quad \Delta U = \nu \frac{i}{2} R\Delta T,$ (4)

де i – кількість ступенів свободи; для водню H_2 (двохатомна молекула) i=5.

Обчислення: $\Delta U = \frac{6 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 8{,}31 \cdot (600 - 300)}{2 \cdot 10^{-3}} = 18{,}68 \cdot 10^3$ Дж = 18,68 кДж.

3) Згідно з першим законом термодинаміки (11.2)

$$Q = \Delta U + A$$

Тому $Q = 18{,}68 + 7{,}48 = 26{,}16$ кДж.

II спосіб обчислення теплоти Q. Надану газу при ізобарному нагріванні теплоту можна також визначити, виразивши її через молярну теплоємність газу C_p при постійному тиску: $Q = \nu C_p \Delta T$. (5)

Кількість молів газу $\nu = \frac{m}{M}$; молярна теплоємність $C_p = \frac{i+2}{2} R$.

Підстановка відповідних виразів у формулу (5) дає:

$$Q = \frac{m}{M} \cdot \frac{i+2}{2} R\Delta T = \frac{6 \cdot 10^{-3} \cdot 7 \cdot 8{,}31 \cdot (600 - 300)}{2 \cdot 10^{-3}} = 26{,}16 \cdot 10^3 Дж$$

Відповідь: A=7,48 кДж; ΔU=18,68 кДж; Q=26,16 кДж.

Приклад 11.9. У циліндрі під поршнем знаходиться 1 моль азоту при температурі $t_1 = 27^oC$. Азот починає адіабатично розширюватись, збільшивши свій об'єм у 5 разів, далі його ізотермічно стискають до початкового об'єму. Знайти 1) температуру азоту T_2 наприкінці адіабатичного розширення; 2) роботу A_1 при адіабатичному розширенні; 3) роботу A_2 при ізотермічному стисканні та повну роботу A, яку виконав газ. Побудувати p-V – діаграму процесу.

Розв’язання

T_1= 300К $V_2 = 5V_1$ ν = 1 моль R = 8,31Дж/(моль·К) i=5	1) Температура і об’єм газу при адіабатичному розширенні зв’язані рівнянням (11.19): $T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1}$. (1) Із рівняння адіабати (1) виражаємо T_2 :
T_2; A_1; A_2; A -?	$T_2 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$, (2)

де коефіцієнт Пуассона γ за формулою (11.10) дорівнює:

$$\gamma = \frac{i+2}{i} = \frac{5+2}{5} = 1{,}4 \quad \text{(для 2-атомного газу i=5).}$$

Підстановка значень у формулу (2) дає $T_2 = 300 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{1,4-1} = 300 \cdot 0{,}525 = 157\text{K}$

2) Робота A_1 при адіабатичному розширенні газу може бути обчислена за формулою (11.18):

$$A_1 = -\nu C_V \Delta T = -\nu \frac{i}{2} R\left(T_2 - T_1\right).$$

$$A_1 = -1 \cdot \frac{5}{2} \cdot 8{,}31 \cdot \left(157 - 300\right) = 2970 \text{ Дж.}$$

3) Роботу A_2 газу при ізотермічному поширенні надає формула (11.17):

$$A_2 = \nu R T_2 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right).$$

$$A_2 = 1 \cdot 8{,}31 \cdot 157 \cdot \ln\left(\frac{1}{5}\right) = -2100 \text{Дж.}$$

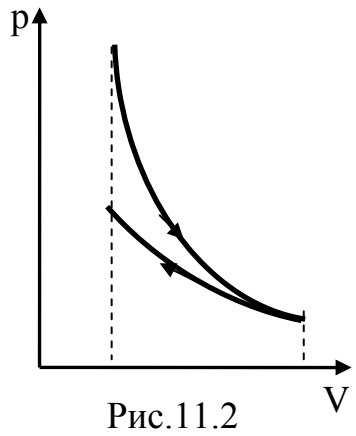


Рис.11.2

Знак ″ – ″ указує на те, що при стисканні газу робота виконується зовнішніми силами.

Сумарна робота $A = A_1 + A_2$.
A = 2,97 кДж – 2,10 кДж = 0,87 кДж.

Графік процесу зображений на рис. 11.2.

Відповідь: T_2= 157К; A_1= 2,97 кДж; A_2= – 2,10 кДж; A=0,87 кДж.

Приклад 11.10. Стан одного молю двохатомного ідеального газу змінюється за замкненим циклом, який складається з двох ізобарних та двох ізохорних процесів (рис.11.3). У стані 1 температура газу T_1 = 120К, у стані 3 температура газу T_3 = 480К. У станах 2 і 4 температура газу є

однаковою. 1) Визначити роботу газу за цикл; 2) зміну внутрішньої енергії та кількість теплоти, отриманої газом за цикл.

$T_1 = 120К$
$T_3 = 480К$
$T_2 = T_4 = T$
$N = 1моль$
$i = 5$

$A;\ \Delta U;\ Q$-?

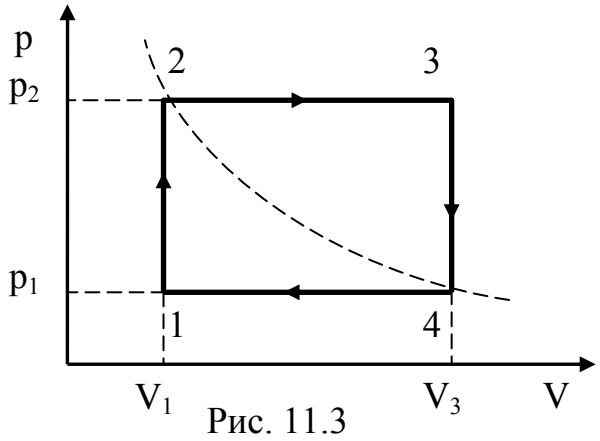


Рис. 11.3

Розв'язання

1) Робота газу за цикл дорівнює сумі робот на окремих ділянках:

$$A = A_{1\text{-}2} + A_{2\text{-}3} + A_{3\text{-}4} + A_{4\text{-}1}.$$

Процеси 1 – 2 і 3 – 4 є ізохоричними. Отже, на цих ділянках об'єм газу не змінюється і, відповідно, робота дорівнює нулю. При ізобаричному поширенні (на ділянці 2 – 3) тиск є постійним і робота газу

$$A_{2-3} = \int\limits_{2-3} pdV = p_2 \int\limits_{V_1}^{V_2} dV = p_2\left(V_3 - V_1\right). \qquad (1)$$

Ця величина дорівнює площі прямокутника під лінією процесу.
З урахуванням рівняння Менделєєва – Клапейрона $pV = \nu RT$ виразу (1) можна надати вигляду

$$A_{2-3} = \nu R\left(T_3 - T_2\right).$$

Аналогічно отримуємо формулу для роботи на ділянці 4 – 1.

$$A_{4-1} = p_1\left(V_1 - V_3\right) = \nu R\left(T_1 - T_4\right).$$

Оскільки $V_1 < V_3$, то отримане значення роботи $A_{4\text{-}1} < 0$. Робота також дорівнює площі прямокутника під лінією процесу, але з від'ємним знаком. Повна робота за цикл дорівнює площі прямокутника 1–2–3–4–1 або

$$A = \nu R(T_3 - T_2 + T_1 - T_4).$$

За умовою задачі $T_2 = T_4 = T$. Тоді

$$A = \nu R(T_3 - 2T + T_1). \qquad (2)$$

Температуру T виражаємо за допомогою рівняння стану ідеального газу Менделєєва – Клапейрона, записаного для станів 1, 2, 3 та 4:

$$p_1V_1 = \nu RT_1; \qquad (3)$$

$$p_2V_1 = \nu RT; \qquad (4)$$

$$p_2V_3 = \nu RT_3; \qquad (5)$$

$$p_1V_3 = \nu RT. \qquad (6)$$

З рівнянь (3) і (4) отримуємо $\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T}$; (7)

з рівнянь (6) і (5): $\frac{p_1}{p_2} = \frac{T}{T_3}$. (8)

Порівнюючи вирази (7) і (8), знаходимо $\frac{T_1}{T} = \frac{T}{T_3}$ або $T = \sqrt{T_1T_3}$.

Підстановка знайденого значення T у формулу (2) дає:

$$A = \nu R(T_3 - 2\sqrt{T_1T_3} + T_1) = \nu R(\sqrt{T_3} - \sqrt{T_1})^2. \qquad (9)$$

$$A = 1 \cdot 8{,}31 \cdot \left(\sqrt{480} - \sqrt{120}\right)^2 = 998\,(\text{Дж}).$$

2) Внутрішня енергія є функцією стану, тому її зміна за цикл дорівнює нулю:

$$\Delta U = U_1 - U_1 = 0.$$

3) На ділянці 1 – 2 газ нагрівається при постійному об'ємі. Тобто його внутрішня енергія змінюється тільки за рахунок отриманої кількості теплоти

$$\Delta U_{1-2} = Q_{1-2} = \nu C_V\left(T - T_1\right). \qquad (10)$$

На ділянці 2 – 3 процес нагрівання продовжується, зростає внутрішня енергія газу і, окрім того, газ виконує роботу. З урахуванням постійності тиску в процесі отримуємо:

$$Q_{2-3} = \Delta U_{2-3} + A_{2-3} = \nu C_p\left(T_3 - T\right). \qquad (11)$$

На ділянках 3 – 4 та 4 – 1, які є аналогічними ділянкам 1 – 2 та 2 – 3, процеси йдуть зі зменшенням температури, а робота здійснюється над газом, тому для цих ділянок $Q < 0$.

Таким чином, кількість теплоти, отриманої газом за цикл, згідно формулам (10), (11) з урахуванням виразів для молярній теплоємності ідеального газу

$$C_v = \frac{i}{2}R, \qquad C_p = \frac{i+2}{2}R,$$

(i = 5 – кількість ступенів вільності молекул двохатомного газу) дорівнює

$$Q_{\text{отрим.}} = \frac{\nu R}{2}\left(i\left(T - T_1\right) + \left(i+2\right)\left(T_3 - T\right)\right) = \frac{\nu R}{2}\left(i\left(T_3 - T_1\right) + 2\left(T_3 - T\right)\right).$$

Обчислення при $T = \sqrt{120 \cdot 480} = 240$ К дає:

$$Q_{\text{отрим.}} = \frac{1}{2} \cdot 8{,}31 \cdot \left(5\left(480 - 120\right) + 2\left(480 - 240\right)\right) = 9{,}47 \cdot 10^3\,\text{Дж}.$$

Відповідь: A = 998Дж; $\Delta U = = 0$; $Q_{\text{отрим.}} = 9{,}47$кДж.

Приклад 11.12. Один моль ідеального одноатомного газу бере участь у термодинамічному процесі, в якому його теплоємність змінюється за законом $C = R\left(\frac{T_0^2}{T^2}\right)$, де T_0=300 К. При якій температурі об'єм газу буде максимальним?

Розв'язання

$\nu = 1$ моль $C = R\left(\frac{T_0^2}{T^2}\right)$ $V=V_{max}$	У термодинамічному процесі, в якому бере участь газ, при малих змінах стану газу кількість наданої теплоти, внутрішня енергія і робота, що здійснюється газом, надаються відповідно виразами:
T_{Vmax}-?	

$$dQ = CdT = \frac{T_0^2}{T^2}RdT; \quad (1)$$

$$dU = \frac{3}{2}RdT; \quad (2)$$

$$dA = pdV = \frac{RT}{V}dV, \quad (3)$$

де dT – зміна температури газу; dV – зміна його об'єму. Коефіцієнт $\frac{3}{2}$ у виразі для dU ураховує одноатомний склад газу. Формули (1) – (3) записані з урахуванням того, що кількість газу $\nu = 1$ моль.

З урахуванням виразів (1) – (3) для газу з наданими за умовою властивостями перший закон термодинаміки набуває вигляду:

$$\frac{T_0^2}{T^2}RdT = \frac{3}{2}RdT + \frac{RT}{V}dV. \quad (4)$$

Поділивши обидві частини рівняння (4) на dT, знаходимо

$$\frac{dV}{dT} = \frac{V}{T}\left(\frac{T_0^2}{T^2} - \frac{3}{2}\right).$$

Екстремальне значення об'єму газу відповідатиме випадку, коли $\frac{dV}{dT} = 0$. Прирівнюючи праву частину останнього співвідношення нулю, знаходимо, що екстремальна температура газу дорівнює

$$T_{екстр} = \sqrt{\frac{2}{3}}T_0 \approx 245\,К.$$

Замінивши в виразі для $\frac{dV}{dt}$ T_0 на $T_{екстр}$, переконуємося в тому, що при цій температурі, об'єм газу дійсно є максимальним, оскільки при $T < T_{екстр}$ $\frac{dV}{dT} > 0$, а при $T > T_{екстр}$ $\frac{dV}{dT} < 0$.

Зауваження. На питання завдання можливо відповісти в результаті декілька спрощеного розгляду: якщо згідно з умовами задачі в процесі при деякій температурі об'єм газу досягає свого максимуму, то в цій точці $\frac{dV}{dT}=0$, а отже, в її околицях процес співпадає з ізохоричним, тобто теплоємність газу співпадає з теплоємністю в ізохоричному процесі

$$R\left(\frac{T_0}{T_{екстр}}\right)^2=\frac{3}{2}R \Rightarrow T_{екстр}=\sqrt{\frac{2}{3}}T_0.$$

Задачі для самостійного розв'язування

11.1. Паровий котел містить 40м^3 води при температурі 225°С. Яку кількість води при 9°С було додано, якщо встановилась загальна температура 200°С? Зміною густини води при підвищенні температури знехтувати.

11.2. Стальне свердло масою 0,090кг, нагріте при закалюванні до 840°С, занурили в сосуд з машинним маслом при 20°С. Яку кількість масла слід взяти, щоб його кінцева температура не перевищувала 70°С?

11.3. Для визначення температури печі, нагрітий у ній стальний болт масою 0,30кг, кинули у мідний сосуд масою 0,20кг з водою при температурі 15°С. Температура води піднялась до 32°С. Маса води 1,27кг. Обчислити температуру печі.

11.4. В батарею водяного опалення вода надходить при температурі 80°С по трубі перерізом 500 мм^2 зі швидкістю 1,2 см/с, а виходить з батареї, маючи температуру 25°С. Скільки тепла отримало приміщення, що обігрівається, протягом доби?

11.5. Вода надходить у радіатори водяного опалення при 341 К, а виходить з них при 313К. До якої температури нагріється повітря в кімнаті $6\times5\times3\left(м^3\right)$, якщо початкова температура повітря в кімнаті 279К, а через радіатори пройде 40л води? Втрати тепла через стіни, вікна і підлогу становлять 50%.

11.6. Наскільки нагріється при штамповці кусок сталі масою 1,5кг від удару молота масою 400кг, якщо швидкість молота в момент удару 7,0м/с, а на нагрівання сталі витрачається 60% енергії молота?

11.7. Трамвайний вагон масою 12,5т, маючий швидкість 28,8км/год., гальмує та зупиняється. Наскільки нагріються його 8 чавунних гальмівних колодок, якщо маса кожної колодки 9,0кг та на їх нагрівання витрачається 60% кінетичної енергії вагону?

11.8. Яку кількість алюмінію можна нагріти від 283К до температури плавлення у плавильній печі з ККД, яка дорівнює 26%, якщо спалити 25кг нафти?

11.9. Стіни квартири, що виходять на вулицю, мають загальну площу 45м^2, товщину 0,06м, коефіцієнт теплопровідності 0,80Вт/(м·К) (цегла звичайна). Температура всередині квартири 295К, зовні – 268К. Яку кількість дров необхідно спалити, щоб підтримувати указану різницю температур незмінною протягом доби? ККД печі дорівнює 40%, утрата тепла через стіни становить 3/4 усіх теплових утрат.

11.10. На яку відстань вистачить місткості паливного баку автомобіля «Москвич-412» (46л), якщо швидкість руху дорівнює 85км/год., ККД двигуна – 25%, а потужність, що розвивається, в середньому складає 35% максимальної потужності (55кВт)?

11.11. Двигун реактивного літака з ККД 20% при польоті зі швидкістю 1800км/год. розвиває силу тяги 88,2кН. Знайти витрату керосину за одну годину польоту і потужність, що розвиває двигун.

11.12. Визначити для водню питому теплоємність при постійному об'ємі c_v і питому теплоємність c_p при постійному тиску.

11.13. Різниця питомих теплоємностей деякого двоатомного газу $c_p - c_v = 346$ Дж/(кг·К). Знайти молярну масу М цього газу.

11.14. Визначити молярну масу М двоатомного газу, якщо його питомі теплоємності c_v = 649 Дж/(кг·К) і c_p = 912 Дж/(кг·К).

11.15. Знайти показник γ адіабати для кисню.

11.16. Визначити молярні теплоємності C_v і C_p газу, якщо відомо, що його питомі теплоємності c_v = 866 Дж/(кг·К) і c_p = 1212 Дж/(кг·К).

11.17. Знайти питому теплоємність c_v і c_p , а також коефіцієнт Пуассона γ для вуглекислого газу (CO_2). Зв'язок між атомами вважати жорстким.

11.18. Густина деякого двоатомного газу при нормальних умовах дорівнює ρ = 0,088кг/м^3. Визначити його питомі теплоємності c_v і c_p.

11.19. Коефіцієнт Пуассона для газу γ=1,4, а молярна маса цього газу М=24·10^{-3}кг/моль. Знайти питомі теплоємності c_v і c_p газу.

11.20. Визначити теплоємність С двоатомного газу при постійному тиску, якщо при температурі t = 27^{0}С і тиску Р = 750мм рт.ст. він займає об'єм V = 1л.

11.21. Визначити питомі теплоємності c_v і c_p для суміші, яка складається з 85% кисню (O_2) і 15% озону (O_3). Зв'язок між атомами вважати жорстким.

11.22. У закритому балоні об'ємом V = 10л міститься m = 12г гелію при температурі t = 7^{0}С. Після нагрівання тиск у балоні збільшився до значення Р=1·10^{5}мм рт. ст. Яку кількість теплоти Q надано газу?

11.23. Яку кількість тепла Q треба надати m = 14г азоту, щоб підвищити його температуру на ΔT = 20К при постійному тиску?

11.24. У закритій посудині об'ємом V = 5л міститься повітря при нормальних умовах. Яку кількість тепла Q треба надати газу, щоб підвищити його температуру вдвічі? Повітря вважати двоатомним газом.

11.25. Яку масу m азоту можна нагріти від температури $t_1=17^0C$ до температури $t_2=27^0C$ в умовах постійного тиску, якщо надати йому кількість теплоти Q = 291Дж.

11.26. У закритій посудині міститься m_1 = 24г азоту і m_2 = 80г аргону. Знайти зміну внутрішньої енергії ΔU суміші при нагріванні від температури $t_1 = 20^0C$ до $t_2 = 50^0C$.

11.27. Кисень масою m = 48г який має температуру $t=27^0C$, нагріли при постійному тиску P так, що його об'єм V збільшується вдвічі . Визначити : 1) роботу A, яку виконав газ ; 2) зміну внутрішньої енергії ΔU; 3) кількість теплоти Q, яку отримав газ.

11.28. Гелій масою m = 8г міститься у закритій посудині при температурі $t=27^0C$. Яку кількість теплоти Q треба надати гелію, щоб збільшити його середньоквадратичну швидкість $v_{кв}$ удвічі? У скільки разів при цьому збільшиться температура газу?

11.29. При ізотермічному розширенні m = 12г кисню, який має температуру $t = 27^0C$, його об'єм збільшився вдвічі . Знайти роботу, яку виконав газ.

11.30. m = 2кг азоту стискають адіабатично, внаслідок чого його температура збільшується від $t_1 =17^0C$ до $t_2 =147^0C$. Визначити роботу A, яку виконує азот у цьому процесі.

11.31. При адіабатичному розширенні двох кіломолів ($\nu=2\cdot10^3$моль) двоатомний газ виконав роботу A = 8,31кДж. На скільки зменшилась при цьому температура T газу?

11.32. Внаслідок адіабатичного стискання m = 1кг кисню нагрівається від $t_1 = 10^0C$ до $t_2 = 60^0C$. Визначити збільшення внутрішньої енергії газу ΔU .

11.33. Яку роботу виконує $m = 6$ кг водню, поширюючись при ізобарному нагріванні від $t_1 = 5\,°C$ до $t_2 = 155\,°C$?

11.34. 1 моль одноатомного ідеального газу знаходиться у закритій посудині при температурі t = 27°C. Яку кількість теплоти слід надати газу, щоб його тиск збільшився в n = 3 рази.

11.35. У теплоізольованій посудині в початковий момент часу знаходиться одноатомний ідеальний газ при температурі T_0 = 300K і залізо масою $m = 0,2$ кг при температурі T = 500K. Початковий тиск газу $p_0 = 10^5$ Па, його об'єм $V = 1000\,см^3$. Питома теплоємність заліза $C = 450$ Дж/(кг·К). Визначити тиск газу в кінцевому стані.

11.36. При ізобаричному нагріванні газу від $t_1 = 20\,°C$ до $t_2 = 50\,°C$ газ виконує роботу $A = 2,5$ кДж. Знайти кількість молекул N газу, що беруть участь у процесі.

11.37. Визначити роботу ізобарного поширення $\nu = 2$ моль ідеального газу, якщо відомо, що концентрація молекул у кінцевому стані в $q = 2$ рази менша за початкову при температурі $T_1 = 300$ К.

11.38. Деякий газ поширюється від об'єму $V_1 = 1$ л до об'єму $V_2 = 11$ л. Тиск при цьому змінюється за законом $p = a \cdot V$, де $a = 4 \cdot 10^3$ Па/м^3. Знайти роботу газу.

11.39. Газ розширюється від об'єму $V_1 = 3$ м^3 до об'єму $V_2 = 5$ м^3 таким способом, що його тиск змінюється за законом $p = a - b \cdot V$, де $a = 3{,}5 \cdot 10^4$ Па і $b = 0{,}5 \cdot 10^4$ Па/м^3. Знайти роботу газу в цьому процесі.

11.40. У теплоізольованому циліндрі під теплонепроникним поршнем знаходиться одноатомний ідеальний газ. Початкові параметри газу: тиск $p_0 = 10^5$ Па; об'єм $V_0 = 3$ дм^3; температура $T_0 = 300$ К. При стисканні газу над ним виконали роботу $A = 90$ Дж. Знайти температуру газу після стискання.

11.41. Наскільки збільшиться внутрішня енергія одноатомного ідеального газу в процесі ізобарного поширення, якщо газу надали при цьому кількість теплоти $Q = 30$ кДж?

11.42. Водень масою $m = 0{,}5$ кг бере участь у процесі, під час якого спочатку його тиск ізохорно зменшують у $n = 5$ разів, а потім його об'єм ізобарно збільшують так, що початкова і кінцева температури газу в процесі співпадають. Яку роботу здійснив газ у процесі, якщо його початкова температура $T_0 = 500$ К?

11.43. Ідеальний двохатомний газ стискають до об'єму в n =5 разів меншого за початковий а) ізотермічно; б) адіабатично. 1) У якому з процесів і у скільки разів робота, яка виконується при стисканні, буде більшою? 1) Внаслідок якого з процесів внутрішня енергія газу зросте і у скільки разів?

11.44. Вважаючи, що молярна теплоємність ідеального газу C_V при постійному об'ємі є відомою, вивести формулу для величини молярної теплоємності газу у процесі, який описує закон: а) $V = \frac{\alpha}{T}$; б) $V = \alpha T^2$; в) $p = \alpha V$.

11.45. Один моль ідеального одноатомного газу приймає участь у термодинамічному процесі, в якому його теплоємність змінюється за законом $C = R\left(\frac{T_0}{T}\right)$, де T_0=400 К. При якій температурі тиск газу буде мінімальним?

11.46. Один моль ідеального одноатомного газу приймає участь у термодинамічному процесі, в якому його теплоємність змінюється за законом $C = R\left(\frac{T_0^2}{T^2}\right)$, де T_0=300 К. При якій температурі тиск газу буде максимальним?

11.47. Один моль газу N_2, який займав при атмосферному тиску об'єм V_1=22,4л, адіабатично стискається до об'єму $V_2 = \frac{V_1}{2}$, а потім ізотермічно поширюється до початкового об'єму. Побудувати графік процесу. Обчислити:
1) p_2 і T_2;
2) роботу A_1 при адіабатичному стисканні;
3) роботу A_2 при ізотермічному розширенні та повну роботу A, яку виконав газ;
4) кінцеву температуру T_3.

11.48.1 – 11.48.25.* Ідеальний газ здійснює цикл a – b – c – d – a, що складається з послідовних процесів, указаних в таблиці 5.1 у відповідності з номером варіанту. Побудувати цикл у координатах p –V і визначити для одного з процесів величину, яка указана в останньому стовпчику таблиці. Дано: маса газу m = 1г, p_1 = 0,2МПа, p_2 = 0,1 МПа, p_3 = 0,15 МПа, V_1=1 л, V_2 = 2 л.

Для усіх ділянок циклу укажіть знак зміни внутрішньої енергії і визначте: отримує чи віддає газ тепло; чи здійснює газ роботу, чи робота здійснюється над газом.

Примітки: 1) символи d = a означають відсутність процесу $d \to a$, тобто точки d і a співпадають; 2) символи типу p=const; T=const означають відповідні ізопроцеси; 3) запис Q = 0 означає адіабатний процес.

Таблиця 11.1. Завдання до задач 2.179.1 – 2.179.25.

Номер варіанту	Газ	Параметри	Вид процесу				Знайти
			$a \to b$	$b \to c$	$c \to d$	$d \to a$	
1	2	3	4	5	6	7	8
1	N_2O		p= const	T= const	p= const	Q=0	$A_{d\to a}$
2	CO_2	$V_a = V_1,\ V_b = V_2,$ $V_c = V_1,\ p_b = p_2$	T= const	p= const	V= const	d=a	$Q_{c\to d}$
3	O_2	$V_b = V_2, p_c = p_2,$ $p_a = p_1$	p= const	V= const	T= const	d=a	$Q_{a\to b}$

1	2	3	4	5	6	7	8
4	C_2H_4	$V_a = V_1,\ V_b = V_2,$ $p_a = p_1,\ p_c = p_2$	p= const	T= const	p= const	T= const	$Q_{c\to d}$
5	H_2O	$V_a = V_1,\ V_b = V_2,$ $p_a = p_1,\ p_c = p_2$	p= const	Q=0	p= const	Q=0	$A_{b\to c}$
.6	N_2	$V_b = V_2,\ V_d = V_1,$ $p_a = p_1,\ p_d = p_2$	T= const	V= const	T= const	V= const	$Q_{b\to c}$
7	NO	$V_c = V_1,\ p_b = p_2,$ $p_a = p_1$	Q=0	T= const	V= const	d=a	$A_{a\to b}$
.8	CH_4	$V_b = V_2,\ V_d = V_1,$ $p_b = p_1,\ p_c = p_2$	Q=0	V= const	Q=0	V= const	$Q_{b\to c}$
.9	He	$V_b = V_2,\ p_b = p_2,$ $p_a = p_1$	T= const	V= const	Q=0	d=a	$A_{c\to d}$
10	H_2	$V_a = V_1,\ V_b = V_2,$ $p_b = p_2$	T= const	p= const	Q=0	d=a	$Q_{b\to c}$
11	H_2O	$V_a = V_1,\ V_b = V_2,$ $p_a = p_1$	p= const	Q=0	T= const	d=a	$A_{b\to c}$
12	C	$V_c = V_1,\ V_b = V_2,$ $p_b = p_2$	Q=0	p= const	V= const	d=a	$A_{a\to b}$
13	CO_2	$V_a = V_1,\ V_b = V_2,$ $p_a = p_1$	p= const	V= const	Q=0	d=a	$Q_{b\to c}$
14	H_2O	$V_a = V_1,\ V_b = V_2,$	p= const	Q=0	p= const	T= const	$Q_{c\to d}$

1	2	3	4	5	6	7	8
.15	CH_4	$V_b = V_2,\ V_d = V_1,$	Q=0	V= const	T= const	V= const	$Q_{d\to a}$
16	NO	$V_b = V_2,\ V_d = V_1,$	T= const	V= const	Q=0	V= const	$A_{c\to d}$
17	NH_3	$V_b = V_2,\ V_d = V_1,$	p= const	T= const	p= const	V= const	$Q_{c\to d}$
18	H_2	$V_b = V_2,\ V_d = V_1,$	T= const	V= const	p= const	V= const	$Q_{b\to c}$
19	Ar	$V_a = V_1,\ V_b = V_2,$	p= const	V= const	p= const	Q=0	$A_{d\to a}$
20	C_2H_6	$V_d = V_1,\ V_b = V_2,$	p= const	Q=0	p= const	V= const	$Q_{d\to a}$
21	H_2O	$V_d = V_1,\ V_b = V_2,$	Q=0	V= const	p= const	V= const	$A_{a\to b}$
22	O_2	$V_a = V_1,\ V_b = V_2,$	p= const	V= const	p= const	T= const	$Q_{b\to c}$
23	C_2H_6	$V_a = V_1,\ V_b = V_2,$	p= const	V= const	Q=0	V= const	$A_{c\to d}$
24	NH_3	$V_d = V_1,\ V_b = V_2,$	p= const	V= const	Q=0	V= const	$Q_{b\to c}$
25	Ne	$V_d = V_1,\ V_b = V_2,$	p= const	V= const	T= const	V= const	$Q_{c\to d}$

Тестові завдання.

Вибрати вірну відповідь.

1. До внутрішньої енергії ідеального газу входить
   1. потенціальна енергія взаємодії молекул
   2. потенціальна енергія газу в зовнішньому потенціальному полі
   3. кінетична енергія руху посудини, в яку поміщений газ
   4. кінетична енергія хаотичного руху молекул газу

2. Внутрішня енергія ідеального газу залишається постійною під час процесу

   1. адіабатного 2. ізотермічного 3. ізохорного 4. ізобарного

3. Внутрішня енергія ідеального газу зменшується при:
   1. адіабатному розширенні 2. ізохорному нагріванні
   3. ізотермічному стисканні 4 ізобарному поширенні

4. Найменше значення внутрішньої енергії при однаковій температурі має 1 моль
   1. гелію (He) 2. азоту (N_2)
   3. водяної пари (H_2O) 4. кисню (O_2)
   5. водню (H_2)

(Гази вважати ідеальними)

5. Найбільше значення внутрішньої енергії при однаковій температурі має 1 моль
   1. гелію (He) 2. азоту (N_2)
   3. водяної пари (H_2O) 4. кисню (O_2)
   4. водню (H_2)

(Гази вважати ідеальними.)

6. Найменшу молярну теплоємність C_V має
   1. водень (H_2) 4. аргон (Ar)
   2.кисень (O_2) 5. водяна пара (H_2O)
   3. діоксид карбону (CO_2)

7. Молярна теплоємність одноатомного газу, виміряна при постійному об'ємі C_V, визначається за формулою

   1. $C_V=\frac{3}{2}R$ 2. $C_V=\frac{5}{2}R$ 3. $C_V=3R$ 4. $C_V=\frac{7}{2}R$

8. При наданні ідеальному газу тієї самої кількості теплоти найбільше підвищення температури ΔT досягається під час процесу
   1. адіабатного 2. ізотермічного
   3. ізохорного 4. ізобарного

9. Під час адіабатного розширення газу його температура:
   1. збільшується 2. зменшується
   3. не змінюється 4. зміна залежить від зовнішніх умов.

10. Рівняння адіабати виражає формула

    1. $PV=const$ 2. $PV=\frac{m}{M}RT$ 3. $PV=\frac{2}{3}W_k$ 4. $PV^{\gamma}=const$

11. Температура ідеального газу підвищується під час
    1. ізотермічного розширення 3. адіабатного стискання
    2. ізобарного стискання 4. адіабатного розширення

12. Найбільш повне перетворення отриманої газом теплоти в роботу відбувається при процесі
    1. адіабатному 3. ізохорному
    2. ізотермічному 4. ізобарному

13. Газ поширюється вдвічі. Робота, яку виконує газ, а) найменша; б) найбільша, якщо поширення

1. адіабатне 2. ізотермічне
3. ізобарне 4. характер процесу не вплине на величину роботи

14. При стисканні газу його об'єм зменшився удвічі. Робота, яка виконується зовнішніми силами а) найменша; б) найбільша, якщо процес стискання

1. ізотермічний 2. ізобарний
3. адіабатний 4. величина роботи не залежить від процесу

15. Робота ідеального газу дорівнює нулю при процесі

1. адіабатному 2. ізохорному
3. ізотермічному 4. ізобарному

16. Якщо кількість теплоти, яку отримав ідеальний газ, чисельно дорівнює зміні його внутрішньої енергії, то газ здійснив

1. ізотермічний процес 4. адіабатний процес
2. ізобарний процес 5. такий процес неможливий
3. ізохорний процес

17. Якщо робота, яку здійснив ідеальний газ без теплообміну з оточуючими тілами, чисельно дорівнює збільшенню його внутрішньої енергії, то газ здійснив

1. ізотермічний процес 2. адіабатний процес
3. ізобарний процес 4. ізохорний процес

18. Ідеальному газу надали 10 кДж теплоти. При цьому його внутрішня енергія збільшилась на 16 кДж. Робота, яку виконав газ, дорівнює:

1. 6 кДж 2.10 кДж
3. 26 кДж 4. – 6 кДж

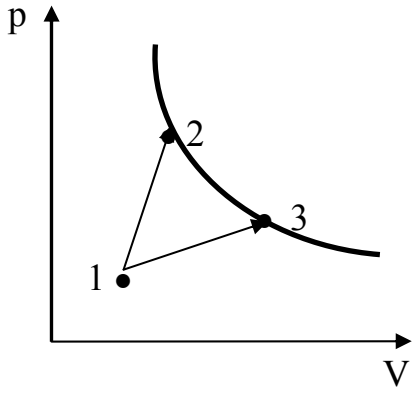
19. При ізобарному нагріванні на ту саму температуру однакових мас водню і кисню відношення роботи водню A_1 до роботи кисню A_2 дорівнює

1. $\frac{A_1}{A_2}=1$ 2. $\frac{A_1}{A_2}=4$ 3. $\frac{A_1}{A_2}=16$ 4. $\frac{A_1}{A_2}=\frac{1}{4}$ 5. $\frac{A_1}{A_2}=\frac{1}{16}$

20. У скільки разів кількість теплоти, яка витрачається на нагрівання газу при постійному тиску, більша роботи, яку виконую газ внаслідок свого розширення в процесі нагріву? (C_p – молярна теплоємність газу при постійному тиску.)

1. $\frac{C_p}{R}$ 2. $\frac{2C_p}{R}$ 3. $\frac{C_p}{2R}$ 4. $\frac{R}{C_p}$ 5. $\frac{2R}{C_p}$

21. Газ нагрівають двічі з того самого початкового стану (1) до однакової кінцевої температури (точки 2 і 3 лежать на одній ізотермі). У якому з процесів газу надали більшу кількість теплоти?



1. 1 – 2
2. 1 – 3
3.однакову
4. відповідь залежить від різниці тисків $p_2 - p_3$
5. відповідь залежить від різниці об'ємів $V_2 - V_3$

22. У деякому процесі тиск і об'єм газу змінюються за законом $pV^3 = const$. Якщо об'єм газу збільшиться у 2 рази, то його внутрішня енергія зменшиться у

1. 1,5 рази 2. 2 рази 3. 4 рази 4. 6 разів 5. 8 разів

23. Якщо при охолодженні 3 кг речовини на 2 К виділилось 2340 Дж теплоти, то питома теплоємність речовини дорівнює

1. 347 Дж/кг 2. 390 Дж/кг 3.293 Дж/кг 4. 3510 Дж/кг 5.1560Дж/кг

Установити відповідність:

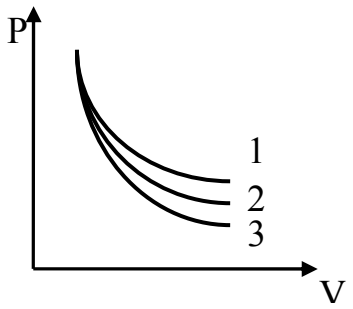
24.

Газ	**Кількість ступенів вільності *i* молекули при кімнатних температурах**
1. одноатомний газ	А. 5
2. двохатомний газ	Б. 6
3. багатоатомний газ	В. 3

25.

Процес	**Формула, за якою обчислюється робота газу в процесі:**
1. ізотермічний	А. $A=P(V_2-V_1)$
2. адіабатний	Б. $A=0$
3. ізохорний	В. $A=\nu RT\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$
4. ізобарний	Г. $A=\nu C_V(T_1-T_2)$

26. На рисунку показаний хід трьох адіабат для газів з різною кількістю атомів у молекулі.



Кількість молекул	**Номер кривої**
1.одноатомний газ	А. 1
2.двохатомний газ	Б. 2
3. багатоатомний газ	В. 3

27. Рівняння будь якого процесу у газі можна записати у вигляді $PV^n = const$. Показник політропи n визначає характер процесу.

процес	**показник**
1. ізобарний	А. n=1
2. ізотермічний	Б. n=0
3. адіабатний	В. $n=\pm\infty$
4.ізохорний	Г. n=Cp/Cv

11.2. Другий закон термодинаміки. Ентропія системи

Тема: Другий закон термодинаміки. Теплові машини та їх ККД. Поняття ентропії у термодинаміці. Теорема Нернста. Зміна ентропії в різних процесах. Термодинамічна ймовірність стану. Поняття ентропії у статистичній фізиці.

● Перший закон термодинаміки, закон збереження і перетворення енергії, дає кількісну і, в той же час, якісну характеристику перетворення енергії. Однак, перший закон термодинаміки не указує напряму процесів і не має ніяких обмежень в цьому відношенні. Навіть ділення процесів на прямі та зворотні не є характерним для І-го начала термодинаміки, бо воно не розглядає особливих, переважних напрямів процесів у природі і техніці. Так, перший закон термодинаміки не розрізняє перетворення роботи у тепло $(A \to Q)$ і теплоти в роботу $(Q \to A)$. Хоча кількісні співвідношення в обох перетвореннях відповідають першому закону термодинаміки, між цими перетвореннями існує суттєва різниця. Перетворення роботи в тепло – перетворення енергії, яке відбувається природним шляхом. Перетворення теплоти в роботу здійснюється при виконанні певних умов. Про ці умови і говориться в другому законі термодинаміки. В цьому сенсі другий закон термодинаміки є необхідним доповненням до першого закону.

● Усі природні процеси, які відбуваються з макроскопічними тілами, свідчать про протікання їх в одному напрямку:

- теплота переходить від гарячого тіла до холодного, але ніколи не переходить самочинно в оберненому напрямі – від холодного тіла до гарячого;
- гази легко змішуються, газ завжди прагне зайняти найбільший об’єм, два компоненти легко змішуються у розчині, але ніколи не розділяються самочинно.

Тобто, самочинні процеси у реальності, що оточує нас, йдуть у напрямі переходу системи від станів менш ймовірних до більш ймовірних станів. Найбільш ймовірним станом є такий, при якому ізольована система, яка представлена самій собі, знаходиться у повній рівновазі. Повна рівновага означає відсутність умов, які характеризують напрям, тобто відсутність у системі будь-якого процесу: відсутня різниця температур, тиску, концентрацій.

Отже, в ізольованій системі всі самочинні природні процеси відбуваються у напряму досягнення системою більш ймовірних станів. Такі процеси протікають тільки в одному напрямі: система не може повернутися у початковий стан за допомогою тих самих процесів.

Таким чином, необоротний характер усіх природних процесів є самим загальним положенням другого закону термодинаміки.

●Найбільш загальна суть II-го закону термодинаміки:

1. Не всі процеси, які задовольняють першому закону термодинаміки, протікають у природі самочинно. Є процеси з перетвореннями енергії $(Q \to A)$, які самочинно йти не можуть.
2. Усі реальні процеси протікають у певному напрямку – напрямку досягнення рівноваги системи, як найбільш ймовірного стану.
3. Процеси йдуть до установлення рівноваги системи, тобто моменту вирівнювання інтенсивних властивостей системи (температури, тиску, концентрацій).

● Мірою імовірності реалізації деякого макроскопічного стану системи при заданих зовнішніх умовах є **ентропія** S, яка в статистичній фізиці визначається як

$$S = k \ln \Omega, \qquad (11.32)$$

де Ω – **статистична вага** (**термодинамічна ймовірність**) стану, або кількість мікроскопічних станів, шляхом яких може бути реалізований даний макроскопічний стан системи; k – стала Больцмана.

Статистичну вагу і ентропію системи, яка складається з N підсистем, визначають за формулами

$$\Omega = \Omega_1 \Omega_2 ... \Omega_3, \qquad (11.33)$$

$$S = S_1 + S_2 + ... + S_3 \qquad (11.34)$$

Згідно одного з формулювань другого закону термодинаміки **ентропія ізольованої системи не зменшується – вона зростає при необоротному процесі і залишається незмінною у випадку оборотних процесів.**

Властивості ентропії:

- ентропія є функцією стану системи;
- ентропія замкненої системи не змінюється при оборотному процесі і зростає, якщо процес є необоротним;
- у стані рівноваги системи ентропія максимальна;
- ентропія системи – це кількісна міра невпорядкованості стану системи.

● Стосовно теплового двигуна II закон термодинаміки дає відповідь на питання, за яких умов можливо перетворення теплоти в роботу, яка частина теплоти в тепловому двигуні перетворюється в роботу і т. ін., Існує декілька еквівалентних формулювань другого закону термодинаміки:

1) **Неможливий процес, єдиним результатом якого є виконання роботи за рахунок охолодження одного тіла.** Тобто неможливе створення вічного двигуна другого роду – такого періодично діючого двигуна, який би отримував теплоту від одного резервуара і повністю перетворював його на роботу (У.Томсон – М.Планк).

2) Інакше (стосовно холодильних машин):

неможливий процес, єдиним кінцевим результатом якого був би перехід теплоти від менш нагрітого тіла до більш нагрітого (Р.Клаузіус)**.**

Теплова машина, у тому числі тепловий двигун (паровий, внутрішнього згорання, газова турбіна, …) – система, в основі роботи якої лежить цикл, при здійсненні якого, робоче тіло переходить у первинний стан.

Можливі три схеми термодинамічних циклів.

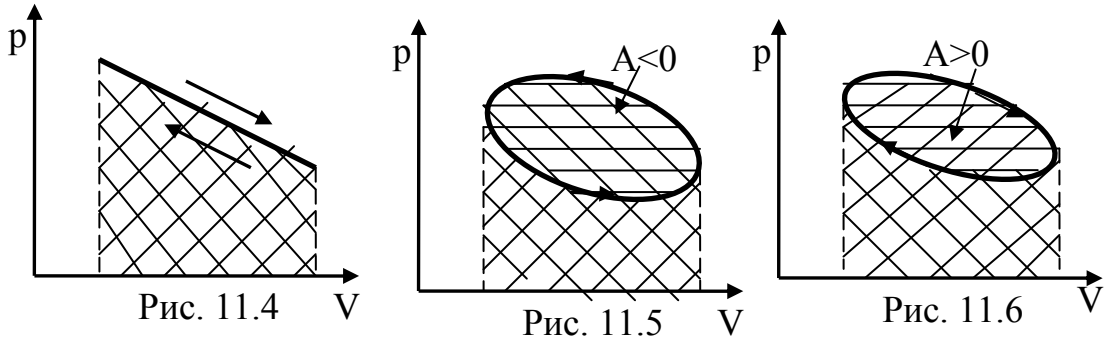


Рис. 11.4 Рис. 11.5 Рис. 11.6

1. Лінія стиснення йде тим самим процесом, що й лінія розширення (рис.11.4): $A_{роз.}$ = площі /// – позитивна робота розширення; $A_{ст.}$= площі\\\ – негативна робота стискання. Повна робота за цикл дорівнює нулю.

2. Лінія стиснення йде вище лінії розширення (рис.11.5) (схема оберненого термодинамічного циклу; лежить в основі роботи холодильника): $A_{роз.}$ = площі /// – позитивна робота розширення; $A_{ст.}$=площі\\\ – негативна робота стискання. Повна робота за цикл буде від'ємною $A= (A_{роз.}–A_{ст.})<0$ $(\equiv)$.

3. Лінія стиснення йде нижче лінії розширення (рис.11.6) (схема прямого термодинамічного циклу; лежить в основі роботи теплового двигуна): $A_{роз.}$ = площі /// – позитивна робота розширення; $A_{ст.}$= площі\\\ – негативна робота стискання. Повна робота за цикл буде додатною $A=(A_{роз.}–A_{ст.})>0$ $(\equiv)$.

Для виконання останньої умови необхідно, щоб тому самому об'єму при розширенні відповідав більший тиск, ніж при стисканні. Для цього необхідно робочому тілу в процесі розширення надавати теплоту (Q_1) і відбирати теплоту (Q_2) при стисканні.

Отже, тепловий двигун може безперервно працювати лише при наявності двох теплових джерел: нагрівника, від якого робоче тіло отримує теплоту, і холодильника, якому робоче тіло віддає теплоту, не перетворену в роботу. В будь-якому тепловому двигуні тепло Q_1 ніколи не перетворюється повністю на роботу А двигуна. Завжди $Q_1 = Q_2 + A$.

Термодинамічний коефіцієнт корисної дії (ККД) теплової машини

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \qquad (11.35)$$

де Q_1 – теплота, яку отримало робоче тіло машини за один цикл;

Q_2 – теплота, яку робоче тіло віддало за цикл;

$A = Q_1 - Q_2$ – корисна робота, яку виконало робоче тіло за цикл.

У реальних теплових машинах ККД обмежений нерівністю Карно

$$\eta \le 1 - \frac{T_1}{T_2}, \qquad (11.36)$$

де T_1 – температура нагрівника, T_2 – температура холодильника, тобто максимальна і мінімальна температури робочої речовини за цикл.

Рівність в формулі (11.36) досягається тільки в циклі Карно (оборотному циклі, який складається з двох ізотермічних і двох адіабатичних процесів (рис.11.7)).

У прямому циклі Карно

1-2 – ізотермічне поширення у контакті з нагрівником ($T_1 = T_н$ і $Q > 0$);

2-3 – адіабатне поширення ($Q = 0$);

3-4 – ізотермічне стиснення у контакті з холодильником ($T_2 = T_x$ і $Q < 0$);

4-1 – адіабатне стиснення ($Q = 0$).

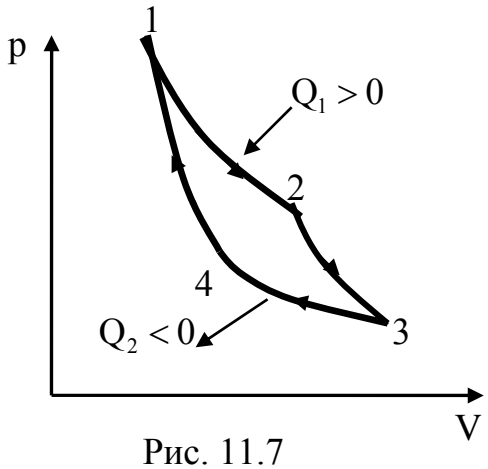


Рис. 11.7

Для циклу Карно

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \qquad (11.37)$$

При виконанні оберненого циклу (рис.11.5) теплова машина працює як холодильник: за рахунок роботи A', яка здійснюється над робочим тілом, тепло передається від тіла з меншою температурою (холодильна камера) до більш нагрітого тіла (навколишнє середовище). Ефективність роботи холодильника характеризує холодильний коефіцієнт:

$$\eta_x = \frac{Q_2'}{|Q_1' - Q_2'|} = \frac{Q_2'}{A'}. \qquad (11.38)$$

Q_2' – кількість теплоти, відібраної від холодильника; Q_1' – кількість теплоти, переданої нагрівнику.

● В термодинаміці ентропія була введена на основі формулювання другого закону у вигляді нерівності (Р.Клаузіус)

$$dS \le \frac{\delta Q}{T}, \qquad (11.39)$$

де dS – зміна ентропії в елементарному процесі, δQ (dQ) – елементарна кількість теплоти, отриманої системою при температурі T.

Знак « = » у формулі (11.39) є справедливим для рівноважних (оборотних) процесів, знак « < » – для необоротних процесів.

Із співвідношення (11.39) можуть бути отримані формули

$$Q = \int_1^2 TdS; \qquad (11.40)$$

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{CdT}{T}, \qquad (11.41)$$

де врахований зв'язок δQ з теплоємністю C системи ($\delta Q = CdT$).

Формули (11.40) і (11.41) дозволяють розрахувати теплообмін і зміну ентропії в різних процесах, у тому числі в тих, що відбуваються в теплових машинах.

● Розрахунок значення ентропії, яка відповідає певному стану системи потребує визначення початку відліку, який задається третім принципом термодинаміки (**тепловою теоремою В.Нернста**): **при наближенні абсолютної температури до нуля ентропія системи прямує до нуля.**

$$\lim_{T\to 0} S = 0.$$

Наслідки з теореми:

1. При наближенні до абсолютного нуля теплоємності C_V і C_p прямують до нуля: $\lim_{T\to 0} C_V = \lim_{T\to 0} C_p = \lim_{T\to 0}\left(C_p - C_V\right) = 0$

2. Недосяжність абсолютного нуля.

З виразу $\lim_{T\to 0}\left(C_p - C_V\right) = 0$ випливає, що $\lim_{T\to 0}\gamma = \lim_{T\to 0}\left(\frac{C_p}{C_V}\right) = 0$,

і ізотерма T=0 співпадає з адіабатою S=0. Тобто з наближенням до абсолютного нуля ефект адіабатичного охолодження дедалі зменшується, поки зовсім не зникає. Отже можна лише наблизитися до абсолютного нуля, який є недосяжним.

● Ентропія є однією з фундаментальних величин у фізиці. Як випливає із статистичної механіки, ентропія пов'язана з розподілом ймовірностей мікроскопічних станів системи (див. формулу (11.32)). Введення ентропії як характеристики стану термодинамічної системи обумовлено тим, що при термодинамічному підході до опису фізичної системи доводиться відмовитися від повної інформації про її мікроскопічний стан, що характеризується великим числом параметрів, і перейти до неповного (з точки зору класичної динаміки) макроскопічного опису за допомогою малого числа параметрів. Отже, ентропія тісним чином пов'язана з таким поняттям, як інформація.

Найзагальніші положення теорії інформації:

▪ Інформацію вимірюють числом двійкових знаків (біт), за допомогою яких цей об'єм інформації можна записати (передати).

Повне число різних повідомлень (текстів), які можна записати за допомогою послідовності N двійкових знаків дорівнює 2^N. Якщо припустити, що усі ці повідомлення (тексти) є рівно імовірними, то ймовірність появи цього тексту при випадковій генерації послідовності N двійкових знаків дорівнює $P_N = 2^N$. Виходячи з цього, кількість інформації, що міститься в цьому повідомленні з N двійкових знаків, можна записати через величину імовірності випадкової появи цього повідомлення у вигляді

$$I = -\frac{\log P_N}{N}. \qquad (11.42)$$

Проте, таке визначення кількості інформації не є цілком точним, оскільки не всяка послідовність двійкових знаків містить певну "смислову" інформацію. Так, наприклад, текстова інформація складається з послідовності букв алфавіту і розділових знаків, загальне число яких не більше ніж 10^2. Отже, досить мати шість-сім двійкових знаків, щоб єдиним способом зіставити кожному символу їх певну комбінацію. Проте ймовірність появи в тексті різних символів є різною. Якщо розглядати текст як послідовність n символів, то кількість інформації, яку він несе, згідно з визначенням Шенона, дається наступним виразом:

$$I = -\sum_{i=1}^{n} \rho_i \ln \rho_i, \qquad (11.43)$$

де ρ_i – імовірність появи в тексті символу з номером i. Зауважимо, що поява у формулі (11.43) натурального логарифма означає, що тут у якості одиниці виміру інформації використовується вже не "біт", а "нат". Неважко зрозуміти, що об'єм інформації в одиницях "нат" відрізняється від того ж об'єму в одиницях "біт" множником ln2:

$$I_{нат} = I_{біт} \ln 2. \qquad (11.44)$$

▪ У теорії інформації вводиться також поняття інформаційної ентропії, яка надає міру невизначеності того чи іншого повідомлення. Пояснимо це на наступному прикладі. Уявимо собі, що ми отримали цілком певне повідомлення (текст), що складається з N символів. Ентропія цього повідомлення дорівнює нулю, оскільки воно відповідає єдиному тексту. Якщо при передачі повідомлення відбувається спотворення інформації (наприклад, відбувається втрата або перестановка декількох знаків), то ентропія повідомлення зростає. Це рівносильне тому, що випадковим чином переставити або замінити деяке число знаків цього повідомлення. При цьому певна кількість інформації залишається, оскільки сталася втрата тільки декількох знаків. У граничному випадку, якщо випадковим чином замінити або переставити усі N символів тексту, то станеться повна втрата інформації і ентропія такого повідомлення буде дорівнювати

$$S = -\sum_{i=1}^{n} \rho_i \ln \rho_i . \qquad (11.45)$$

Таким чином можна зробити висновок, що існує деякий закон збереження суми інформації і ентропії, який виражається співвідношенням

$$S + I = \text{const} . \qquad (11.46)$$

Завдяки цьому, в розглянутих вище двох граничних випадках виходить, що формальна кількість інформації I (формула (11.43)) і кількість ентропії S (формула (11.45)) визначаються однаковим виразом. Проте, в першому випадку (11.43) – це один єдиний текст, відповідний певній кількості інформації, тоді як в другому випадку (11.45) – кількість інформації дорівнює нулю, а ентропія S має максимальне значення, яке визначається числом різних текстів, які можна записати за допомогою N символів.

Методичні вказівки.

Задачі по даній темі можна поділити на три групи.

● Задачі на розрахунок ККД теплових машин (термодинамічних циклів), зокрема циклу Карно, з використанням формул (11.35) – (11.38), (11.2), (11.15), (11.25).

● Задачі на розрахунок теплоти Q або зміни ентропії ΔS в процесах з використанням формул (11.40), (11.41), а також (11.2), (11.15), (11.25) – (11.28).

При розв’язуванні задач на розрахунок зміни ентропії використовуються найважливіші властивості ентропії: 1) ентропія є функцією стану; 2) ентропія є адитивною величиною, тобто ентропія складної системи дорівнює сумі ентропії її частин.

При розрахунку зміни ентропії за формулою (11.41) слід пам’ятати, що в ній dQ – кількість теплоти, отриманої тілом. Якщо тіло віддає тепло, величину dQ слід брати зі знаком «–».

Якщо перехід тіла з початкового стану у кінцевий здійснюється декількома процесами, що здійснюються послідовно, то повна зміна ентропії дорівнює алгебраїчній сумі змін ентропії у кожному процесі.

Співвідношення (11.41) виражає зміну ентропії тільки в оборотному процесі. У випадку необоротного процесу для розрахунку ентропії можна скористатися тим, що ентропія є функцією стану: її зміна визначається тільки початковим і кінцевим станами системи і не залежить від процесу, за допомогою якого здійснився перехід між ними. Тому достатньо розглянути процес, який би переводив систему в той самий кінцевий стан, але був оборотним, і визначити в ньому зміну ентропії.

● Задачі на розрахунок зміни ентропії ΔS або термодинамічної ймовірності Ω з використанням формул (11.33), (11.34).

Приклади розв'язання задач

Приклад 11.13. Ідеальна теплова машина працює за циклом Карно. Температура нагрівника T_1=400 К, холодильника T_2=300 К. За кожен цикл машина отримує від нагрівника кількість теплоти Q_1=2,1кДж. Визначити 1) коефіцієнт корисної дії машини η і корисну роботу А, яку виконує машина за один цикл. 2) Яким буде холодильний коефіцієнт цієї машини, якщо вона буде здійснювати той самий цикл у зворотному напряму?

Розв'язання

T_1=400 К
T_2=300 К
Q_1=2,1 кДж.
η, А - ?

1) Коефіцієнт корисної дії можна визначити або за формулою (11.35) $\eta = \frac{A}{Q_1}$, (1)

або (для циклу Карно) за формулою (11.37)

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \qquad (2)$$

Спочатку за формулою (2) знайдемо коефіцієнт корисної дії

$$\eta = \frac{400 - 300}{400} = 0{,}25 = 25\%.$$

Потім за формулою (1) знайдемо роботу А.

$$A = \eta Q_1 = 0{,}25 \cdot 2{,}1 \cdot 10^3 = 525 \text{ Дж}.$$

2) У зворотному циклі робоче тіло буде відбирати у холодильника кількість теплоти Q_2 і віддавати нагрівнику кількість теплоти Q_1. Робота, яку виконує робоче тіло в зворотному циклі буде від'ємною: $A' = -A$. Холодильний коефіцієнт (11.38) запишемо у вигляді $\eta_x = \frac{|Q_2|}{|A|}$ (3), де Q_2 виразимо через Q_1 і А: $|Q_2| = Q_1 - |A|$.

Тоді з урахуванням виразу (1) для ККД теплової машини отримуємо:

$$\eta_x = \frac{Q_1 - |A|}{|A|} = \frac{1}{\eta} - 1.$$

Обчислення дає: $\eta_x = \frac{1}{0{,}25} - 1 = 3.$

Відповідь: η=25%; А=525 Дж ; η_x = 3.

Приклад 11.14. Холодильник Карно призначений для охолодження газоподібного гелію до температури T_2 = 4К. Яку роботу необхідно виконати, щоб відібрати $Q_2' = 1$Дж тепла у гелію, який має таку

температуру. Температура гарячого резервуару є кімнатною і дорівнює T_1=300 К. Яка кількість теплоти передається при цьому повітрю?

$T_1 = 300$ К $T_2 = 4$ К $Q'_2 = 1$ Дж	Розв'язання
A', Q'_1 - ?	

Для визначення виконаної роботи скористаємось виразом для холодильного коефіцієнту (11.38):

$$\eta_x = \frac{Q'_2}{|Q'_1 - Q_2|} = \frac{Q'_2}{A'}.$$

Для холодильника Карно $\eta_x = \frac{Q'_2}{A'} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$. (1)

З формули (1) виражаємо A':

$$A' = \frac{T_1 - T_2}{T_2} \cdot Q'_2 = \left(\frac{T_1}{T_2} - 1\right) \cdot Q'_2$$

Підстановка значень в останню формулу дає: $A' = \left(\frac{300}{4} - 1\right) \cdot 1 = 74$ Дж.

Кількість теплоти, яка віддана оточуючому повітрю, дорівнює сумі тепла, відібраного від холодильника, і виконаної роботи.

$$Q'_1 = Q'_2 + A'.$$

$$Q'_1 = 1 + 74 = 75 \text{ Дж}.$$

Відповідь: $A' = 74$ Дж.; $Q'_1 = 75$ Дж.

Приклад 11.15. Робоча речовина теплової машини здійснює цикл, у межах якого абсолютна температура змінюється в n = 2 рази, а сам цикл у координатах T–S має вигляд, показаний на рис. 11.8. Знайти ККД циклу.

$\frac{T_1}{T_2} = n$ n=2	Розв'язання
η- ?	

За означенням (формула (11.35)),

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}.$$

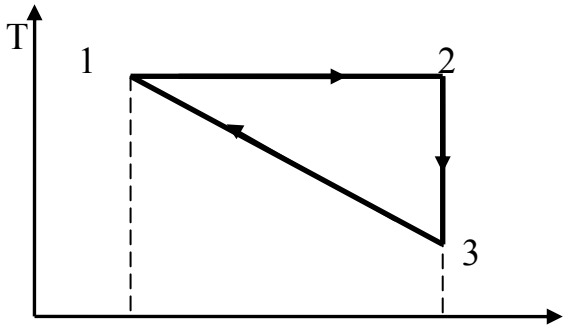


Рис. 11.8

Використаємо формулу (11.40), а саме $Q = \int_1^2 TdS$. Урахуємо, що на діаграмі інтеграл чисельно дорівнює площині криволінійної трапеції під графіком процесу. Інтегрування розіб'ємо на три ділянки 1–2, 2–3 та 3–1. На ділянці 1– 2 $dS > 0$; $T_1 = \text{const}$ (машина отримує теплоту). Тоді

$$Q_1 = Q_{1-2} = T_1 \int dS = T_1 \Delta S_{1-2} > 0.$$

На ділянці 2–3 (адіабатний процес, теплообміну немає) dS=0. На ділянці 3–1 $dS < 0$ (машина віддає теплоту холодильнику). Тоді

$$Q_2 = Q_{3-1} = \int TdS = \frac{T_1 + T_2}{2}\Delta S_{3-1} < 0.$$

Ураховуючи, що T_2=nT_1, тобто $\frac{T_1 + T_2}{2} = \frac{T_1\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2} = \frac{T_1(n+1)}{2n}$, а $\Delta S_{1-2} = -\Delta S_{3-1}$, отримуємо:

$$\eta = \frac{T_1\Delta S - \frac{T_1(n+1)}{2n}\Delta S}{T_1\Delta S} = \frac{n-1}{2n}.$$

Наприклад, при n = 2 маємо η = 0,25.

Приклад 11.16. m=10г водню ізобарично нагрівають від $t_1 = 27^oC$ до $t_2 = 327^oC$. Знайти зміну ентропії газу ΔS у цьому процесі.

Розв'язання

m=0,010кг
$t_1 = 27^oC$
$t_2 = 327^oC$
i=5
R=8,31 Дж/(моль · К)

ΔS - ?

Згідно з (11.41) зміна ентропії визначається формулою

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}, \qquad (1)$$

де S_2 і S_1 – значення ентропії відповідно у кінцевому і у початковому станах; δQ – кількість теплоти, яку отримує газ у елементарному процесі; T – термодинамічна температура, при якій відбувалась теплопередача.

При ізобаричному процесі

$$\delta Q = C_P \nu dT, \qquad (2)$$

де C_P – молярна теплоємність водню при ізобаричному нагріванні; dT – зміна температури; $\nu = \frac{m}{M}$ (3) – кількість речовини (m – маса газу; M– молярна маса газу). Для водню M = $2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

У свою чергу $C_P = \frac{i+2}{2}R$ (4), де i – кількість ступенів вільності молекул (для водню H_2 i=5); R – газова стала. R=8,31 Дж/(моль · К).

Підставимо (2), (3), (4) у вираз (1) і виконаємо інтегрування:

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{i+2}{2} \cdot R \cdot \frac{m}{M} \cdot \frac{dT}{T} = \frac{(i+2)R \cdot m}{2M}\int_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T} = \frac{(i+2)R \cdot m}{2M}\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right).$$

Виразимо температури T_1 і T_2 у кельвінах (К):

$$T_1 = 27^oC + 273 = 300 \text{ К}; \; T_2 = 327+273=600 \text{ К}.$$

Обчислення: $\Delta S = \frac{(5+2)\cdot 8{,}31\cdot 10\cdot 10^{-3}}{2\cdot 2\cdot 10^{-3}} \ln\frac{600}{300} = 100$ Дж/К.

Відповідь: ΔS=100 Дж/К.

Приклад 11.17. Кусок льоду масою m = 200г, взятий при температурі $t_1 = -10°C$, був нагрітий до температури $t = 0°C$ і розплавлений. Визначити зміну ентропії льоду.

m = 0,2кг T_1=263К T_2=273К c = 2100Дж/(кг·К) L= $3{,}35\cdot 10^5$ Дж/кг	Розв'язання Ентропія є адитивною функцією, тому її зміна дорівнює сумі двох доданків, які надають зміну ентропії $\Delta S'$ при нагріванні льоду і зміну ентропії $\Delta S''$ при перетворенні льоду в воду. Зміна ентропії визначається загальною формулою (11.41)
ΔS - ?	

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}. \qquad (1)$$

Витрати тепла на нагрівання тіла при нескінченно малій зміні його температури дорівнюють

$$dQ = mc\cdot dT, \qquad (2)$$

де m – маса тіла, c – його питома теплоємність.

Підстановка виразу (2) в (1) дозволяє отримати формулу для обчислення ентропії при нагріванні льоду

$$\Delta S' = mc\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T}\ mc\cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = mc\cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right). \qquad (3)$$

При плавленні льоду його температура залишається постійною, тому

$$\Delta S'' = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T}\int_1^2 dQ = \frac{Q}{T},$$

де Q – кількість теплоти, переданої льоду в процесі плавлення. Згідно з формулою (11.27) $Q = Lm$, де L– питома теплота плавлення.

Тоді $$\Delta S'' = \frac{Lm}{T_2}. \qquad (4)$$

З урахуванням формул (3) і (4) знаходимо ΔS:

$$\Delta S = \Delta S' + \Delta S'' = m\left(c\cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + \frac{L}{T_2}\right) \qquad (5)$$

Підставляємо в формулу (5) чисельні значення фізичних величин і отримуємо:

$$\Delta S = 0{,}2\left(2{,}1\cdot 10^3 \ln\frac{273}{263} + \frac{3{,}35\cdot 10^5}{273}\right) = 262 \text{ Дж/К}.$$

Приклад 11.18. а) Деяка кількість води при початковій температурі $t_п = 0^0C$ підігрівається джерелом з температурою $t_к = 80^0C$. Як змінюється ентропія всієї системи, коли вода нагрівається до температури нагрівника? Виразити відповідь через теплоємність води C у припущенні, що теплоємність не залежить від температури.

б) Як змінюється ентропія всієї системи, якщо використовуються два джерела для нагріву води: один з температурою від 0^0 до 40^0C, другий – з температурою від 40^0 до 80^0C.

Розв'язання

$T_п = 273K$ $T_к = 353K$ $T_1 = 313$ K $C_В = C$ ΔS -?	а) Зміна ентропії води може бути визначена у припущенні оборотності процесу нагрівання за формулою (11.41). З урахуванням незалежності теплоємності води від температури можна записати:

$$\Delta S_в = C\int_{T_п}^{T_к}\frac{dT}{T} = C\ln\left(\frac{T_к}{T_п}\right).$$

Зміну ентропії джерела при фіксованій температурі T_2 знаходимо за формулою $\Delta S_{дж} = -\frac{\Delta Q}{T_к} = -C\frac{T_к - T_п}{T_к}$, де $\Delta Q = C(T_к - T_н)$ – загальна кількість теплоти, яка передається від джерела воді. Тоді загальна зміна ентропії системи дорівнює

$$\Delta S = \Delta S_в + \Delta S_{дж} = C\left(\ln\left(\frac{T_к}{T_п}\right) - \frac{T_к - T_п}{T_к}\right).$$

$$\Delta S = C\left(\ln\left(\frac{353}{273}\right) - \frac{80}{353}\right) = 0{,}030C.$$

б) У другому випадку, коли нагрівання відбувається в два етапи, зміна ентропії води залишається тією самою, що в попередньому випадку:

$$\Delta S_В = C\ln\left(\frac{T_1}{T_п}\right) + C\ln\left(\frac{T_к}{T_1}\right) = C\ln\left(\frac{T_к}{T_п}\right)$$

Зміна ентропії джерел складається з двох доданків:

$$\Delta S_{дж} = \Delta S_{1дж} + \Delta S_{2дж} = -C\left(\frac{T_1 - T_п}{T_1} + \frac{T_к - T_1}{T_к}\right).$$

Тоді

$$\Delta S = C\left(\ln\left(\frac{T_к}{T_п}\right) - \left(\frac{T_1 - T_п}{T_1} + \frac{T_к - T_1}{T_к}\right)\right)$$

$$\Delta S = C\left(\ln\left(\frac{353}{273}\right) - \left(\frac{40}{313} + \frac{40}{353}\right)\right) = 0{,}016C.$$

Тобто зміна ентропії при нагріванні в два етапи є меншою.

Можна припустити, що коли вода послідовно контактує з N джерелами при температурах $T_n = T_н + \frac{n}{N}(T_к - T_н)$ зміна ентропії дорівнює нулю. Дійсно, зміна ентропії води залишається тією самою незалежно від кількості джерел тепла N. Зміна ентропії джерел дорівнюватиме

$$T_n = T_н + \frac{n}{N}(T_к - T_н) = -C\sum_{n=1}^{N}\frac{(T_к - T_п)/N}{T_п + n/N(T_к - T_п)}.$$

При $N \to \infty$ сума переходить в інтеграл

$$\lim_{N\to\infty}\Delta S_{дж} = -C\int_0^{T_к - T_п}\frac{dx}{T_п + x} = -C\ln\frac{T_к}{T_п} = -\Delta S_В$$

і сумарна зміна ентропії в розглянутому оборотному процесі $\Delta S = 0$. На практиці будь-яка спроба нагріти деяку кількість води обов'язково супроводжується необоротними процесами і приводить до зросту загальної ентропії. Зокрема, у розглянутому прикладі вважалось, що джерела вже знаходяться при необхідній температурі і не розглядалась зміна ентропії, яка пов'язана з доведенням температури джерел до потрібної.

Приклад 11.19. Порівняйте зменшення ентропії мозку в процесі читання книги зі збільшенням ентропії за рахунок опромінення від електричної лампочки, при якій відбувається читання.

Розв'язання.

Зміна ентропії при отриманні інформації в кількості ΔI (вимірюється в бітах) визначається за формулою

$$\Delta S = -\frac{k}{\log_2 e}\Delta I,$$

де k= $1{,}38\cdot 10^{-23}$ Дж/К – стала Больцмана.

У книзі, як правило, використовується біля 2^5 різних знаків. Для ідентифікації одного знаку необхідно приблизно 5 біт. Якщо книга, наприклад, містить 250 сторінок по 40 рядків і 60 знаків у рядку, то інформація містить $\Delta I = 5\cdot 60\cdot 40\cdot 250 = 3\cdot 10^6$ біт. Тоді

$$\Delta S_{мозк.} \approx -\frac{1{,}38\cdot 10^{-23}}{1{,}44}\cdot 3\cdot 10^6 \approx 2{,}9\cdot 10^{-17}\ Дж/К.$$

З іншого боку, електрична лампочка потужністю $P_л$ = 100 Вт при температурі повітря в кімнаті T = 300 К приводить до зміни ентропії

$$\Delta S_{ламп} = \frac{P_л\cdot t}{T} = \frac{100\cdot t}{300} \approx 0{,}3\cdot t\ ,$$ де t – час читання (в секундах).

Таким чином, $$\frac{\Delta S_{мозг}}{\Delta S_{ламп}} \approx \frac{2{,}9\cdot 10^{-17}}{0{,}3\cdot 3{,}6\cdot 10^3 t} \approx \frac{2{,}7\cdot 10^{-20}}{t},$$

де t – час (у годинах).

Задачі для самостійного розв'язування

11.49. Газ здійснює цикл Карно. Абсолютна температура нагрівника в n=4 рази вище за абсолютну температуру холодильника. Яку долю теплоти, що отримується за один цикл від нагрівника, газ віддає холодильнику?

11.50. Газ здійснює цикл Карно. Абсолютна температура нагрівника в n=3 рази вище за абсолютну температуру холодильника. Нагрівник передав газу кількість тепла $Q_1 = 42$ кДж. Яку роботу виконав газ за цикл?

11.51. Ідеальна теплова машин працює за циклом Карно. Температура холодильника $T_2 = 290\,K$. У скільки разів збільшитися ККД циклу, якщо температуру нагрівника підвищити з $T_1 = 400\,K$ до $T_1' = 600\,K$?

11.52. Ідеальна теплова машина, що працює за циклом Карно, здійснює за один цикл роботу A=2,94 кДж і віддає за один цикл холодильнику кількість тепла $Q_2 = 13,4$ кДж. Знайти ККД циклу.

11.53. Газ, що здійснює цикл Карно, 2/3 теплоти Q_1, отриманої від нагрівника, віддає холодильнику. Температура холодильника $T_2 = 280$ К. Визначити температуру нагрівника.

11.54. Знайти ККД теплової машини, що здійснює цикл Карно, якщо робота за цикл дорівнює A=10 Дж, а робота на ділянці ізотермічного стискування A'=5 Дж.

11.55. Ідеальна теплова машина, що працює за циклом Карно, отримує за цикл від нагрівника кількість теплоти $Q_1 = 2,512$ кДж. Температура нагрівника $T_1 = 400$ К, температура холодильника $T_2 = 300$ К. Знайти роботу, яка здійснюється машиною за один цикл, і кількість теплоти Q_2, яка віддається за один цикл холодильнику.

11.56. Ідеальна теплова машина, яка працює за циклом Карно, здійснює за один цикл роботу A=73,5 кДж. Температура нагрівника t_1=100°C, температура холодильника t_2=0°C. Знайти ККД циклу, кількість теплоти Q_1, яка отримується за один цикл від нагрівника, і кількість теплоти Q_2, яка віддається за один цикл холодильнику.

11.57. У якому випадку ККД циклу Карно підвищиться більше: при збільшенні температури нагрівника на ΔT або при зменшенні температури холодильника на таку ж величину?

11.58. Теплову машину, яка працює за циклом Карно з ККД η=20%, використовують при тих самих температурах нагрівника і холодильника як холодильну машину. Знайти її холодильний коефіцієнт k.

11.59. Ідеальна теплова машина працює за циклом Карно. За один цикл газ виконує роботу A = 10кДж і віддає холодильнику кількість тепла Q_2=42кДж. Знайти коефіцієнт корисної дії η машини .

11.60. Теплова машина здійснює цикл Карно. Температура нагрівника $t_1=117^0C$. Відомо, що 75 % кількості теплоти Q_1, отриманої від нагрівника за один цикл, робоче тіло віддає холодильнику. Визначити температуру t_2 холодильника.

11.61. Теплова машина Карно, коефіцієнт корисної дії якої η= 25%, працює у зворотному напрямку, тобто працює як холодильник. За кожний цикл над робочим тілом машини здійснюється робота A = 10кДж. Визначити кількість теплоти Q_2, яку машина може перенести за один цикл від холодильника до нагрівника.

11.62. Знайти зміну ентропії $S_2 - S_1$ при перетворенні m = 1кг льоду, взятого при температурі $t = -10^0C$, у пару.

11.63. Визначити зміну ентропії $S_2 - S_1$ для m = 10г азоту при ізотермічному розширенні від $V_1 = 5л$ до $V_2 = 10л$.

11.64. Вуглекислий газ (CO_2) масою m = 22г нагрівають від $t_1 = 7^0C$ до $t_2=507^0C$. Визначити приріст ентропії ΔS, якщо процес нагрівання відбувається: 1) при постійному об'ємі; 2) при постійному тиску .

Тестові завдання.

Вибрати вірну відповідь:

1. В окремій ізольованій системі самочинно відбуваються зміни, які…
   1. приводять систему в найбільш імовірний стан – стан рівноваги
   2. є будь-якими
   3. приводять систему в менш імовірний стан
2. Прямим циклом називають цикл,…
   1. у якого повна робота за цикл є від'ємною (A<0)
   2. у якого лінія розширення лежить нижче лінії стискання
   3. у якого повна робота за цикл є додатною (A>0)
3. Для будь-яких циклів теплових машин вірним є рівняння:
   1. $Q_1 = Q_2 + A$ 2. $Q_1 = A$ 3. $Q_1 = \Delta U + A$
4. При зниженні температури холодильника ККД теплової машини
   1. зменшується 2. збільшується
   3. не змінюється 4. температура холодильника не впливає на ККД
5. За другим законом термодинаміки зміна ентропії замкненої системи тіл визначається співвідношенням
   1. $\Delta S = 0$ 2. $\Delta S \geq 0$ 3. $\Delta S < 0$ 4. $\Delta S > 0$
6. Із наведених нижче процесів оборотними є
   1. поширення газу в вакуум
   2. коливання маятника при дії сили тертя
   3. теплообмін між двома тілами з різною температурою
   4. квазістатичний теплообмін між тілами .
7. Газ виконує цикл Карно. Абсолютна температура T_1 нагрівника в 4 рази вища за абсолютну температуру T_2 холодильника. ККД цього циклу дорівнює:
   1. 25% 2. 50% 3. 74% 4. 75%
8. Ентропія залишається постійною при
   1. адіабатному розширенні газу 2. ізотермічному стисканні газу
   3. ізохорному нагріванні газу 4. ізобарному нагріванні газу

9. Коефіцієнт корисної дії теплової машини, яка працює за циклом Карно, можна збільшити:

1. і знижуючи температуру холодильника, і підвищуючи температуру нагрівника
2. за рахунок підвищення температури холодильника
3. тільки за рахунок зниження температури холодильника
4. тільки за рахунок підвищення температури нагрівника

10. Мірою невпорядкованості системи молекул є її

1.ентропія 2. густина 3. тиск 4. теплоємність

11. Ентропія зростає при

1. конденсації пари 2. адіабатному розширенні газу
3. плавленні льоду 4. замерзанні води

12. При передачі повідомлення (тексту) що складається з 100 двійкових знаків сталися спотворення, так що значення 10 знаків стали невизначеними. Ентропія S і кількість інформації I для отриманого тексту дорівнюють (ln2=0.6931):

1. S=10, I=100 біт 2. S = 6,931, I =90 біт 3. S = 6,238, I =62,379 біт

13. У квазістатичному ізотермічному процесі (T=const) об'єм ідеального газу змінився на величину $\Delta V = V_2 - V_1 > 0$. Як змінилася внутрішня енергія ідеального газу?

1. не змінилась 2. збільшилась 3. зменшилась

14. У квазістатичному ізотермічному процесі (T = const) об'єм ідеального газу змінився на величину $\Delta V = V_2 - V_1 > 0$. Як між собою співвідносяться робота A, виконана газом і кількість теплоти Q, отримана від термостата?

1. A > Q 2. A < Q 3. A = Q

15. Як змінюється в циклі Карно ентропія ідеального газу?

1. збільшується на величину, пропорційну виконаній газом механічній роботі
2. не змінюється
3. зменшується на величину, пропорційну виконаній газом механічній роботі

16. Як змінюється в циклі Карно внутрішня енергія ідеального газу?

1. збільшується на величину, пропорційну виконаній газом механічній роботі;
2. не змінюється;
3. зменшується на величину, пропорційну виконаній газом механічній роботі.

17. Як змінюється в процесі циклу Карно з ідеальним газом ентропія термостата-нагрівника?

1. збільшується на величину, пропорційну теплу, отриманому від термостата
2. не змінюється
3. зменшується на величину, пропорційну теплу, отриманому від термостата

18. Як змінюється в процесі циклу Карно з ідеальним газом ентропія термостата-холодильника?

1. збільшується на величину, пропорційну теплу, переданому термостату
2. не змінюється
3. зменшується на величину, пропорційну теплу, переданому термостату

19. Як змінюється в процесі циклу Карно з ідеальним газом сума ентропії термостата-нагрівника і термостата-холодильника?

1. збільшується на величину, пропорційну виконаній газом механічній роботі
2. не змінюється
3. зменшується на величину, пропорційну виконаній газом механічній роботі

Розділ 12. Реальні гази. Рівняння Ван-дер-Ваальса

Тема: Рівняння Ван-дер-Ваальса. Ізотерми Ван-дер-Ваальса та ізотерми реального газу. Критичний стан та критичні параметри реального газу.

Основні поняття і формули.

● **Рівняння Ван-дер-Ваальса.** Рівняння стану ідеального газу Менделєєва – Клапейрона є вірним лише при достатньо малому тиску газу. При великих тисках необхідно ураховувати взаємне притягання молекул і об'єм, який є недосяжним для руху молекул. Одним з рівнянь, які описує поведінку реального газу, є рівняння Ван-дер-Ваальса

$$\left(P+\nu^2\frac{a}{V^2}\right)\left(V-\nu b\right)=\nu RT, \qquad (12.1)$$

де $\nu=\frac{m}{M}$ – кількість газу, P – тиск, V – об'єм, T – абсолютна температура, a – стала, яка ураховує взаємодію між молекулами, b – стала, що ураховує власний об'єм молекул та сили відштовхування між ними. Постійні a і b залежать від природи газу

Додатковий тиск, обумовлений силами притягання між молекулами

$$p_i=\nu^2\frac{a}{V^2}, \qquad (12.2)$$

називають внутрішнім тиском газу.

Для одного молю газу (ν=1 моль) рівняння Ван-дер-Ваальса має вигляд:

$$(P+\frac{a}{V_0^2})\left(V_0-b\right)=RT, \qquad (12.3)$$

де V_0 – об'єм моля;.

Рівняння Ван-дер-Ваальса можна застосовувати для газів при будь-якому тиску (при невеликих тисках воно переходить у рівняння Менделєєва – Клапейрона), а також для термодинамічної системи, яка складається з газу та рідини.

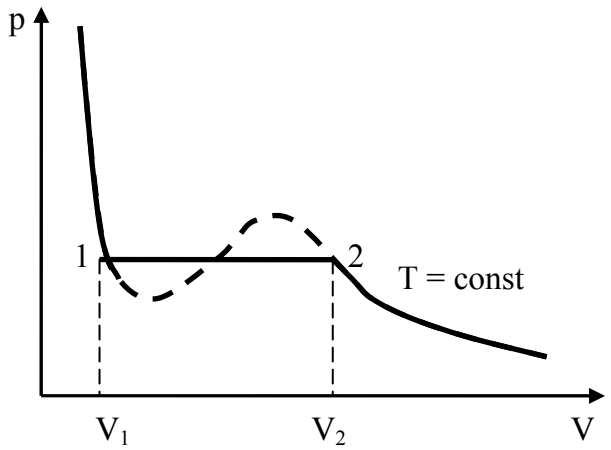


Рис. 12.1

На рис.12.1 показана ізотерма Ван-дер-Ваальса (12.1) (пунктир) та істинна (дослідна)

ізотерма для системи рідина – газ. Область зліва від об'єму V_1 відповідає рідкому стану, справа від об'єму V_2 – газоподібному стану, область 1–2 між значеннями об'ємів V_1 та V_2 – стану «рідина – газ».

При збільшенні значення температури горизонтальна ділянка ізотерм скорочується, тобто зменшується різниця між об'ємами рідкої та газоподібної фази. Стан речовини, при якому горизонтальна ділянка стягується в точку К, називають **критичним**. Точку К називають **критичною** точкою**,** а параметри речовини, що відповідають критичному стану – **критичними** параметрами. Значення критичних параметрів можна отримати з рівняння Ван-дер-Ваальса (12.1):

$$p_k = \frac{a}{27b^2}; \qquad T_k = \frac{8a}{27Rb}; \qquad V_k = 3\nu b. \qquad (12.4)$$

Постійні a і b зв'язані з критичними параметрами співвідношеннями:

$$a = \frac{27T_k^2R^2}{64P_k}; \qquad b = \frac{T_kR}{8P_k}. \qquad (12.5)$$

● Внутрішня енергія реального газу складається з суми кінетичної та потенціальної енергій і надається формулою

$$U = \nu C_V \cdot T - \nu^2 \cdot \frac{a}{V}, \qquad (12.6)$$

де перший доданок характеризує енергію хаотичного теплового руху молекул, а другий – потенціальну енергію їх взаємодії. У формулі (12.6) C_V – молярна теплоємність газу при постійному об'ємі.

Методичні вказівки.

● За звичаєм в умові задачі оговорюють ті випадки, коли газ слід розглядати як реальний. У протилежному випадку слід з'ясувати це питання, щоб з двох рівнянь – Менделєєва – Клапейрона і Ван-дер-Ваальса – обрати необхідне. При цьому газ слід вважати реальним перш за все у тих випадках, коли він сильно стиснутий порівняно з газом при нормальних умовах.

Якщо за умовою задачі неможливо відразу зробити висновок ідеальним чи реальним слід вважати газ, необхідно знайти його молярний об'єм V_0 і порівняти його з молярним об'ємом, який займає будь-який газ при нормальних умовах, а саме $V_{0норм} = 22,4 \cdot 10^{-3}$ м^3/моль. Якщо при цьому з'ясується, що $V_0 \geq V_{0норм}$, газ можна без великої погрішності вважати ідеальним. Якщо $V_0 << V_{0норм}$, тобто густина даного газу значно перевищує її значення при нормальних умовах, газ слід вважати реальним.

У інших випадках $V_0 < V_{0норм}$ слід припустити, що даний газ є реальним, і визначити поправки на тиск $\frac{a}{V_0^2}$ і об'єм b, які входять до

рівняння (12.3), а далі порівняти їх з величинами p і V_0 (якщо вони відомі за умовою). Відкидаючи ці поправки у випадку їх порівняно невеликих значень або зберігаючи, ми тим самим обираємо рівняння, за яким розв'язується задача.

Приклади розв'язання задач

Приклад 12.1. Гелій масою m = 10г займає об'єм V = 100 см^3 при тиску p=10^{8}Па. Знайти температуру газу, розглядаючи його як а) ідеальний; б)реальний.

m = 10^{-2} кг V = 10^{-4} м^3 p=10^8 Па R=8,31Дж/(моль·К) M=4·10^{-3}кг/моль a = 3,43·10^{-3}Н/(м^4·моль^2) b = 2,34·10^{-5}м^3/моль	Розв'язання а) Виражаємо температуру ідеального газу з рівняння Менделєєва-Клапейрона: $T = \frac{MpV}{mR}$. Підставляючи значення відповідних величин, знаходимо $T = \frac{4 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{8} \cdot 10^{-4}}{10^{-2} \cdot 8,31} K = 482 K.$
T; T′ - ?	

б) Розв'язок рівняння Ван-дер-Ваальса (12.3) відносно температури дає:

$$T = \frac{M}{mR}(P + \frac{am^2}{M^2V^2})(V - \frac{m}{M}b).$$

Значення сталих Ван-дер-Ваальса a і b для гелію дістаємо з таблиці. Після підстановки значень та обчислення, отримуємо:

$$T' = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{10^{-2} \cdot 8,31}(10^8 + \frac{3,43 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-4}}{16 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-8}})(10^{-4} - \frac{10^{-2} \cdot 2,34 \cdot 10^{-5}}{4 \cdot 10^{-3}}) K = 204K.$$

Відповідь: $T = 482$ К; $T' = 204$К. Порівняння результатів, отриманих у двох випадках показує, що у випадку високого тиску, при якому знаходиться газ, його неможна вважати ідеальним.

Приклад 12.2. Визначити тиск m = 320г кисню, який знаходиться при температурі $t = 17°C$ у посудині, об'єм якої дорівнює 1) V=0,5м^3; 2)V=0,5л.

m = 0,32кг M=32·10^{-3}кг/моль R=8,31Дж/(моль·К) a = 0,130 Н/(м^4·моль^2) b = 3,1·10^{-5}м^3/моль 1)V = 0,5м^3 2) $V = 0,5 \cdot 10^{-3}$ м^3	Розв'язання Перш за все необхідно визначити, яким слід вважати газ за даними умовами – реальним чи ідеальним. Для відповіді знайдемо молярний об'єм газу V_0 і порівняємо знайдені значення з молярним об'ємом газу за нормальних умов $V_{0норм.} = 22,4 \cdot 10^{-3}$ м^3/моль.
p - ?	

$$V_0 = \frac{V}{\nu} = \frac{VM}{m}.$$

З урахуванням молярної маси кисню $M=32\cdot10^{-3}$кг/моль отримуємо:

1) $$V_0 = \frac{0,5\cdot32\cdot10^{-3}}{0,32}\frac{м^3}{моль} = 0,05\frac{м^3}{моль};$$

2) $$V_0 = \frac{0,5\cdot10^{-3}\cdot32\cdot10^{-3}}{0,32}\frac{м^3}{моль} = 5\cdot10^{-5}\frac{м^3}{моль}.$$

Порівняння отриманих значень V_0 з $V_{0норм.}$ показує, що в першому випадку $V_0 > V_{0норм.}$, газ достатньо розріджений і його можна вважати ідеальним. Записуємо рівняння стану ідеального газу для одного моля $pV_0 = RT$, виражаємо тиск: $p = \frac{RT}{V_0}$ (2) і проводимо обчислення $p = \frac{8,31\cdot290}{0,05}Па = 4,8\cdot10^4 Па$.

У другому випадку $V_0 << V_{0норм.}$, газ слід вважати реальним, а його тиск знаходити з рівняння Ван-дер-Ваальса (12.3):

$$p = \frac{RT}{V_0 - b} - \frac{a}{V_0^2}.$$

Знаходимо значення сталих Ван-дер-Ваальса a і b для кисню з таблиці: $a=0,130$ Н/(м^4·моль^2); $b = 3,1\cdot10^{-5}$м^3/моль. Обчислення за формулою (2) дає

$$p = \left[\frac{8,31\cdot290}{5\cdot10^{-5} - 3,1\cdot10^{-5}} - \frac{0,130}{\left(5\cdot10^{-5}\right)^2}\right]Па = 7,4\cdot10^7 Па.$$

Примітка: в останньому випадку обчислення тиску за формулою (1) приводить до невірного результату $p = 4,8\cdot10^7 Па$.

Відповідь: 1) $p = 4,8\cdot10^4 Па$; 2) $p = 7,4\cdot10^7 Па$.

Приклад 12.3. Знайти внутрішню енергію 1 моля кисню при нормальних умовах, розглядаючи його як реальний газ, і порівняти її з внутрішньою енергією ідеального газу при таких самих умовах.

$i = 5$ $T = 273К$ $a = 0,136^3$Н/(м^4·моль^2) $V_0=22,4\cdot10^{-3}$ м^3	
U'_μ, U_μ -?	

Розв’язання

Внутрішня енергія реального газу складається з складається з суми кінетичної енергії молекул і потенціальної енергії їх взаємодії. Для визначення останньої скористаємося тим, що робота проти сил притягання молекул дорівнює приросту енергії взаємодії: $dA = dW_p$. Сили притягання в рівнянні стану реального газу ураховує внутрішній тиск (12.2), який для ν = 1 моль дорівнює

$p_i = a/V_0^2$. Відповідно робота проти сил взаємодії може бути представлена у вигляді

$$dA = p_i dV_0 = \frac{a}{V_0^2} dV_0 . \qquad (1)$$

Інтегрування виразу (1) дає:

$$W_p = -\frac{a}{V_0} + \text{Const} . \qquad (2)$$

Внутрішня енергія реального газу залежить як від об'єму, так і від температури, тобто вираз для внутрішньої енергії повинен мати вигляд:

$$U = f(T) - \frac{a}{V_0} . \qquad (3)$$

Цей вираз при прямуванні об'єму газу до нескінченності повинен переходити у вираз для внутрішньої енергії ідеального газу, тобто

$$f(T) = C_v T = \frac{i}{2} RT .$$

Тоді внутрішня енергія молю реального газу дорівнюватиме:

$$U_\mu = C_v T - \frac{a}{V_0} = \frac{i}{2} RT - \frac{a}{V_0} . \qquad (4)$$

Підстановка заданих в умові задачі значень у формулу (4) дає

$$U'_\mu = 5/2 \cdot 8{,}31 \cdot 273 - \frac{0{,}136}{2{,}24 \cdot 10^{-2}} = 5666 \text{ Дж/моль.}$$

Для ідеального газу $U_\mu = 5/2 \cdot 8{,}31 \cdot 273 = 5672$ Дж/моль.

Відповідь: $U'_\mu = 5666$ Дж/моль; $U_\mu = 5672$ Дж/моль. Отже, взаємодія молекул приводить до зменшення потенціальної енергії реального газу.

Задачі для самостійного розв'язування

12.1. Знайти постійні a і b в рівнянні Ван-дер-Ваальса для вуглекислого газу (CO_2).

12.2. Азот масою m = 840г міститься у балоні об'ємом V = 10л при температурі t = -73^{0}C. Знайти тиск P газу на стінки балону, вважаючи газ реальним.

12.3. Знайти густину водяної пари в критичному стані.

12.4. У балоні об'ємом V=8 л знаходитися m=0,3 кг кисню. Знайти, яку частину η об'єму посудини займає власний об'єм молекул газу. Постійна Ван-дер-Ваальса для кисню $b = 3{,}17 \cdot 10^{-5}$ м^3 / моль, молярна маса $M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

12.5. На яку величину зріс би тиск води на стінки посудини, якби зникли сили притягання між її молекулами? Постійна Ван-дер-Ваальса для води

$a=0{,}554\,Па\cdot м^6/моль^2$, густина $\rho=1000кг/м^3$, молярна маса $M=18\cdot10^{-3}кг/моль$.

12.6. У посудині об'ємом V=10л знаходитися m=0,25кг азоту при температурі T=300 К. Яку частину тиску газу складає тиск, обумовлений силами взаємодії молекул? Постійні Ван-дер-Ваальса для азоту: $a=0{,}137Па\cdot м^6/моль^2$, $b=3{,}86\cdot10^{-5}м^3/моль$; молярна маса $M=28\cdot10^{-3}кг/моль$.

12.7. При якій температурі ν =1 кмоль аргону займатиме об'єм $V=0{,}1м^3$, якщо його тиск рівний $p=30\cdot10^6\,Па$? Постійні Ван-дер-Ваальса для аргону: $a=0{,}132\,Па\cdot м^6/моль^2$, $b=3{,}22\cdot10^{-5}\,м^3/моль$.

12.8. Один кіломоль кисню займає об’єм $V=0{,}056\,м^3$ при тиску $p=92МПа$. Знайти температуру газу. Постійні Ван-дер-Ваальса для кисню: $a=0{,}137\,Па\cdot м^6/моль^2$, $b=3{,}17\cdot10^{-5}\,м^3/моль$.

12.9. Визначити тиск, який створює $\nu=1$ моль кисню, якщо він займає об'єм V=0,5л при температурі T=300К. Порівняти отриманий результат з тиском, обчисленим за рівнянням Менделєєва - Клапейрона. Для кисню постійні Ван-дер-Ваальса: $a=0{,}137\,Па\cdot м^6/моль^2$, $b=3{,}17\cdot10^{-5}м^3/моль$.

12.10. У посудині об'ємом V=0,3 л знаходиться $\nu=1$ моль вуглекислого газу CO_2 при температурі T=300К. Визначити тиск газу: 1) за рівнянням Менделєєва - Клапейрона; 2) за рівнянням Ван-дер-Ваальса. Для вуглекислого газу постійні Ван-дер-Ваальса дорівнюють: $a=0{,}367\,Па\cdot м^6/моль^2$, $b=4{,}28\cdot10^{-5}\,м^3/моль$.

12.11. Для водню сили взаємодії між молекулами незначні, переважну роль грають власні розміри молекул. Написати рівняння стану такого газу. Знайти, відносну похибку, яка буде допущена при розрахунку кількості молів водню ν, що знаходяться в деякому об'ємі при температурі T=273 К і тиску P=28МПа, якщо не враховувати власний об'єм молекул. Для водню постійна Ван-дер-Ваальса $b=2{,}7\cdot10^{-5}\,м^3/моль$.

12.12. Тиск кисню P=7МПа, його густина $\rho=100\,кг/м^3$. Знайти температуру кисню. Постійні Ван-дер-Ваальса для кисню: $a=0{,}137\,Па\cdot м^6/моль^2$, $b=3{,}17\cdot10^{-5}\,м^3/моль$; молярна маса $M=0{,}032\,кг/моль$.

12.13. Внутрішню порожнину товстостінного сталевого балону наполовину заповнили водою при кімнатній температурі. Після цього балон герметично закупорили і нагріли до температури T=650К. Визначити тиск P водяної пари в балоні при цій температурі. Для води постійні Ван-дер-Ваальса: $a=0{,}554Па\cdot м^6/моль^2$, $b=3{,}04\cdot10^{-5}м^3/моль$, густина $\rho=1000\,кг/м^3$, молярна маса $M=18\cdot10^{-3}кг/моль$.

Розділ 13. Фазові переходи. Термодинамічні властивості рідини та пари

Тема: Фазові переходи. Рівняння Клапейрона - Клаузіуса. Поверхневий натяг. Властивості пари.

Основні поняття і формули.

● Термодинамічні системи поділяють на **гомогенні** та **гетерогенні.** Гомогенні системи є однорідними за своїми властивостями і не мають поверхонь розділу між будь-якими довільними частинами (гази, розчини і т. ін.). Термодинамічна система, яка складається з частин із різними властивостями, які розмежовані поверхнями розділу, має назву гетерогенної (наприклад, система, що є сукупністю різних агрегатних станів речовини, різні кристалічні модифікації речовини).

● **Фазові переходи.** Фазою в термодинаміці називають сукупність однорідних за своїми властивостями частин гетерогенної системи, тобто системи, яка знаходиться у фізично різних станах. Відповідно перехід речовини з одного стану (фази) в інший носить назву фазового переходу.

Розрізняють фазові переходи першого та другого роду.

● Фазові переходи I роду (плавлення, кристалізація і т. ін.) супроводжуються поглинанням або виділенням певної кількості теплоти, яку називають теплотою фазового переходу. Вони характеризуються постійністю температури, зміною ентропії та об'єму.

На рис. 13.1 показана діаграма станів речовини. На фазовій діаграмі крива 0–Тр (де Тр – потрійна точка) відповідає фазовому переходу з твердого стану в газоподібний – сублімації, крива Тр – К (де К – критична точка) – переходу з рідкого стану в газоподібний – випаровуванню, необмежена крива уверх від точки Тр – переходу із твердої фази в рідку – плавленню.

Кожній точка кривих на діаграмі станів відповідає рівновазі двох станів речовини, відповідно криві носять назву **кривих фазової рівноваги**. Виключення становить лише точка Тр, в якій в рівновазі знаходяться три фази. Вона носить назву **потрійної точки.**

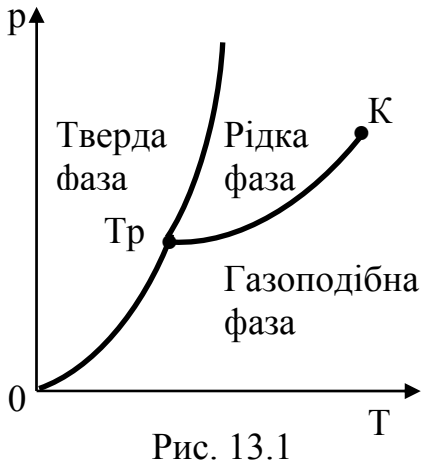


Рис. 13.1

Усі розглянуті переходи відносяться до фазових переходів першого роду. Температура Т, при якій відбувається фазовий перехід першого роду, залежить від зовнішнього тиску Р. Параметри р і Т зв'язані рівнянням Клапейрона – Клаузіуса

$$\frac{dp}{dT} = \frac{q}{T\left(v_2^{пит} - v_1^{пит}\right)}, \qquad (13.1)$$

де q – питома теплота фазового переходу; $v_1^{пит}$ і $v_2^{пит}$ – питомі об'єми речовини в початковому і кінцевому стані, $v^{пит} = \frac{V}{m}$ (m – маса речовини). Із рівняння (13.1) витікає, що знак похідної залежить від зростання чи зменшення питомого об'єму речовини при фазовому переході. Так, зокрема, для води, об'єм рідкої фази менше об'єму твердої фази, внаслідок чого при збільшенні тиску температура плавлення льоду знижується.

Оскільки в процесі фазового переходу температура залишається постійною, то зміна ентропії при фазовому переході може бути визначена через питому теплоту фазового переходу q за формулою

$$\Delta S = \frac{qm}{T}. \qquad (13.2)$$

З урахуванням останнього виразу рівнянню Клапейрона - Клаузіуса (13.1) можна надати вигляду

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\Delta S}{\left(V_2 - V_1\right)}. \qquad (13.3)$$

● Фазові переходи II роду, які не супроводжуються поглинанням або виділенням теплоти та зміною об'єму, зв'язані зі зміною симетрії системи: вище точки переходу система, за звичаєм, має вищу симетрію, ніж нижче точки переходу. Прикладами фазових переходів II роду є: перехід феромагнетиків (заліза, нікелю) при певному тиску і температурі у парамагнітний стан, перехід металів та деяких сплавів у надпровідний стан, зміна симетрії кристалів і т. ін.)

Розглянемо далі основні принципи теорії структурних фазових переходів другого роду (ФП- 2), запропонованих Ландау.

Для математичного опису ФП- 2 використовується величина η, яка визначає міру відхилення розташування атомів в менш симетричній фазі від їх розташування в більш симетричній фазі. Останній відповідає $\eta = 0$, а в менш симетричній фазі $\eta \neq 0$ і може бути як більше, так і менше нуля. Для переходів, пов'язаних з впорядкуванням, під η можна розуміти міру впорядкування; при переходах, пов'язаних із зміщенням атомів, величину зміщення. Величина η дістала назву "параметр порядку фазового переходу".

Розглядаючи термодинамічний потенціал кристала при заданих відхиленнях від симетричного стану (тобто при заданих η), ми можемо представити його як функцію тиску, температури і параметра порядку. Відмітимо, що у функції Φ(p,T,η) змінна η не рівноправна з p, T. Останні можуть бути задані довільно, а η необхідно визначити з умови

мінімуму Φ при заданих p, T. Безперервність зміни стану при ФП-2 математично виражається в тому, що поблизу від точки переходу η набуває скільки завгодно малих значень. Ця обставина дозволяє розкласти функцію $\Phi(p,T,\eta)$ в околі точки ФП в ряд по степеням параметра порядку:

$$\Phi(p,T,\eta)=\Phi_0+\alpha\eta+A\eta^2+B\eta^3+C\eta^4+..., \qquad (13.4)$$

де коефіцієнти α, A, B, C є функціями p і T! Вираження (13.4) не очевидне, оскільки точка ФП- 2 є особливою точкою функції $\Phi(p,T,\eta)$, а коефіцієнти також можуть мати особливості як функції тиску і температури. Ландау припустив, що наявність особливості не позначається на використаних в (13.4) членах розкладання. Прийнято також, що, якщо стани з $\eta = 0$ і $\eta \neq 0$ відрізняються своєю симетрією, то коефіцієнт $\alpha \equiv 0$, а коефіцієнт $A(p,T)$ повинен перетворюватися на нуль в самій точці переходу, в симетричній фазі $A > 0$, в несиметричній $A < 0$, що відповідає стійкому стану системи (тобто мінімуму Φ) при $\eta = 0$ і $\eta \neq 0$, відповідно. Крім того, щоб і в самій точці ФП функція Φ відповідала мінімуму, необхідно, щоб коефіцієнт $B \equiv 0$, а $C(p,T)>0$.

Можливі два випадки. Якщо $B \equiv 0$ через властивості симетрії, то для температури переходу T_0 залишається одна умова $A(p,T)=0$, воно визначає взаємозв'язок p та T, і на діаграмі p–T існуватиме лінія точок фазового переходу другого роду. Якщо $B \neq 0$, то точки переходу визначатимуться двома рівняннями $A(p,T)=0$ і $B(p,T)=0$. В цьому випадку на діаграмі p–T ми отримаємо ізольовані точки ФП- 2.

Очевидно, що лінія точок переходів на діаграмі p –T відповідає ФП-2, тому вважається, що $B(p,T) \equiv 0$ і вираз (13.4) можна записати у вигляді

$$\Phi(p,T,\eta)=\Phi_0(p,T)+A(p,T)\eta^2+C(p,T)\eta^4+... \qquad (13.5)$$

Далі було запропоновано вважати, що коефіцієнт $C > 0$ і постійна величина, а коефіцієнт A при постійному тиску поблизу точки T_0 можна записати так:

$$A(T)=a(T-T_0), \qquad (13.6)$$

де a - константа.

Запишемо умови мінімуму функції $\Phi(\eta)$:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}=2\eta(\Phi+2C\eta^2)=0; \\ &\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}=2(\Phi+6C\eta^2)>0. \end{aligned} \qquad (13.7)$$

Умови (13.7) записані для постійного значення тиску і фіксованої температури. Вони вірні по обидві сторони від температури ФП-2 рівній T_0. З (13.7) видно, що знаки коефіцієнтів A і C вибрані вірно: у фазі, де $\eta=0$, $A>0$ (див. другу нерівність з (13.7)). У фазі, де $A < 0$ значення $\eta = 0$

відповідає максимуму функції $\Phi(\eta)$. Таким чином, у фазі, де $\eta \neq 0$, з умови $A+2C\eta^2=0$ (див. першу рівність (13.7)) витікає, що $\eta^2=-\frac{A}{2C}$. Це і є температурна залежність параметра порядку, яку можна записати у вигляді:

$$\eta^2=\frac{a}{2C}(T_0-T). \qquad (13.8)$$

З (13.8) витікає, що величина η по мірі охолодження плавно зростає від значення $\eta=0$ при T_0, змінюючись згідно закону $\eta=f\left\{(T_0-T)^{1/2}\right\}$. Відмітимо також ще одну важливу обставину: в низько симетричній фазі функція $\Phi(\eta)$ має два мінімуми, які відповідають значенням $\eta<0$ і $\eta>0$.

Вираз (13.8) можна використовувати у якості критерію для пошуку параметра порядку ФП- 2 при дослідженні фазових переходів в конкретних кристалах. Тепер ми можемо визначити теплові властивості кристала поблизу температури ФП-2.

Визначимо температурну залежність ентропії кристала. Підставимо (13.8) у (13.5) і знайдемо диференціал отриманого виразу по T. В результаті маємо

$$S=-\frac{\partial\Phi}{\partial T}=S_0+\frac{a^2}{2C}(T-T_0)\ . \qquad (13.9)$$

З (13.9) витікає, що, при нагріві кристала, який знаходиться в низько симетричній фазі, його ентропія S зростає і в точці переходу T_0 безперервно переходить в ентропію симетричної фази S_0. Таким чином, ентропія кристала, як залежний параметр системи, при ФП-2 плавно, без стрибків, переходить у ентропію симетричної фази.

Визначимо теплоємність кристала при $p = const$.

$$C_p=T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p. \qquad (13.10)$$

Підставимо (13.9) в (13.10) і після диференціювання отримаємо, що поблизу температури ФП-2 теплоємність має наступний вигляд:

$$C_p=C_{p_0}+\frac{a^2T_0}{2C}, \qquad (13.11)$$

де C_{p_0} – теплоємність у симетричній фазі. Оскільки $C>0$, то $C_p>C_{p_0}$, тобто теплоємність зростає стрибком при переході в симетричну фазу. Разом з C_p мають місце стрибки і інших фізичних властивостей кристалу: C_V, коефіцієнтів теплового розширення, стисливості і т. ін.

Отже, можна зробити висновок, що при ФП-2 залежні параметри системи (V,S) стрибків не зазнають, а фізичні властивості, у тому числі симетрія кристала, зазнають аномальних змін (стрибки).

Л.Д. Ландау встановив правила, яким повинні відповідати зміни симетрії при ФП-2.

1. Оскільки термодинамічний потенціал Ф кристала не повинен залежати від вибору системи координат, то він буде інваріантним по відношенню до будь-якого перетворення системи координат, тобто по відношенню до тих елементів симетрії, сукупність яких утворює групу симетрії кристала в цій фазі. Наслідком цього і є розкладання Ф тільки по парних степенях η. Мінімуму Ф в симетричній фазі, де η=0, відповідають значення $A > 0$, в точці ПФ-2 A=0, а значення $A < 0$ відповідають максимуму Ф в цій точці. У низько симетричній фазі функція Ф має два мінімуми, які відповідають $\eta > 0$ і $\eta < 0$ при значеннях $A<0$. Таким чином, за фазовий перехід відповідальні зміні знаку A при $C > 0$.

2. В інтервалі температур, де $A > 0$, кристал має вищу симетрію, що відповідає початковій фазі, яка характеризується групою симетрії G_0, що зберігається і в самій точці ПФ-2. По іншу сторону точки переходу T_0, де $A < 0$, симетрія знижується, і група симетрії нової фази G є підгрупою початкової фази G_0.

3. Зміна симетрії при ПФ-2 відповідає одному з представлень початкової фази G_0, що не приводяться, причому, при переході від G_0 до G число елементів симетрії N (порядок групи) зменшується в два рази.

4. Параметр порядку η має бути пов'язаний з операціями симетрії так, щоб його зміни при ПФ-2 автоматично призводили до відповідних змін числа елементів симетрії. При ФП-2 зникають ті елементи симетрії в G_0, які не сумісні з групою симетрії η.

Термодинамічна теорія ФП-2, розроблена Л.Д. Ландау, згодом успішно застосовувалася для опису ФП-1, близьких до ФП- 2. Для опису цього в розкладанні термодинамічного потенціалу Ф в ряд по параметру порядку враховуються члени більш високого порядку.

Розглянемо простий приклад, коли

$$\Phi(p,T,\eta)=\Phi_0+A\eta^2+B\eta^4+C\eta^6+... \qquad (13.12)$$

У разі ПФ-1 в точці переходу T_0 повинні виконуватися дві умови: мінімуму Ф і рівності термодинамічних потенціалів початкової і кінцевої фаз. Запишемо ці умови

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}=0 \quad \text{і} \quad \Phi(T_0,\eta_0)=\Phi(T_0,0). \qquad (13.13)$$

З (13.12) і (13.13) витікає:

$$\begin{aligned} &2A_0\eta_0+4B\eta_0^3+6C\eta_0^5=0; \\ &A_0\eta_0^2+B\eta_0^4+C\eta_0^6=0 \end{aligned} \qquad (13.14)$$

Нехай $A = a(T - \Theta)$, де Θ – температура, при якій A=0 . Знайдемо η_0 і T_0. З (13.14) витікає, що

$$\eta_0^2 = -\frac{B}{2C}, \qquad (13.15)$$

$$T_0 = \frac{1}{4}\frac{B^2}{aC} + \Theta. \qquad (13.16)$$

Якщо покласти $B < 0$, а $C > 0$, в точці переходу ми набудемо дійсних значень η_0 – стрибка параметра порядку, що є ознакою ФП- 1.

При вибраних знаках коефіцієнтів $T_0 > \Theta$. При $T = \Theta$ коефіцієнт A=0, тобто втрачає стійкість симетрична фаза, в якій A > 0. Температура T_0, як зазначалося вище, відповідає умові рівності термодинамічних потенціалів початкової і кінцевої фаз. Співвідношення (13.16) указує на наявність температурного гістерезису фазового переходу, що також характерно для ФП-1.

● Властивості рідини.

Коефіцієнт поверхневого натягу рідини

$$\sigma = \frac{F}{l} \quad (13.17) \qquad \text{або} \qquad \sigma = \frac{\Delta E}{\Delta S}, \quad (13.17a)$$

де F – сила поверхневого натягу, яка діє на контур довжиною *l,* що обмежує поверхню рідини; ΔE – енергія, яку треба затратити для збільшення площі поверхні на величину ΔS (зміна вільної енергії поверхневого шару рідини).

Формула Лапласа для додаткового тиску, викликаного кривиною поверхні рідини

$$\Delta p = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \qquad (13.18)$$

де R_1 і R_2 - радіуси кривини двох взаємно перпендикулярних перерізів поверхні рідини. Радіус вважається додатним, якщо меніск опуклий, і від'ємним, якщо меніск угнутий.

Висота підняття рідини у капілярі $h = \frac{2\sigma\cos\theta}{r\rho g}$, (13.19)

де r – радіус капіляра; ρ – густина рідини; θ – крайовий кут. При повному змочуванні θ = 0, при повному незмочуванні θ = 180°.

Тиск насиченої пари над вгнутою сферичною поверхнею рідини – менший, а над опуклою – більший, ніж над плоскою поверхнею, на величину, яка дорівнює

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{r} \cdot \frac{\rho_п}{\rho_р}, \qquad (13.20)$$

де r – радіус сфери, $\rho_п$ – густина насиченої пари при даній температурі; $\rho_р$ – густина рідини .

Методичні вказівки.

● При розрахунку сил поверхневого натягу слід ураховувати, що ці сили діють вздовж будь-якого контуру, який лежить на поверхні рідини. При цьому сила поверхневого натягу, яка прикладена до кожного елементу цього контуру, є перпендикулярною до нього і направлена по дотичній до поверхні.

Якщо у якості такого контуру обрати границю дотику вільної поверхні рідини з твердим тілом, то відповідна сила поверхневого натягу буде силою, з якою поверхневий шар рідини діє на тверде тіло. Повну силу можна обчислити за формулою (13.17) лише за умовою, що сили поверхневого натягу, прикладені до усіх елементів контуру, є паралельними між собою.

Яким би тонким не був шар рідини (наприклад, у мильній бульбашці) він завжди має дві поверхні – зовнішню і внутрішню, вздовж кожної з яких діє сила поверхневого натягу.

● При розрахунку надлишкового поверхневого тиску, який надає формула (13.18) слід пам'ятати, що значення Δp визначається кривизною поверхні у даній точці. Тому у випадку поверхні змінної кривизни поверхневий тиск буде різним у різних точках тієї самої рідини, які лежать поблизу її поверхні. Наприклад, поверхня краплі, яка висить на змочуваному нею твердому тілі, має кривизну, яка є додатною знизу і від'ємною зверху.

У найпростіших випадках сферичних поверхонь (маленька краплина, повітряна бульбашка всередині рідини) доцільно викривлену поверхню рідини розглядати як пружну плівку, що стискає рідину або газ, які охоплює.

У всіх задачах на розрахунок висоти підйому рідини у капілярах, якщо неможливо безпосередньо провести обчислення за формулою (13.19), слід виходити з умови статичної рівноваги стовпа рідини: різниця тисків, що діють на стовп знизу і зверху повинна дорівнювати гідростатичному тиску стовпа рідини на його основу, який дорівнює ρgh.

● Парою називають газ, який знаходиться нижче критичної температури. В залежності від густини пара підпорядковується рівнянню стану ідеального чи реального газу, при цьому критерій є таким самим, як для будь-якого газу.

Важлива особливість пари полягає в тому, що при ізотермічному стисканні її густина і тиск зростають лише до того, поки пара не стає насиченою. При подальшому зменшенні об'єму починається конденсація пари, тобто перетворення у рідину. При цьому густина і тиск маси пари, що залишається, не змінюються і дорівнюють густині і тиску насиченої пари при даній температурі (надаються в таблицях).

Таким чином, при обчисленні тиску і густини пари за будь-яким рівнянням стану реальними є лише ті їхні значення, які не перевищують

значень для насиченої пари при заданій температурі. У протилежному випадку слід вважати пару при даних умовах насиченою і за значення p та ρ приймати табличні значення.

У випадку, коли насичена пара знаходиться над плоскою поверхнею рідини, її тиск визначається тільки температурою. Над викривленою поверхнею рідини тиск насиченої пари залежить також від кривизни поверхні. Ця залежність є дуже слабкою, її ураховують лише в явищі конденсації при наявності в парі краплинок мікроскопічних розмірів, тобто дуже великої кривизни.

Приклади розв'язання задач

Приклад 13.1. Дві краплини ртуті радіусом r=1 мм кожна, зливаються в одну. Скільки теплоти Q при цьому виділяється?

$r_1 = r_2 = r = 1 \cdot 10^{-3}$ м $\sigma = 0{,}5$ Н/м	Розв'язання Кількість теплоти Q дорівнює енергії ΔE, яка звільнюється тому, що зменшилася площа поверхні. Цю енергію можна знайти з формули (13.17а)
Q - ?	

$$\Delta E = \sigma \Delta S, \qquad (1)$$

де σ - коефіцієнт поверхневого натягу ртуті; ΔS - площа, на яку зменшилась поверхня однієї краплі порівняно з площею поверхні двох попередніх.

$$\Delta S = 4\pi r^2 \cdot 2 - 4\pi R^2, \qquad (2)$$

де r – радіус маленької краплі; R – радіус великої краплі.

Радіус великої краплі можна знайти з тих міркувань, що об'єм великої краплі повинен дорівнювати двом об'ємам малої краплі.

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot 2; \text{ звідки } R = \sqrt[3]{2}r.$$

Підставимо знайдений для R вираз у (2): $\Delta S = 4\pi r^2\left(2 - \sqrt[3]{4}\right)$.

Тоді $Q = \Delta E = \sigma \cdot 4\pi r^2\left(2 - \sqrt[3]{4}\right)$.

Перевіримо одиницю вимірювання: $[Q] = [\sigma]\left[r^2\right] = \frac{Н \cdot м^2}{м} = Н \cdot м = Дж$.

Коефіцієнт поверхневого натягу для ртуті знаходимо з таблиць: σ=0,5 Н/м.
Обчислення:

$$Q = 0{,}5 \cdot 4 \cdot 3{,}14 \cdot \left(1 \cdot 10^{-3}\right)^2 \cdot \left(2 - \sqrt[3]{4}\right) = 2{,}57 \cdot 10^{-6} \text{ Дж} = 2{,}57 \text{ мкДж}.$$

Відповідь: Q=2,57 мкДж.

Приклад 13.2. Дві посудини об'ємом V=10л кожна наповнені сухим повітрям при тиску p_0=1атм і температурі $t_0 = 0°C$. У першу ввели m_1=3г води, у другу – m_2= 10г і нагріли посудини до $t = 90°C$. Визначити тиск вологого повітря у кожній посудині при цій температурі.

$V_1=V_2=V=10^{-2}м^3$ $p_0=1,013\cdot10^5$ Па T_0=273К T=363К $m_1=3\cdot10^{-3}$ кг $m_2=10^{-2}$ кг $M=18\cdot10^{-3}$ кг/моль R=8,31Дж/(моль·К)	Розв'язання Вода, що введена в посудину, випаровується, і тиск в посудині згідно закону Дальтона стає рівним сумі парціальних тисків повітря і пари води. Парціальний тиск повітря в обох посудинах є однаковим, і може бути визначеним за законом Шарля, оскільки незмінна маса повітря нагрівається в постійному об'ємі (тепловим поширенням посудини нехтуємо):
p_1; p_2 - ?	

$$p = p_0 \cdot \frac{T}{T_0} = 1,013\cdot10^5 \cdot \frac{363}{273} Па = 1,347\cdot10^5 Па.$$

При визначенні парціального тиску пари води слід пам'ятати, що при наявності відкритої поверхні води, він не може перевищувати тиск насиченої пари при даній температурі. Тобто перш за все необхідно визначити, випаровування якої маси $m_{н.п.}$ води відповідає насиченню пари у заданому об'ємі.

З таблиці знаходимо тиск насиченої пари $p_{н.п.}$=70,1кПа при температурі $t = 90°C$ і за рівнянням Менделєєва – Клапейрона визначаємо $m_{н.п.}$:

$$m_{н.п.} = \frac{M}{RT} pV = \frac{18\cdot10^{-3}\cdot70,1\cdot10^3\cdot10^{-2}}{8,31\cdot363} = 4,18\cdot10^{-3} (кг).$$

Отже, у першій посудині вода випаровується повністю, а тиск пари $p_{п1}$ за рівнянням Менделєєва – Клапейрона дорівнює

$$p_{п1} = \frac{m_1}{M}\cdot\frac{RT}{V} = \frac{3\cdot10^{-3}\cdot8,31\cdot363}{18\cdot10^{-3}\cdot10^{-2}} = 0,503\cdot10^5 (Па).$$

Повний тиск вологого повітря у першій посудині дорівнює

$$p_1=p+p_{п1} = 1,347\cdot10^5 Па + 0,503\cdot10^5 Па = 1,850\cdot10^5 Па.$$

У другій посудині випаровується тільки 4,18г води з 10г, і тиск вологого повітря дорівнює

$$p_2 = p + p_{н.п.} = 1,347\cdot10^5 Па + 0,701\cdot10^5 Па = 2,048\cdot10^5 Па$$

Відповідь: $p_1 = 1,850\cdot10^5 Па$; $p_2 = 2,048\cdot10^5 Па$.

Приклад 13.3. Що відбудеться з краплею води радіусу r, що попала у перенасичену пару, температура якої $t = 90°C$ і тиск p=80кПа. Розглянути два випадки: 1) $r = 0,5 \cdot 10^{-8}$ м; 2) $r = 5 \cdot 10^{-8}$ м

$t = 90°C$ p=80кПа R=8,31Дж/(моль·К) $M = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль $\rho_р = 1 \cdot 10^3$ кг/м^3 1) $r = 0,5 \cdot 10^{-8}$ м 2) $r = 2 \cdot 10^{-8}$ м σ = 0,073Н/м	Розв'язання З таблиці залежності тиску насиченої пари від температури знаходимо тиск насиченої пари при температурі $t = 90°C$: $p_{н.п.}$=70,1кПа, тобто пар, про який йде мова в умові задачі, дійсно є пересиченим. Його стан є нестійким. При контакті пари зі своєю рідиною почнеться конденсація, яка припиниться тільки, коли маса пари зменшиться настільки, що вона перестане бути пересиченою.
$p'_{н.п.}$ - ?	

Але знайдене з таблиці значення відповідає тиску насиченої пари над плоскою поверхнею рідини. Над опуклою поверхнею (біля краплі) тиск насиченої пари збільшується на величину (див. (13.20)) $\Delta p = \frac{2\sigma}{r} \cdot \frac{\rho_п}{\rho_р}$ (2), де σ – коефіцієнт поверхневого натягу рідини, r – радіус краплі, $\rho_п$ і $\rho_ð$ – відповідно густини пари і рідини. В залежності від величини радіусу краплі можливі два випадки:

а) $p'_{н.п.} = p_{н.п.} + \Delta p > p$, де p – дійсний тиск пари. У цьому випадку пар, який буде пересиченим відносно рідини з плоскою поверхнею, є ненасиченим відносно краплі, і вона випаровується.

б) $p'_{н.п.} = p_{н.п.} + \Delta p < p$. У цьому разі пара є пересиченою і відносно рідини з плоскою поверхнею, і відносно краплі. Крапля зростає за рахунок конденсації пари, яка триває, доки її тиск не знизиться до значення $p'_{н.п.}$.

Для розрахунку Δp слід визначити густину пари $\rho_п$. Робимо це за законом Менделєєва-Клапейрона, оскільки при тиску, під яким знаходиться пара, її можна вважати ідеальним газом.

$$\rho_{п.} = \frac{pM}{RT} = \frac{80 \cdot 10^3 \cdot 18 \cdot 10^{-3}}{8,31 \cdot 363} \text{ кг/м}^3 = 0,477 \text{ кг/м}^3.$$

За формулою $p'_{н.п.} = p_{н.п.} + \frac{2\sigma}{r} \cdot \frac{\rho_п}{\rho_р}$ розраховуємо істинний тиск насиченої пари біля кожної з краплинок.

1) $p'_{н.п.} = \left(70,1 \cdot 10^3 + \frac{2 \cdot 0,073 \cdot 0,477}{0,5 \cdot 10^{-8} \cdot 10^3}\right) \text{Па} = 84,0 \cdot 10^3 \text{ Па}$=84кПа.

Отримане значення $p'_{н.п.}$ більше за тиск пари p=80кПа. Таким чином, має місце перший випадок і крапля випаровується.

2) $p'_{н.п.} = \left(70{,}1\cdot 10^3 + \dfrac{2\cdot 0{,}073\cdot 0{,}477}{2\cdot 10^{-8}\cdot 10^3}\right)\text{Па} = 73{,}6\cdot 10^3\,\text{Па} = 73{,}6\,\text{кПа}.$

Значення $p'_{н.п.}$ менше заданого тиску пересиченої пари, що відповідає другому випадку. Пересичена пара конденсується, поки не стане насичуючою, а крапля зростає у розмірі.

Зауваження. Можна уявити пару, яка містить велику кількість різних за розміром краплин рідини. Може статися, що по відношенню до великих крапель пара буде пересиченою (тобто її тиск буде більшим, ніж у стані рівноваги при тій самій температурі), а відносно маленьких – ненасиченою. У цьому разі виникне потік пари від поверхні маленьких крапель до великих, тобто рідина, яка випаровується з поверхні малих крапель, буде конденсуватися на поверхні великих, і вони будуть зростати за рахунок малих. Таким чином, стан системи, в якій на одній висоті одночасно є й плоска поверхня, і окремі краплі не є рівноважним, бо при рівновазі тиск насиченої пари на одній висоті повинен бути однаковим.

Приклад 13.4. Знайти зріст температури плавлення льоду поблизу $t = 0°C$ при збільшенні тиску на $\Delta p = 1$атм, якщо питомий об'єм льоду на $\Delta V' = 9{,}1\cdot 10^{-5}$ м^3/кг більший за питомий об'єм води.

T=273К $\Delta p = 1\cdot 10^5$ Па $\Delta V' = 9{,}1\cdot 10^{-5}$ м^3/кг $q = 3{,}35\cdot 10^5$ Дж/кг ΔT -?	Розв'язання Згідно рівнянню Клапейрона – Клаузіуса (13.1) $\dfrac{\Delta p}{\Delta T} = \dfrac{q}{T\left(v_в^{пит} - v_л^{пит}\right)} = -\dfrac{q}{T\Delta V'}$.

Звідки $\Delta T = -\Delta p\dfrac{T\Delta V'}{q}$, де q – питома теплота фазового переходу, яку знаходимо з таблиці: питома теплота плавлення льоду $q = 3{,}35\cdot 10^5$ Дж/кг.

Обчислення дає: $\Delta T = -\dfrac{1\cdot 10^5\cdot 273\cdot 9{,}1\cdot 10^{-5}}{3{,}35\cdot 10^5} = -7{,}5\cdot 10^{-3}$ К.

$$[\Delta T] = \frac{\text{Па}\cdot\text{К}\cdot\text{м}^3\cdot\text{кг}^{-1}}{\text{Дж}\cdot\text{кг}^{-1}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^{-2}\cdot\text{м}^3\cdot\text{К}}{\text{Н}\cdot\text{м}} = \text{К}$$

Відповідь: температура плавлення льоду зменшиться на 7,5мК.

Приклад 13.5. Знайти рівноважне значення параметра порядку для системи, що має наступний вигляд розкладання в ряд вільної енергії по параметру порядку $F(p,T,\varphi)=F_0(p,T)+A\varphi^2-C\varphi^3+B\varphi^4$. Враховуючи, що $A=a(T-T^*)$, де a, C – позитивні константи. Показати, що в такій системі має місце фазовий перехід I роду; визначити температуру фазового переходу.

Розв'язання

Умова мінімуму термодинамічного потенціалу по змінній φ $\left(\partial F/\partial\varphi=0\right)$ дає $2A\varphi-3C\varphi^2+4B\varphi^3=0$. Відповідний вираз має 3 розв'язки:

$$\varphi_{\pm}=\frac{3}{8}\frac{C}{B}\left[1\pm\left[1-\frac{32AB}{9C^2}\right]^{\frac{1}{2}}\right];\qquad \varphi=0.$$

Звернемо увагу, що розв'язок зі знаком мінус перед квадратним коренем не відповідає умові мінімуму термодинамічного потенціалу, оскільки в цьому випадку друга похідна від F виявляється негативною, в чому можна переконатися підстановкою цього кореня у вираз

$$\partial^2F/\partial\varphi^2=2a(T-T^*)-6C\varphi+12B\varphi^2$$

Рішення $\varphi=0$ відповідає симетричній фазі, а $\varphi\neq0$ - несиметричній фазі.

Існування відмінного від нуля коефіцієнта при φ^3 допускає можливість рівності термодинамічних потенціалів обох фаз при деякій температурі T_c, тобто

$$a(T_c-T^*)\varphi_c^2-C\varphi_c^3+B\varphi_c^4=0, \qquad (1)$$

де значення $\varphi_c=\varphi+T=T_c$ (2) визначається формулою:

$$\varphi_c=\frac{3}{8}\frac{C}{B}\left[1+\left[1-32aB\frac{T_c-T^*}{9C^2}\right]^{1/2}\right]. \qquad (3)$$

Оскільки $\varphi_c\neq0$, ділення (1) на φ_c дає: $a(T_c-T^*)-C\varphi_c+B\varphi_c^2=0.$ (4)

Порівнюючи рівняння (1) і (4) при $\varphi=\varphi_c$, маємо $2a(T_c-T^*)=C\varphi_c$

Звідси, підставляючи вираз (2) для φ_c, отримуємо рівняння для визначення температури фазового переходу

$$\left[16aB\frac{T_C-T^*}{3C^2}-1\right]^2=1-32aB\frac{T_C-T^*}{9C^2}.$$

З останнього рівняння отримуємо для T_c: $T_c=T^*+\dfrac{C^2}{4aB}$. (5)

Таким чином, температура фазового переходу I роду є вищою за T*.

Відповідь: $T_c=T^*+\dfrac{C^2}{4aB}$.

Приклад 13.6. Вичислити теплоту фазового переходу для системи, в якій залежність термодинамічного потенціалу F від параметра порядку φ має вигляд $F(p,T,\varphi)=F_0+a(T-T^*)\varphi^2-C\varphi^3+B\varphi^4$.

Розв'язання

Теплота Q фазового переходу визначається зміною ентропії системи *S* при переході: $Q=T_c\Delta S.$ (1)

У симетричній фазі ентропія системи $S=-\partial F/\partial T$ дорівнює

$$S_{сим}=S_0=-\partial F_0/\partial T. \quad (2)$$

У несиметричній фазі аналогічно маємо:

$$S_{несим}=-\partial F_0/\partial T-a\varphi^2 \quad (3)$$

Для зміни ентропії Δ *S* на основі (2) і (3) отримуємо

$$\Delta S=S_{сим}-S_{несим}=a\varphi^2$$

Далі з урахуванням (1) маємо $Q=T_c\cdot a\varphi^2.$ (4)

Для остаточного визначення Q в (4) необхідно підставити значення φ в точці фазового переходу $\varphi\big|_{t=t_c}$. Для цього можна скористатися формулою (4) попереднього завдання. В результаті знаходимо

$$Q=\frac{T_c aC^2}{4B^2}=\left[T^*+\frac{C^2}{4aB}\right]\frac{aC^2}{4B^2}.$$

Приклад 13.7. Показати, що в моделі, прийнятій в завданнях 13.5 і 13.6, симетрична фаза абсолютно нестійка при температурах $T<T^*$. Знайти температуру T^{**}, при якій втрачає стійкість несиметрична фаза.

Розв'язання

Симетрична фаза стає нестійкою при таких температурах, коли друга похідна від термодинамічного потенціалу F по параметру порядку φ негативна. Гранична температура T виникнення нестійкості відповідає рівності нулю другої похідної. Оскільки в симетричній фазі φ = 0, то температура T, що відповідає втраті стійкості, визначається рівністю

$$\partial^2F/\partial\varphi^2=2a(T-T^*)=0.$$

Звідси випливає, що втрата стійкості симетричної фази відбувається при $T=T^*$. Для визначення температури T^{**}, при якій втрачає стійкість несиметрична фаза, слід так само досліджувати вираз для $\frac{\partial^2F}{\partial\varphi^2}$ при $\varphi\neq 0.$

Проте результат можна отримати і простіше, якщо використати отримане в прикладі 13.5 явне вираження для рівноважного значення параметра порядку $\overline{\varphi}$ в несиметричній фазі. Оскільки $\overline{\varphi}$ дійсне, то підкорінний вираз, що входить у формулу (3) прикладу 13.5 має бути додатним. Звідси негайно отримуємо

$$1-32(T-T^*)aB/9C^2 \geq 0 . (1)$$

Граничне значення температури, яка задовольняє співвідношенню, є

$$T^{**}=T^*+9C^2/32aB.$$

Задачі для самостійного розв'язування

13.1. Чому дорівнює додатковий тиск ΔP у середині мильної бульки діаметром d = 1см? Коефіцієнт поверхневого натягу мильного розчину вважати рівним $\alpha = 40\cdot10^{-3}$Н/м.

13.2. Визначити тиск P у середині бульбашки повітря, яка утворилася у воді на глибині h = 2м. Діаметр бульбашки d = 4мм. Атмосферний тиск P_0 вважати нормальним.

13.3. Яку роботу A треба виконати, щоб видути мильну бульку діаметром d = 5см.

13.4. Дві краплини води з однаковими радіусами r = 0,5мм злились в одну велику. Визначити кількість енергії W, яка при цьому виділилась.

13.5. Краплину ртуті радіусом r = 4мм розбили на дві однакові . Яка робота при цьому виконана?

13.6. Скільки краплин води N міститься у V = 1см^3 води, якщо вона витікає з отвору трубки внутрішнім діаметром d = 1,8мм? Вважати діаметр шийки краплі рівним внутрішньому діаметру трубки.

13.7. При оплавленні вертикально розташованого свинцевого дроту з нижчого кінця утворилось і послідовно відірвалось N = 10 краплин. На скільки зменшилась при цьому довжина l дроту? Коефіцієнт поверхневого натягу розплавленого свинцю α= 0,47Н/м.

13.8. На яку висоту h підніметься спирт у капілярі, внутрішній радіус якого r = 0,2см. Змочування вважати повним.

13.9. Визначити внутрішній радіус капіляра r, якщо при зануренні у бензол рідина піднімається у ньому на висоту h = 14мм. Змочування вважати повним.

13.10. Визначити масу m спирту у капілярі, внутрішній радіус якого r=0,5мм. Змочування при зануренні капіляра у спирт вважати повним .

13.11. Знайти різницю рівнів Δh води у двох сполучених капілярах з внутрішніми радіусами r_1= 1мм і r_2 = 2мм.

13.12. Визначити тиск насиченої пари поблизу поверхні краплі радіусу $r = 1\cdot10^{-7}$ м при температурі 95°C.

13.13. Герметична посудина заповнена сухим повітрям при атмосферному тиску $p = 1.01\cdot10^5$ Па і температурі $t_0 = 0$ °C. В посудину вводять деяку масу води. Визначити тиск, який установиться всередині посудини. Розглянути два варіанти початкових умов. а) об'єм посудини $V = 20$ л, маса води $m = 19$ г; б) $V = 30$ л, $m = 15$ г.

13.14. Знайти питомий об'єм насиченої водяної пари при нормальному тиску, якщо відомо, що зменшення тиску на $\Delta p = 3,2$ кПа приводить до зменшення температури кипіння води на $\Delta T = 0,9$ К.

13.15. Визначити тиск насиченої водяної пари при температурі $t = 101,2°C$, вважаючи його ідеальним газом.

13.16. Пружність насиченої ртутної пари при температурах $t_1 = 100°C$ і $t_2 = 120°C$ дорівнює відповідно p_1=0,28 мм рт.ст. і p_2=0,76 мм рт.ст. Знайти середнє значення питомої теплоти випаровування ртуті в цьому інтервалі температур.

Тестові завдання

Вибрати вірну відповідь:

1. Рівняння стану реального газу носить назву

1. рівняння Менделєєва – Клапейрона 2. рівняння Клапейрона-Клаузіуса
3. основного рівняння МКТ 4. рівняння Ван-дер-Ваальса

2. Речовину з газоподібного стану в рідкий за рахунок стискання без охолодження можливо перевести, якщо температура газу Т

1. вище критичної температури $T_к$
2. дорівнює критичній температурі $T_к$
3. нижче критичної температури $T_к$
4. співвідношення температур Т і $T_к$ не впливає на результат

3. **Установити відповідність** між кривою фазовою рівноваги та точкою її закінчення на фазовій діаграмі

1. Крива фазової рівноваги „тверде тіло – рідина ”	А. критична точка
2. Крива фазової рівноваги „рідина – пара ”	Б. нескінченість
3. Крива фазової рівноваги „тверде тіло – пара ”	В. потрійна точка
	Г. початок координат

Вибрати вірну відповідь:

4. Коефіцієнт поверхневого натягу рідини зі зростанням температури

1. зростає; 2. зменшується; 3. не змінюється

5. Теплота виділяється при

1. пароутворенні; 2. кипінні;
3. твердінні розплавлених металів; 3. плавленні;

6. З поглинанням теплоти відбувається процес

1. плавлення твердих тіл; 2. конденсації пари у рідину;
3. твердіння розплаву; 4. кожний з процесів.

7. З виділенням теплоти відбувається процес:

1. плавлення твердих тіл 2. конденсація пари у рідину
3. сублімація 4. пароутворення

8. Значення коефіцієнту в'язкості рідини зі зростанням температури

1. збільшується 2. зменшується
3. не змінюється 4. зміна залежить від роду рідини

9. Тиск насиченої пари при зростанні температури

1. збільшується
2. не змінюється
3. зменшується
4. характер поведінки залежить від природи речовини

10. Залежність рівноважного тиску від температури двохфазної системи надає

1.рівняння Клапейрона – Менделєєва 2. основне рівняння МКТ

3. рівняння Клапейрона – Клаузіуса 4. закон збереження енергії

10. Тиск насиченої пари буде найменшим біля

1. плоскої поверхні 2. опуклої поверхні

3. вгнутої поверхні 4. тиск буде однаковим

12. Чим відрізняється теорія Ландау від теорії середнього поля?

1. тим, що в теорії Ландау враховуються просторові кореляції параметра порядку.

2. теорія Ландау тотожна теорії середнього поля.

3. тим, що в теорії Ландау не враховуються просторові кореляції параметра порядку.

13. За яких умов в теорії Ландау фазових переходів 2-го роду можна нехтувати флуктуаціями параметра порядку?

1. якщо модуль $(T - T_0) < \varepsilon$ $(0 < \varepsilon < 1)$

2. якщо розмірність простору більше 4

3. якщо розмірність простору менше 4

14. За яких умов в теорії Ландау фазових переходів 2-го роду можна нехтувати флуктуаціями параметра порядку?

1. якщо модуль$(T - T_0) > \varepsilon$ $(0 < \varepsilon < 1)$

2. якщо модуль$(T - T_0) < \varepsilon$ $(0 < \varepsilon < 1)$

3. якщо розмірність простору менше 4

15. Який вигляд повинна мати функція розподілу Гіббса в теорії Ландау фазових переходів 2-го роду?

1. комбінацію одночасткових функцій розподілу

2. суми одночасткових функцій розподілу

3. однорідній функції параметра порядку

16. Що є теорія фазових переходів Гінзбурга – Ландау - Вільсона?

1. окремий випадок теорії Ландау

2. узагальнення теорії Ландау з урахуванням міжчастинкових кореляцій.

3. теорію, що зв'язує наближення середнього поля з теорією Ландау

17. Як пов'язані між собою критичні показники в теорії фазових переходів 2-го роду?

1. є незалежними величинами, що характеризують критичну поведінку термодинамічних коефіцієнтів, пов'язаних з другими похідними різних термодинамічних потенціалів

2. пов'язані між собою і можуть бути виражені через будь-які два

3. можуть бути розбиті на дві групи незалежних критичних індексів

18. Яка умова є одним з критеріїв застосовності теорії Ландау?

1. умова крихти флуктуації параметра порядку по відношенню до його рівноважного значення.

2. умова крихти середнього значення параметра порядку в порівнянні з його термодинамічними флуктуаціями.

3. умова зразкової рівності середнього значення параметра порядку і його флуктуацій

19. Які міри параметра порядку містить розкладання Ландау вільної енергії для критичної точки пара-рідина?

1. тільки парні міри параметра порядку

2. тільки непарні міри параметра порядку

3. парні і непарні міри параметра порядку

Частина III. ЕЛЕКТРИКА ТА МАГНЕТИЗМ

Попередні відомості.

В розділі курсу загальної фізики “Електромагнетизм” найбільшу увагу приділяють основним поняттям і загальним принципам, які пов’язані з електричними та магнітними явищами.

При вивченні розділу “Електрика та електромагнетизм” маємо, перш за все, усвідомити, що посередником електромагнітної взаємодії між зарядженими або намагніченими тілами, або тілами, по яким тече струм, є особливий вид матеріального посередника – електромагнітне поле. До висновку про реальне існування електромагнітного поля призводить увесь розвиток учення про електричні та магнітні явища.

Взаємодію між нерухомими у даній системі відліку зарядами називають електростатичною й описують за допомогою тільки електричного поля.

Додаткову взаємодію, що виникає у системі відліку, відносно якої заряди рухаються, пов’язують із магнітним полем, утворюваним зарядом у разі руху.

Таким чином, розподіл електромагнітного поля на електричне та магнітне є відносним і залежить від вибору системи відліку, але він досить корисний при вивченні основ електромагнетизму.

Заряди та їх властивості.

Електричний заряд частинки є одною з основних, первинних її характеристик.

Властивості електричних зарядів:

заряди існують у двох видах: позитивні та негативні;

заряди взаємодіють між собою. Заряди однакового знаку відштовхуються, протилежних – притягуються (рис.1);

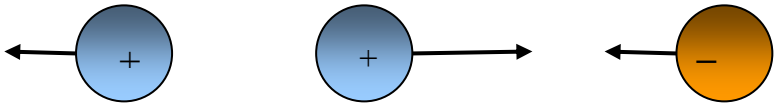


Рис.1

заряди дискретні, причому існує найменший (елементарний) заряд, величина якого дорівнює $1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл. Всі інші заряди є цілими кратними елементарному. Електрон є носієм елементарного негативного заряду; протон (ядро атома гідрогену $^{1}_{1}\mathrm{H}$) – носій елементарного позитивного заряду Якщо заряд тіла дорівнює Q, то $Q = \pm N|e|$, де N – кількість некомпенсованих електронів, а e – заряд електрона;

заряд є релятивістським інваріантом, тобто його величина не залежить від того, рухається він чи покоїться;

виконується закон збереження заряду: алгебраїчна сума електричних зарядів будь-якої замкненої системи (сумарний заряд) не змінюється, які б процеси не відбувалися усередині цієї системи: $\sum_{i=1}^{N} q_i = \text{const}$.

Атоми та молекули в цілому нейтральні, але складаються з позитивно та негативно заряджених частинок, які рознесені у просторі: у центрі атому розташовано позитивно заряджене ядро малих розмірів, на великій відстані від нього (у десятки разів більших, ніж розмір ядер) рухаються електрони, кількість яких дорівнює кількості протонів у ядрі, тобто порядковому номеру атома у таблиці Менделєєва. Таким чином, нейтральні атоми та молекули утворюють біля себе електричні та магнітні поля.

Електрони порівняно легко відділити від атома, тобто його іонізувати, тому якщо тіло заряджене позитивно, то в ньому є нестача електронів, якщо негативно – то їх надлишок. Електризація тіл може здійснюватися різними способами: зіткненням (тертям), електростатичною індукцією (під впливом зовнішнього електричного поля) і т. ін.

Взаємодія між тілами здійснюється за допомогою матеріальних носіїв взаємодії – полів (наприклад, гравітаційного поля, електричного поля і т. ін.), причому взаємодія передається від однієї точки поля до іншої з кінцевою швидкістю.

Наявність електричного чи магнітного поля можна встановити завдяки впливу на електричний заряд (нерухомий, або, у випадку магнітного поля, той, що рухається). Це дозволяє ввести силові (векторні) характеристики полів – вектор напруженості електричного поля $\vec{E}$ та вектор магнітної індукції $\vec{B}$, і розглядати електричне та магнітне поле як векторні функції координат x,y,z та часу t.

Векторні та скалярні поля. Оператор ∇.

● Векторне поле можна зображати сукупністю стрілок, довжина й напрям яких відображують векторне поле в точках, звідки починаються стрілки (рис.2а).

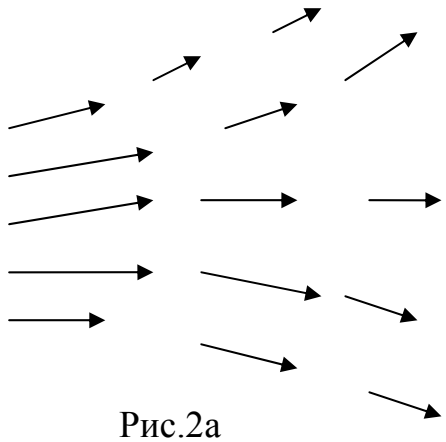


Рис.2а

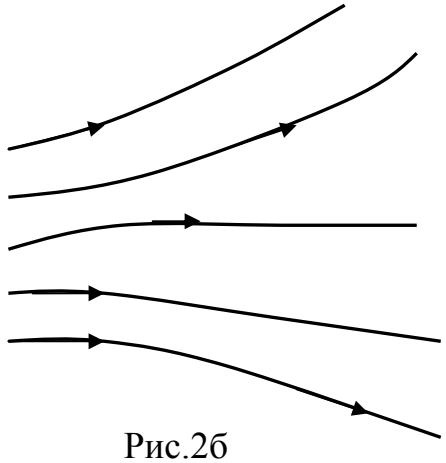


Рис.2б

Більш наглядною є картина векторного поля, отримана за допомогою векторних ліній, дотичні до яких у кожній точці співпадають за напрямком із вектором, що є характеристикою поля (рис.2б). Щоб не втратити інформацію про величини векторів, домовились, що кількість ліній на одиницю площі, поперечній до ліній, тобто їх густота, прямо пропорційна значенню відповідної векторної характеристики поля. Картина векторних ліній поля дозволяє отримати суттєву інформацію про його властивості.

- Якщо поле змінюється з часом, то цю зміну можна описати за допомогою похідної за часом від його характеристики. Аналогічно його зміну у просторі можна охарактеризувати, розглянувши його похідні за координатами.

Основні диференціальні дії, які можна виконувати над скалярним полем u або векторним полем $\vec{A}$, яке може бути представлено у вигляді векторної суми із складових у вибраній системі координат ($\vec{A} = \vec{i}A_x + \vec{j}A_y + \vec{k}A_z$), можна записати за допомогою символу $\vec{\nabla}$ (оператор «набла»): $\vec{\nabla} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$. (Будь-який оператор визначає дію, яку необхідно виконати над величиною (функцією), на яку він діє.) Множення оператора $\vec{\nabla}$ на скаляр u чи вектор $\vec{A}$ відбувається за загальними правилами.

Дія оператора $\vec{\nabla}$ на скалярну величину u носить назву **градієнта скалярної функції** u: $\vec{\nabla}u$. Це вектор, який характеризує швидкість зміни даної скалярної характеристики поля у просторі у напрямі найбільш швидкого її зростання:

$$\vec{\nabla}u = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)u = \vec{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial u}{\partial z} = \mathrm{grad}\,u\,; \qquad (1)$$

скалярний “добуток” оператора $\vec{\nabla}$ на вектор $\vec{A}$ дає результат у вигляді скалярної величини, яка має назву **дивергенції вектора** $\vec{A}$:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\vec{i}A_x + \vec{j}A_y + \vec{k}A_z\right) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \mathrm{div}\vec{A}\,; \qquad (2)$$

векторний “добуток” оператора $\vec{\nabla}$ на вектор $\vec{A}$ дає вектор (3), що має назву **ротора**: $\mathrm{rot}A = \left[\vec{\nabla}\vec{A}\right] =$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k} = \mathrm{rot}\vec{A}\,. \qquad (3)$$

Отже, після застосування диференціальної операції до поля отримуємо поле, до якого знову можна застосовувати ці операції. Результати такої подвійної дії, які можна отримати, якщо замість вектора підставити його розклад по координатним осям та виконати обчислення за формальними правилами векторної алгебри, наведені нижче:

$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}u\right)=\operatorname{div}\operatorname{grad}u=\nabla^2u=\Delta u$ – скалярне поле, (4)

де $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа;

$\left[\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}u\right)\right]=\operatorname{rot}\operatorname{grad}u=0$; (5)

$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\vec{A}\right)=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A}$ – векторне поле; (6)

$\vec{\nabla}\cdot\left[\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right]=\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A}=0$; (7)

$\left[\vec{\nabla}\left[\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right]\right]=\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A}=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)-\nabla^2\vec{A}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A}-\nabla^2\vec{A}$; (8)

$\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\right)A=\nabla^2\vec{A}=\Delta\vec{A}$ – векторне поле. (9)

(Спробуйте отримати ці вирази самостійно.)

З наведених співвідношень витікають практично корисні наслідки.

1. У фізичних задачах часто трапляється, що ротор деякого векторного поля $\vec{A}$ дорівнює нулю. Тоді на підставі (5) можна зробити висновок про те, що вектор $\vec{A}$ у цьому випадку можна представити у вигляді градієнту деякого скалярного поля u. Тобто існує скалярне поле u, для якого $\vec{A}=\operatorname{grad}u$.

Інакше кажучи: якщо $\left[\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right]=0$, то існує u, таке, що $\vec{A}=\vec{\nabla}u$. (10)

2. Аналогічна теорема формулюється для випадку, коли дивергенція деякого векторного поля $\vec{D}$ дорівнює нулю. З виразу $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A}=0$ (7) можна зробити висновок, що вектор $\vec{D}$ є ротором деякого векторного поля $\vec{A}$, причому, векторні лінії поля $\operatorname{rot}\vec{A}$ (вихрові лінії) не можуть мати ані джерел, ані стоків, тобто не можуть починатися або закінчуватися, а завжди замкнені.

Інакше: якщо $\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=0$, то існує $\vec{A}$, таке, що $\vec{D}=\left[\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right]$. (11)

● З векторними полями зв'язані два важливих математичних поняття, якими користуються при вивченні електричного та магнітного полів. Це поняття про потік вектора через деяку поверхню та циркуляцію вектора вздовж контуру.

Елементарний потік $d\Phi_A$ векторного поля через елемент поверхні $d\vec{S}$ визначається як скалярний добуток векторів $\vec{A}$ та $d\vec{S}$:

$$d\Phi_A = \vec{A} \cdot d\vec{S} = AdS\cos\alpha = A_n dS. \qquad (12)$$

Вектор $d\vec{S}$, який задає не тільки величину, але і орієнтацію площадки у просторі, має напрям позитивної нормалі $\vec{n}$. Тому елементарний потік векторного поля через площадку можна визначити як добуток нормальної складової вектора $\vec{E}$ на її площу (рис.3). Відповідно, повний потік через деяку поверхню дорівнює

$$\Phi_A = \int_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_S A_n dS. \qquad (13)$$

Густину ліній, за допомогою яких зображують векторне поле, обирають так, що потік вектора $\vec{A}$ через деяку поверхню дорівнює кількості векторних ліній, що перетинають цю поверхню. Знак внеску від перетину залежить від того, гострий чи тупий кут утворює лінія з обраним напрямом нормалі до поверхні. У випадку замкненої поверхні позитивним вважають напрям зовнішньої нормалі.

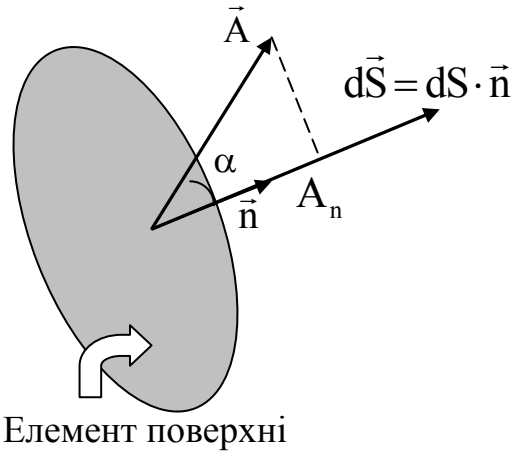


Рис.3

Циркуляція вектора вздовж довільного замкненого контуру – це інтеграл вздовж замкненого контуру від скалярного добутку вектора на елемент довжини контуру (рис. 4):

$$\int_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_L Adl\cos\alpha = \int_L A_l dl. \qquad (14)$$

Знак добутку $\vec{A} \cdot d\vec{l}$ залежить від орієнтації вектора $\vec{A}$ та напряму обходу контуру.

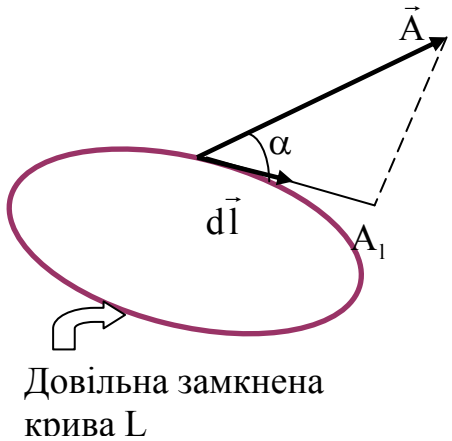


Рис. 4.

Якщо вектор $\vec{A}$ є силовою характеристикою векторного поля, то рівність його циркуляції нулю указує на потенціальний (безвихровий) характер поля.

● Існують теореми, які дозволяють зв’язати потік вектора через довільну замкнену поверхню з дивергенцією векторного поля (теорема Остроградського), а циркуляцію по довільному замкненому контуру з ротором векторного поля (теорема Стокса).

За теоремою Остроградського поверхневий інтеграл від нормальної складової довільного вектора по замкненій поверхні дорівнює інтегралу від дивергенції вектора по об’єму, що обмежений цією поверхнею:

$$\oint_S \vec{A}\cdot\vec{n}dS = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{A}dV, \qquad (15)$$

тобто
$$\oint_S \vec{A}\cdot\vec{n}dS = \int_V \operatorname{div}\vec{A}dV. \qquad (15a)$$

За теоремою Стокса криволінійний інтеграл від дотичної складової довільного вектора вздовж замкненого контуру дорівнює поверхневому інтегралу від нормальної складової ротора цього вектора по довільній поверхні, яка обмежена цим контуром:

$$\oint_L \vec{A}\cdot d\vec{l} = \int_S \left[\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right]\cdot\vec{n}dS, \qquad (16)$$

тобто
$$\oint_L \vec{A}\cdot d\vec{l} = \int_S \operatorname{rot}\vec{A}\cdot\vec{n}dS. \qquad (16a)$$

● Користуючись поняттями про потік та циркуляцію, дивергенцію та ротор і порівнюючи їх значення, обчислені для векторних характеристик електростатичного, змінного електричного та магнітного полів, можна не тільки отримати основні закони електромагнетизму, але й чіткіше усвідомити властивості кожного поля.

Завдання.

1. Безпосереднім обчисленням покажіть, що

а) $\vec{\nabla}\cdot\left[\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right]=0$; б) $\left[\vec{\nabla}\left[\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right]\right]=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)-\nabla^2\vec{A}$.

2. R – радіус - вектор, проведений із початку координат в точку (x,y,z). Покажіть, що при $R\neq 0$ а) $\operatorname{div}\vec{R}=3$; б) $\operatorname{rot}\vec{R}=0$; в) $\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{R}}{R^3}\right)=0$; г) $\left[\vec{\nabla}\cdot\left(-\frac{\vec{R}}{R^3}\right)\right]=0$;

д) $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{R}\right)=-\frac{\vec{R}}{R^3}$.

3. Із рівності б) попереднього завдання та формули (10) витікає, що вектор R можна представити у вигляді $\vec{R}=\vec{\nabla}\varphi$. Знайдіть функцію φ.

4. Напруженість електричного поля точкового заряду, поміщеного в начало системи координат, визначається формулою $\vec{E}=C\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}$, де C – деяка константа; $r=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}$; $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$. а) Обчисліть потік вектора напруженості електричного поля $\vec{E}$ через поверхню сфери радіуса R, центр якої співпадає с зарядом.

б) Скориставшись теоремою Остроградського – Гауса, представте потік вектора $\vec{E}$ через поверхню сфери у вигляді об'ємного інтегралу від $\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)$. Чи можете ви пояснити отриманий результат?

в) Обчисліть циркуляцію вектора $\vec{E}$ вздовж кола радіуса R, центр якого співпадає с зарядом (контур лежить у площині ХОУ). Переконайтесь у справедливості отриманого результату, скориставшись теоремою Стокса.

Розділ 14. Електростатика

14.1. Електростатичне поле та його характеристики.

Тема: Основні властивості електричного заряду. Поняття точкового заряду. Закон Кулона. Опис електричного поля. Принцип суперпозиції. Потік вектора напруженості. Теорема Гауса та її застосування до розрахунків симетричних полів. Циркуляція напруженості електричного поля. Робота сили електростатичного поля по переміщенню заряду. Потенціальний характер електростатичного поля. Потенціал. Принцип суперпозиції для потенціалу. Циркуляція вектора напруженості. Зв'язок між напруженістю і потенціалом.

Основні поняття і формули

- **Електростатика** вивчає взаємодію та поля нерухомих зарядів. Поле, яке утворене нерухомими зарядами, не змінюється з часом та має назву електростатичного.
- Заряд називають **точковим**, якщо розмірами зарядженого тіла можна знехтувати порівняно з відстанню від нього до інших зарядів.
- **Закон Кулона**: сила взаємодії двох нерухомих точкових зарядів q_1 і q_2 прямо пропорційна величині цих зарядів і обернено пропорційна квадрату відстані між ними. Сили взаємодії спрямовані вздовж прямої, яка з'єднує точкові заряди, тобто є центральними. $F < 0$ для різнойменних зарядів (заряди притягаються); $F > 0$ для однойменних зарядів (заряди відштовхуються). У Міжнародній системі одиниць СІ

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2}, \qquad (14.1)$$

де r – відстань між зарядами; $\varepsilon_0 = 8{,}85\ 10^{-12}$ Ф/м – електрична стала; ε – відносна діелектрична проникність середовища.

Діелектрична проникність середовища показує у скільки разів сила взаємодії між двома точковими зарядами у даному середовищі менша за силу взаємодії у вакуумі, якщо відстань між зарядами не змінюється:

$$\varepsilon = \frac{F_{\text{вакуум}}}{F_{\text{серед.}}} \qquad (14.2)$$

Закон Кулона у векторній формі (рис.14.1): $\vec{F}_{12} = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r_{12}^3}\vec{r}_{12}$. (14.1а)

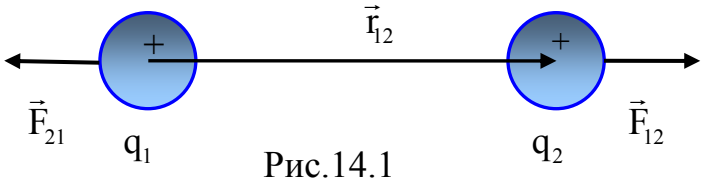


Рис.14.1

$\vec{F}_{12}$ – сила, що діє з боку першого заряду на другий; $\vec{r}_{12}$ – радіус-

вектор, напрямлений від заряду q_1 до заряду q_2.

За III законом Ньютона $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

● Силовою характеристикою електричного поля є **вектор напруженості** $\vec{E}$, який дорівнює силі, що діє на одиничний позитивний заряд, поміщений у дану точку поля.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}, \qquad (14.3)$$

де $\vec{F}$ – сила, що діє на точковий заряд q, вміщений у дану точку поля.

В СІ напруженість вимірюється у В/м: $[E] = \frac{Н}{Кл} = \frac{В}{м}$.

Напруженість електричного поля точкового заряду за допомогою закону Кулона можна представити у вигляді

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}, \qquad (14.4а)$$

тобто, вектор напруженості поля точкового заряду спрямований уздовж радіальної прямої від заряду, якщо він позитивний, та до заряду, якщо поле утворюється негативним зарядом.

За модулем
$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}. \qquad (14.4)$$

● **Принцип суперпозиції** (накладення) електричних полів: напруженість поля, утвореного системою зарядів дорівнює векторній сумі напруженості полів, створених кожним із зарядів окремо (рис.14.2):

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i, \qquad (14.5)$$

де $\vec{E}_i$ – вектор напруженості поля точкового заряду за номером і.

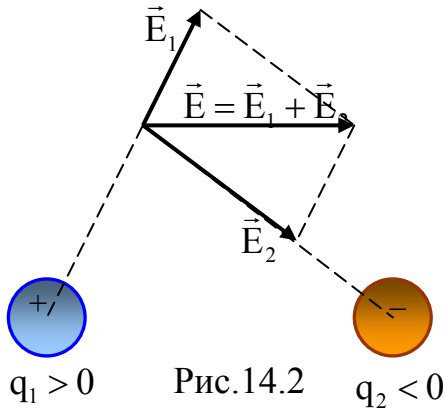


Рис.14.2

Для спрощення математичних розрахунків у багатьох випадках зручно нехтувати тим, що заряди мають дискретну структуру (електрони, ядра). Тобто існуючий істинний розподіл точкових дискретних зарядів замінюють фіктивним неперервним розподілом, вважаючи, що заряди певним способом «розмазані» у просторі.

У випадках безперервного розподілу зарядів розглядають лінійну, поверхневу та об'ємну густину зарядів, які відповідно дорівнюють (рис.14.3).

$$\tau = \frac{dq}{dl}; \quad \sigma = \frac{dq}{ds}; \quad \rho = \frac{dq}{dV}.$$

При безперервно розподіленому заряді за принципом суперпозиції напруженість поля знаходиться інтегруванням напруженості поля елемента заряду dq, який можна вважати точковим:

вздовж усієї довжини зарядженої лінії L для лінійно заряджених тіл

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int_L \frac{\tau}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}dl; \qquad (14.6а)$$

по поверхні S для тіл із зарядженою поверхнею

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int_S \frac{\sigma}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}dS; \qquad (14.6б)$$

по об'єму V для об'ємно заряджених тіл

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int_V \frac{\rho}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}dV; \qquad (14.6в)$$

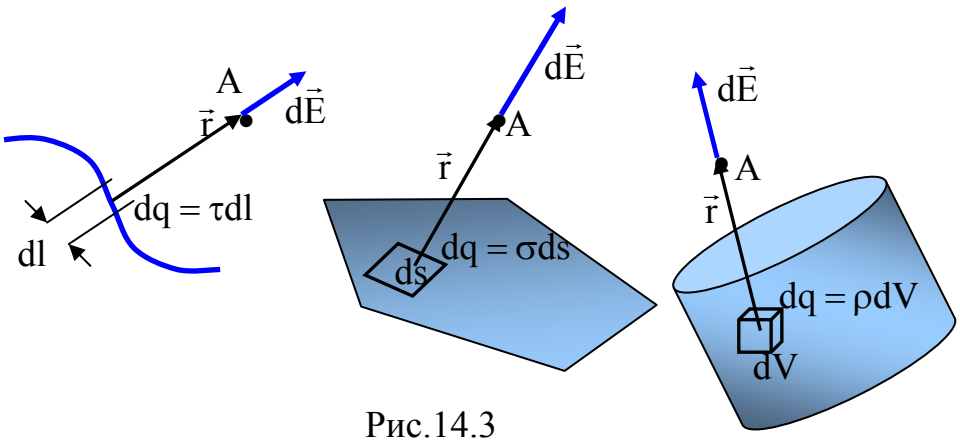


Рис.14.3

● Електричне поле можна представити за допомогою ліній напруженості.

Лінії напруженості (силові лінії вектора $\vec{E}$) – лінії, дотична до яких в кожній точці збігається з напрямком вектора $\vec{E}$.

Принцип побудови ліній напруженості:

- лінії напруженості ніколи не перетинаються (оскільки в кожній точці простору поле визначено однозначно);
- ніколи не розриваються;
- у випадку електростатичного поля лінії напруженості ніколи не замикаються; вони починаються на позитивних зарядах, закінчуються на негативних; або приходять з нескінченності та уходять у нескінченність;
- густота ліній напруженості відображує величину вектора $\vec{E}$ поля в даній точці простору. Число ліній напруженості, що пронизують одиницю площі поверхні, перпендикулярної лініям напруженості, повинно бути рівним модулю $\vec{E}$.

Силові лінії електричного поля нерухомого точкового заряду – це радіальні лінії з центром у заряді (рис.14.4).

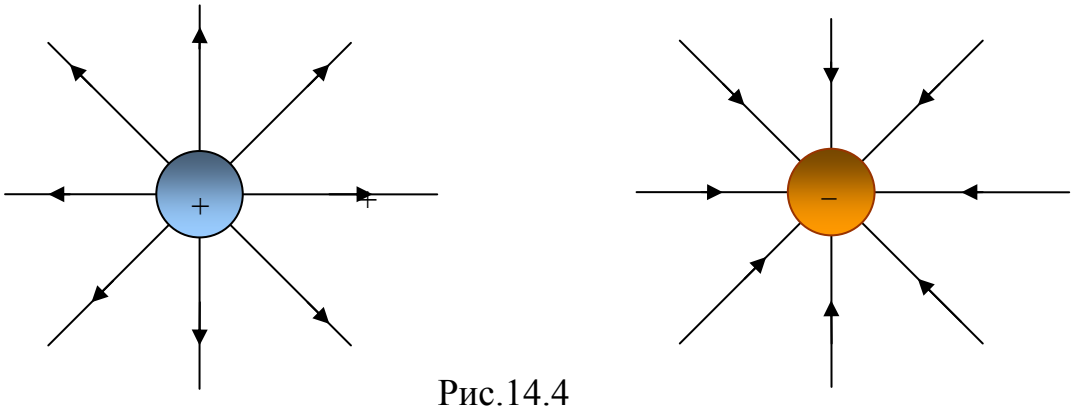


Рис.14.4

● **Однорідним** називають поле, вектор напруженості якого в будь-якій точці простору є постійним за величиною та напрямком $\vec{E} = \text{const}$. Силові лінії однорідного поля паралельні й мають однакову густоту.

● Потік вектора напруженості через поверхню S (див. формулу (13)) дорівнює:

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S E_n dS. \qquad (14.7)$$

Вимірюється у Міжнародній системі одиниць СІ у $В \cdot м$: $[\Phi_E] = В \cdot м$.

Теорема Гауса для вектора напруженості електричного поля: потік вектора напруженості електричного поля крізь довільну (уявну) замкнену поверхню S дорівнює алгебраїчній сумі електричних зарядів, які оточуються цією поверхнею, поділеній на ε_0:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i. \qquad (14.8)$$

При неперервному розподілі зарядів сума зарядів у правій частині рівняння замінюється на інтеграл від густини електричного заряду ρ по об'єму V, який охоплює замкнена поверхня S:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV. \qquad (14.8а)$$

Теорема Гауса може вважатися основним законом електростатичної взаємодії. Її еквівалентність закону Кулона основана на оберненій пропорційності сили взаємодії двох точкових зарядів квадрату відстані і на принципі суперпозиції.

Використання теореми Гауса суттєво спрощує розрахунки полів симетрично розподілених зарядів (див. формули (14.9) – (14.13)).

● Напруженість електричного поля (за модулем):

а) рівномірно зарядженої нескінченної нитки на відстані r від її осі (або зовні циліндра радіуса R, $r \geq R$)

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r}; \qquad (14.9)$$

τ – лінійна густина заряду.
(Картина ліній напруженості представлена на рис. 14.5)

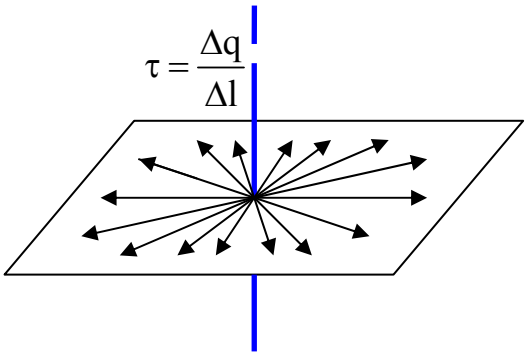


Рис. 14.5

б) рівномірно зарядженої нескінченної площини з лінійною густиною заряду σ (рис.14.6)

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}; \qquad (14.10)$$

в) двох паралельних нескінченних площин, заряджених різнойменними зарядами однакової поверхневої густини σ (поле плоского конденсатора)

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}; \qquad (14.11)$$

У двох останніх випадках електростатичне поле, утворюване зарядами, є однорідним (див. рис.14.6).

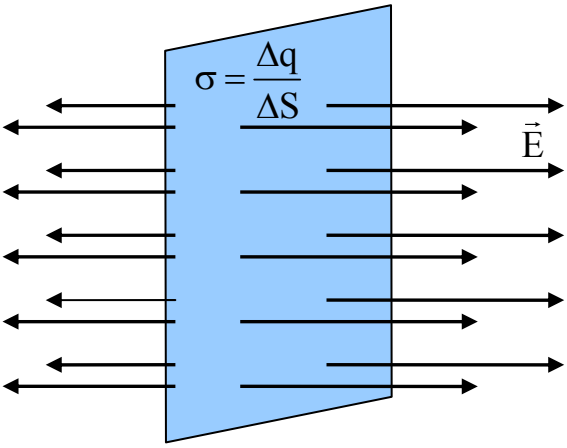


рис.14.6

г) сфери радіуса R, заряд q якої рівномірно розподілений по її поверхні, на відстані r від центра сфери

$$E = \begin{cases} 0; & (r < R) \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}; & (r \geq R) \end{cases} \qquad (14.12)$$

д) кулі радіуса R, заряд q якої рівномірно розподілений по її об'єму, на відстані r від центра кулі

$$E = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R^3} r = \dfrac{r\rho}{3\varepsilon_0\varepsilon}; & (r \leq R) \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0\varepsilon r^2}; & (r \geq R) \end{cases} \qquad (14.13)$$

Тут $\rho = \frac{dq}{dV}$ – об'ємна густина заряду.

● **Електростатичне поле є потенціальним**: робота сил поля по переміщенню заряду не залежить від траєкторії руху, а тільки від його початкового і кінцевого положення в полі. Відповідно, циркуляція вектора напруженості вздовж довільного замкненого контуру дорівнює нулю:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0. \qquad (14.14)$$

● **Потенціал** електростатичного поля

$$\varphi = \frac{W_p}{q}, \qquad (14.15)$$

де W_p – потенціальна енергія точкового заряду q, який знаходиться у даній точці поля.

Вимірюється в системі СІ у вольтах (В): $[\varphi] = \frac{Дж}{Кл} = В$

Потенціал поля точкового заряду $\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}$, (14.16)

де r – відстань від заряду до точки поля.

За принципом суперпозиції потенціал поля, яке утворюється системою зарядів $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i$ (14.17)

У випадку безперервно розподіленого заряду:

а) для лінійно заряджених тіл $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int_L \frac{\tau}{r} dl$; (14.17а)

б) при поверхневому розподілу зарядів $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int_S \frac{\sigma}{r} dS$; (14.17б)

в) для об'ємно заряджених тіл $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int_V \frac{\rho}{r} dV$. (14.17в)

● **Різниця потенціалів** між двома точками

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A}{q}, \qquad (14.18)$$

де A – робота сил поля при переміщенні заряду з однієї точки поля в другу.

Тоді робота сил поля по переміщенню заряду

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = qU. \qquad (14.19)$$

● Напруженість і потенціал електричного поля зв'язані співвідношенням:

а) у загальному випадку $\vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi$, або $\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right)$; (14.20)

Звідки різниця потенціалів двох точок поля

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 E_l \cdot dl. \qquad (14.21)$$

б) у випадку однорідного поля $E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d}$, (14.20а)

де d – відстань між еквіпотенціальними поверхнями, до яких належать точки 1 і 2.

Еквіпотенціальною поверхнею називають поверхню рівного потенціалу ($\varphi(x, y, z) = const$). Робота по переміщенню заряду вздовж еквіпотенціальної поверхні дорівнює нулю (див. формулу 14.19).

в) у випадку поля, симетричного відносно центру або осі: $E = -\frac{d\varphi}{dr}$.

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E(r) \cdot dr . \qquad (14.21а)$$

Співвідношення (14.21) і (14.21а) дозволяють визначити потенціал φ_1 будь-якої точки поля, якщо в якості точки 2 обрати початок відліку, тобто точку поля, в якій потенціал прийнятий рівним нулю (φ_2=0). Для точкових і сферично симетричних зарядів таку точку зазвичай обирають на нескінченності.

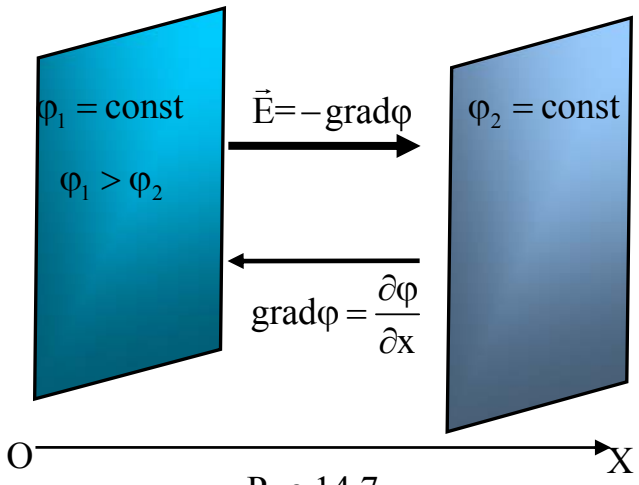


Рис.14.7

За формулою (14.20) напруженість поля дорівнює градієнту потенціалу, взятому зі знаком мінус. Градієнт потенціалу показує, як змінюється потенціал на одиницю довжини в напряму найбільш швидкого його зростання у просторі, тобто по нормалі до еквіпотенціальної поверхні. Отже, вектор напруженості (лінії напруженості) завжди **перпендикулярний до еквіпотенціальної поверхні** і **направлений у бік зменшення потенціалу** (рис. 14.7).

● Обчислення різниці потенціалів між довільними точками поля на основі зв'язку між φ і $\vec{E}$ дає:

а) для поля рівномірно зарядженої нескінченної площини з поверхневою густиною заряду σ (рис.14.8а)

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}(x_2 - x_1); \qquad (14.22)$$

б) для поля двох нескінченних паралельних різнойменно заряджених площин з поверхневою густиною заряду σ (рис.14.8б)

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}(x_2 - x_1); \qquad (14.23)$$

Якщо $x_1=0$; $x_2=d$, то $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} d$, або $U = Ed$. (14.23а)

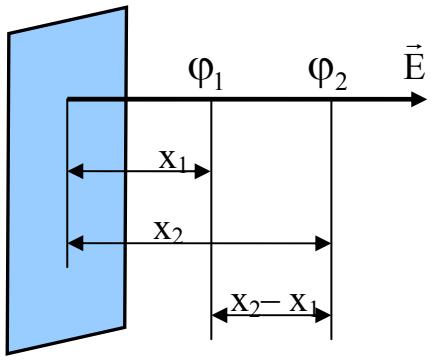


Рис.14.8а

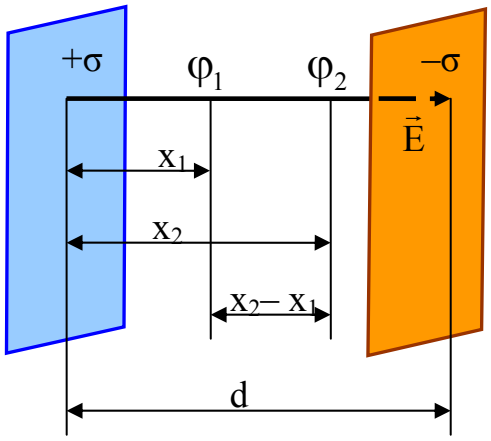


Рис.14.8б

в) для поля рівномірно зарядженої сферичної поверхні радіуса R (рис.14.9)

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \qquad (14.24)$$

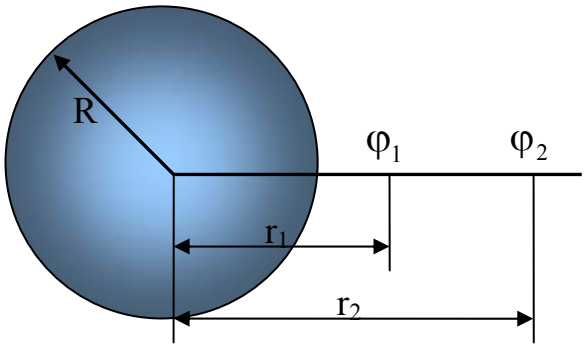


Рис.14.9

Якщо прийняти $r_1 = r$, $r_2 \to \infty$, то потенціал поля, яке створюється провідною зарядженою сферичною поверхнею радіуса R на відстані r від центра сфери дорівнює

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon R} = \text{const}; \ (r < R) \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r}; \quad (r \geq R) \end{cases} \qquad (14.25)$$

г) у випадку поля рівномірно зарядженої кулі

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon R^3}\left(r_2^2 - r_1^2\right); \quad r_1, r_2 < R \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon}\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right); \quad r_1, r_2 > R \end{cases} \qquad (14.26)$$

д) для поля рівномірно зарядженого нескінченного циліндра (при $r_1, r_2 > R$) або нескінченно довгої нитки (дроту) (рис.14.10)

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}\ln\frac{r_2}{r_1}, \qquad (14.27)$$

де τ – лінійна густина заряду, тобто заряд, розподілений на одиниці довжини нитки або циліндру.

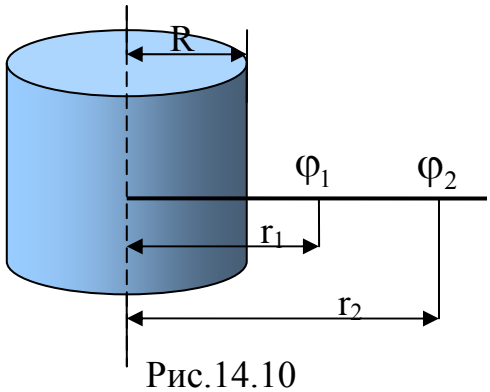


Рис.14.10

14.2. Електричне поле в діелектрику.

Тема: Різновиди діелектриків. Полярізованість. Поле у речовині. Зв'язані заряди. Вектори полярізованості та електростатичної індукції. Крайові умови для цих векторів.

Основні поняття і формули

Напруженість електричного поля в діелектриках змінюється внаслідок його поляризації.

Поляризація діелектрика – процес виникнення дипольного моменту в діелектрику.

● **Електричний диполь** – система двох точкових різнойменних зарядів, відстань l між якими набагато менша за відстань r до точок, в яких розглядається поле (l<<r) .

Плече диполя $\vec{l}$ – вектор, проведений від негативного заряду до позитивного і чисельно рівний відстані між ними (рис.14.11).

Дипольний момент (електричний момент диполя) $\vec{p}$ – вектор, який співпадає по напрямку з плечем диполя і дорівнює добутку заряду q на плече $\vec{l}$:

$$\vec{p} = q\vec{l}. \qquad (14.28)$$

Напруженість поля на продовженні осі диполя (точка А, рис.14.11):

$$E_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2p}{r^3}; \qquad (14.29а)$$

напруженість поля на перпендикулярі, встановленому до осі з центру О диполя (точка В, рис. 14.11): $E_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{p}{r^3}$; (14.29б)

напруженість та потенціал поля диполя в довільній точці на відстані r від центра О диполя (точка С, рис. 14.11):

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{p}{r^3}\sqrt{1+3\cos^2\theta}, \qquad (14.29)$$

де θ –кут між радіусом-вектором $\vec{r}$ і вектором $\vec{p}$;

відповідний потенціал дорівнює: $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{p}{r^2} \cos\theta$. (14.30)

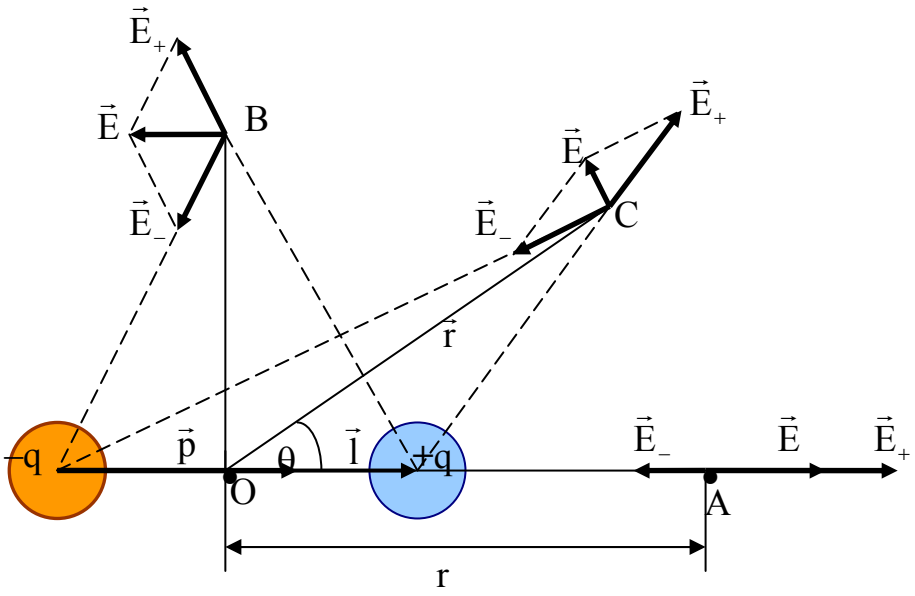


Рис.14.11

На диполь, поміщений в однорідне електричне поле, діє механічний момент сил $\vec{M}$

$$\vec{M} = \left[\vec{p} \cdot \vec{E}\right], \text{ або } M = pE\sin\alpha, \qquad (14.31)$$

де α – кут між напрямками векторів $\vec{p}$ і $\vec{E}$.

Завдяки моменту сил диполь прагне обернутися таким чином, щоб його електричний момент $\vec{p}$ був спрямований вздовж напрямку поля. При цьому виконується робота, яка відповідно дорівнює зміні потенціальної енергії диполя в електричному полі.

Якщо зовнішнє поле неоднорідне, то, окрім механічного моменту на диполь діє сила

$$\vec{F} = \text{grad}\left[\vec{p}\vec{E}\right] = p\frac{d\vec{E}}{dx}, \qquad (14.32)$$

де $\frac{d\vec{E}}{dx}$ характеризує неоднорідність поля і дорівнює зміні напруженості $\vec{E}$ на одиниці довжини вздовж осі диполя. Напрям сили збігається з напрямом вектора $\frac{d\vec{E}}{dx}$ (сила втягує диполь в область більших значень напруженості).

Потенціальна енергія диполя в електричному полі може бути знайдена за формулою

$$W_p = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -pE\cos\alpha. \qquad (14.33)$$

У загальному випадку нейтральної системи електричних зарядів $\{q_i\}, i = 1,...,N$, для якої $\sum_i q_i = 0$, (наприклад, нейтральної молекули) електричне поле на великих відстанях від неї визначається дипольним моментом системи (який іноді дорівнює нулю):

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} q_i \vec{r}_i ,$$

де $\vec{r}_i$ – радіус-вектор заряду q_i, N – кількість зарядів у системі. При цьому значення дипольного електричного моменту системи не залежить від вибору початку координат.

● Для характеристики ступеня поляризації діелектриків в електричному полі вводять **поляризованість** (вектор поляризації) $\vec{P}$, який дорівнює дипольному моменту одиниці об'єму :

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i , \qquad [P] = \frac{Кл}{м^2}. \qquad (14.34)$$

де $\vec{p}_i$ – дипольний момент i-ої молекули, яких N у об'ємі ΔV.

Поляризованість діелектриків у слабкому електричному полі лінійно залежить від його напруженості:

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E} ,$$

де χ – **діелектрична сприйнятливість** речовини, показує, як діелектрик реагує на зовнішнє електричне поле. $[\chi] = 1$ (безрозмірна величина).

З макроскопічної точки зору поляризація приводить до виникнення некомпенсованих зв'язаних зарядів різних знаків, які зосереджуються на протилежних поверхнях діелектрика.

Зв'язаними називають заряди, що входять до складу молекули, які перерозподіляються під дією електричного поля, лише незначно зміщуючись від своїх положень рівноваги, і не покидають межі молекули.

Можна показати, що поверхнева густина зв'язаних зарядів σ' дорівнює нормальній складовій вектора поляризованості:

$$\sigma' = P_n . \qquad (14.35)$$

Поле зв'язаних зарядів $\vec{E}'$ завжди протилежно зовнішньому полю $\vec{E}_0$. Тому напруженість $\vec{E}$ сумарного поля у діелектрику завжди менша напруженості зовнішнього поля (рис.14.12).

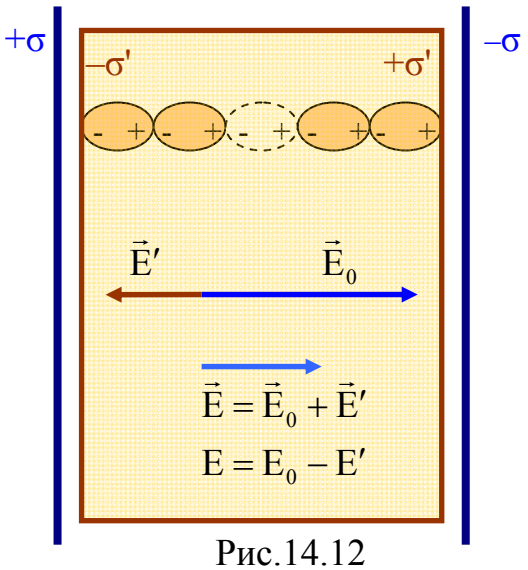


Рис.14.12

Ступень ослаблення поля у діелектрику характеризує його **відносна проникність** ε**:**

$$\varepsilon = \frac{E_0}{E}; \quad \varepsilon = 1 + \chi. \tag{14.36}$$

(ε дорівнює 1 для вакууму. Для всіх речовин $\varepsilon > 1$; для повітря значення ε приймають приблизно рівним 1).

● Для опису електричного поля у речовині вводять допоміжну векторну величину $\vec{D}$ – **вектор електричного зміщення**.

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}; \tag{14.37}$$

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}. \tag{14.38}$$

Вектор електричного зміщення (електростатичної індукції) $\vec{D}$ описує електростатичне поле, яке створюється вільними зарядами. Зв'язані заряди, що виникають у діелектрику, можуть викликати перерозподіл вільних зарядів, які утворюють поле. Тому вектор $\vec{D}$ характеризує електростатичне поле, яке утворюється вільними зарядами (тобто у вакуумі), але при такому їхньому розподілі в просторі, який виникає при наявності діелектрика.

Силові лінії вектора $\vec{E}$ починаються і закінчуються як на вільних, так і на зв'язаних зарядах. Силові лінії вектора $\vec{D}$ – тільки на вільних зарядах. При проходженні через області поля, де існують вільні заряди, густота ліній вектора $\vec{D}$ не змінюється..

Теорема Гауса для вектора $\vec{D}$: потік вектора електричного зміщення крізь довільну замкнену поверхню дорівнює алгебраїчній сумі вільних електричних зарядів, оточених цією поверхнею:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^{n} q_i. \tag{14.39}$$

В той же час при розрахунку за теоремою Гауса потоку вектора напруженості (див. формулу (14.8)) слід ураховувати оточені поверхнею як вільні, так і зв'язані заряди.

Введення відносної діелектричної проникності ε для урахування впливу зв'язаних зарядів на напруженість електричного поля дозволяє надати формулі (14.8) вигляду

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \sum_{i=1}^{n} q_i. \tag{14.39a}$$

В останню формулу входить сума тільки вільних зарядів, оточених замкненою поверхнею.

14.3. Електростатичне поле зарядженого провідника. Електроємність.

Тема: Поле в середині та на поверхні провідника. Електроємність. Електроємність вилученого провідника. Конденсатори. Електроємність та енергія конденсаторів.

Основні поняття і формули

● Умови рівноваги зарядів у зарядженому провіднику:

1. напруженість поля усередині провідника має дорівнювати нулю $(\vec{E}_{вн.} = 0)$;
2. напруженість поля поблизу поверхні провідника повинна бути перпендикулярною до неї.

Отже, об'єм провідника є еквіпотенціальним об'ємом, а поверхня – еквіпотенціальною поверхнею. У разі рівноваги зарядів усі надлишкові (вільні) заряди розподілені по поверхні провідника з поверхневою густиною σ, причому напруженість поля поблизу поверхні

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}, \quad \text{а вектор} \quad D = \sigma .$$

● При внесенні незарядженого провідника в електричне поле відбувається перерозподіл вільних зарядів у ньому, поки напруженість поля у середині провідника не дорівнюватиме нулю: електрони переміщуються у напрямку проти ліній напруженості і накопичуються з одного боку, в той час, як з другого – виникає надлишковий позитивний заряд. Ці заряди називають **індукованими,** а процес перерозподілу зарядів – **електростатичною індукцією.**

● **Електроємність відокремленого провідника**

$$C = \frac{q}{\varphi}, \qquad [C] = \Phi \text{ (фарад)} \qquad (14.40)$$

де φ – потенціал провідника, заряд якого дорівнює q.

Відокремленим називається провідник, поблизу якого немає інших провідників, тіл, зарядів. Електроємність такого провідника залежить від його форми, розмірів та властивостей оточуючого діелектрика.

Електроємність кулі $C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R$, (14.41)

де R – радіус кулі, ε –діелектрична проникність оточуючого середовища.

● **Електроємність конденсатора**

$$C = \frac{q}{U}, \qquad (14.42)$$

де U – різниця потенціалів обкладинок конденсатора.

Електроємність конденсаторів різної геометрії:

а) плоского $$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}, \qquad (14.43)$$

де S – площина пластини конденсатора, d – відстань між пластинами;

б) циліндричного $$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}{\ln\left(R_2/R_1\right)}\ ; \qquad (14.44)$$

в) сферичного $$C = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}\ . \qquad (14.45)$$

де R_1 і R_2 – відповідно, радіуси циліндричних або сферичних обкладинок.

При послідовному з'єднанні конденсаторів у батарею (рис.14.13)

1) напруга на батареї дорівнює сумі напруг на окремих її елементах (конденсаторах): $$U = \sum_{i=1}^{n} U_i\ , \qquad (14.46)$$

де n – число конденсаторів батареї.

2) заряд кожного з конденсаторів є однаковим і дорівнює заряду батареї:

$$q = q_1 = q_2 = ... = q_n\ ;$$

3) електроємність батареї дорівнює:

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}\ . \qquad (14.47)$$

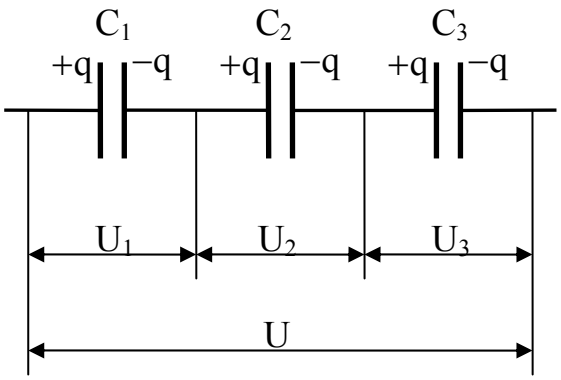


Рис.14.13

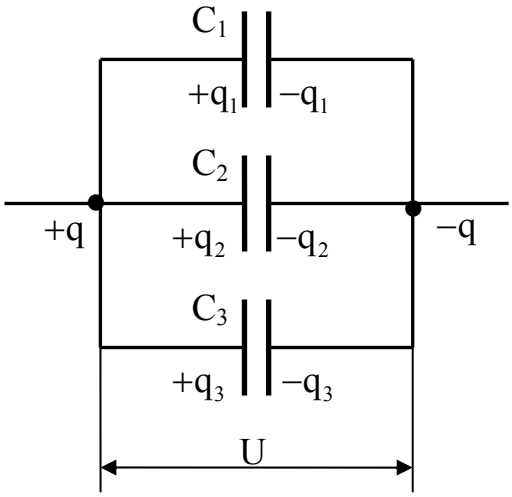


Рис.14.14

При паралельному з'єднанні конденсаторів у батарею (рис.14.14)

1) напруга на кожному з конденсаторів є однаковою і дорівнює напрузі на батареї:

$$U = U_1 = U_2 = ... = U_n\ ;$$

2) заряд батареї дорівнює сумі зарядів на окремих конденсаторах:

$$q = \sum_{i=1}^{n} q_i\ ; \qquad (14.48)$$

3) електроємність батареї дорівнює: $$C = \sum_{i=1}^{N} C_i\ . \qquad (14.49)$$

14.4. Енергія електричного поля. Основні поняття і формули

Енергія взаємодії двох точкових зарядів $W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r}$. (14.50)

Енергія системи n точкових зарядів

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i \varphi_i , \qquad (14.51)$$

де φ_i - потенціал, що створюється в точці, де знаходиться заряд q_i усіма іншими зарядами.

Енергія відокремленого зарядженого провідника

$$W = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q\varphi}{2} = \frac{q^2}{2C}. \qquad (14.52)$$

Енергія зарядженого конденсатора

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C}. \qquad (14.53)$$

Об'ємна густина енергії електричного поля (енергія одиниці об'єму)

$$w = \frac{dW}{dV} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon\varepsilon_0}. \qquad (14.54)$$

Енергія поля в об'ємі V, знаходиться через об'ємну густину енергії шляхом інтегрування:

$$W = \int_V w\, dV = \int_V \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} dV. \qquad (14.55)$$

У випадку однорідного поля $W = w \cdot V = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} V$. (14.56)

Методичні вказівки.

1. Сили взаємодії зарядів можна розраховувати: за законом Кулона (14.1) (див. приклади 14.1–14.3) або користуючись співвідношенням $\vec{F} = q\vec{E}$, яке випливає з формули (14.3) (див. приклад 14.10). В останньому випадку заряд q слід розглядати як точковий, який знаходиться в полі, утвореному всіма іншими зарядами.

2. При розв'язуванні задач на визначення напруженості поля, утвореного системою зарядів можливі такі випадки:

а) поле утворено одним або кількома зарядами. У такому разі користуються формулою напруженості поля точкового заряду (14.4) та принципом суперпозиції електричних полів (14.5), який для напруженості електричного поля носить векторний характер (див. приклади 14.4; 14.6);

б) поле утворене зарядами, що безперервно розподілені вздовж плоскості, або циліндричній чи сферичній поверхні. Тоді розрахунок виконується із використанням формул (14.9) – (14.13), які отримані за допомогою теореми Гауса. Зауважимо також, що нескінченною можна вважати будь-яку поверхню, якщо відстань до точки, в якій розраховується поле, набагато менша за відстань до її кінців (див. приклад 14.7).

в) в інших випадках для визначення напруженості поля заряду, який безперервно розподілений вздовж лінії, по поверхні або об'єму, необхідно заряджене тіло розбити на нескінченно малі елементи. За принципом суперпозиції напруженість поля знаходиться інтегруванням напруженості поля елемента заряду dq, який можна вважати точковим (див. формули (14.6а) – (14.6в), тобто $\vec{E} = \int d\vec{E}$. Звернемо увагу на векторний характер останнього співвідношення.

Розрахунок спрощується, якщо розподілу зарядів притаманна певна (наприклад, осьова) симетрія, а точка, в якій визначається напруженість, знаходиться на цій осі. У цьому випадку вектор напруженості $\vec{E}$ направлений вздовж осі симетрії, і $E = \int dE_z$, де dE_z – проекція вектору $d\vec{E}$ на вісь симетрії (див. приклад 14.9).

3. При розв'язуванні задач на визначення потенціалу поля, утвореного системою зарядів можливі випадки:

а) поле утворено одним або кількома точковими зарядами. Для визначення потенціалу використовують формулу потенціалу поля точкового заряду (14.16) та принцип суперпозиції полів (14.17), за яким потенціал обчислюється як алгебраїчна сума потенціалів, створених окремими зарядами (див. приклад 14.5);

б) поле утворено безперервно розподіленими зарядами. У цьому разі заряджене тіло розбивають на нескінченно малі елементи. Потенціал знаходять інтегруванням потенціалу поля елемента заряду dq за формулами (14.17а) – (14.17в) (див приклад 14.9)).

4. Значення потенціалу, так саме, як потенціальної енергії системи зарядів, залежить від вибору початку відліку. Формули (14.16), (14.25), (14.30), (14.50) отримані у припущені, що потенціал поля дорівнює нулю на нескінченності. Отже, фізичний зміст має різниця потенціалів (14.18), значення якої не залежить від вибору нульового рівня і визначає роботу по переміщенню заряду в електричному полі (14.19) (див. приклад 14.13).

Метод визначення різниці потенціалів спирається на співвідношення (14.21), що зв'язує різницю потенціалів двох точок поля з напруженістю поля у просторі між ними. Саме у такий спосіб отримані формули (14.23), (14.24), (14.26). Визначення різниці потенціалів за допомогою виразу для

напруженості у випадку однорідного поля із застосуванням формули (14.20а) здійснюється у прикладі 14.7,2)).

З іншого боку, якщо попередньо відомий розподіл потенціалу у просторі, то це дозволяє за формулою (14.20) визначати напруженість електричного поля (див. приклад 14.9,3)), що у багатьох випадках спрощує розрахунок напруженості.

5. Для розрахунків електричних полів у діелектриках вводять допоміжну величину – вектор електричного зміщення $\vec{D}$ (14.37), (14.38), потік якого через замкнену поверхню не залежить від присутності середовища і визначається тільки вільними зарядами, які нею охоплюються.

В запропонованих для розв'язання задачах електростатики зазвичай припускається, що діелектрик є однорідним та ізотропним і повністю заповнює простір між еквіпотенціальними поверхнями. Відповідно – лінії напруженості є перпендикулярними до поверхні діелектрика. У такому випадку при внесенні діелектрика з відносною діелектричною проникністю **ε** в електростатичне поле справедливим є наступне:

а) вектор електричного зміщення $\vec{D}$ залишиться незмінним в усіх точках поля (усередині та поза діелектрику);

б) вектор напруженості $\vec{E}$ зменшується в ε разів у діелектрику, та зберігає своє значення поза діелектриком.

Використання цих правил дозволяє розраховувати електричні поля в присутності діелектриків, які задовольняють наведеним вище умовам (див. приклад 14.16).

У випадку заряджених тіл (точкового заряду, площини, сфери і т. ін.) занурених в однорідний нескінчений діелектрик формули, отримані для опису напруженості і потенціалу утворених цими тілами електростатичних полів у вакуумі, залишаються справедливими при внесенні в їх знаменник множника ε (див. приклад 14.20).

Якщо в умові задачі не обумовлено середовище, в якому утворюється поле, то слід вважати, що це вакуум (ε = 1) або повітря, діелектрична проникність якого близька до одиниці.

6. При внесенні провідника в електричне поле відбувається **явище електростатичної індукції**, тобто перерозподіл вільних зарядів в провіднику, який відбувається таким чином, що сумарна напруженість зовнішнього поля та поля індукованих зарядів усередині провідника дорівнює нулю. При цьому всі точки провідника набувають однакового потенціалу (потенціал провідника).

Визначення розподілу індукованих зарядів, яке, в свою чергу, впливає на напруженість і потенціал поля у просторі навколо провідника,

може бути проведено,наприклад, із використанням методу електричних зображень (див. приклад 14.15).

7. За означенням електроємність конденсатора дорівнює його заряду, віднесеному до різниці потенціалів (напруги) на його обкладинках $C = \frac{q}{U}$. Тому, для розрахунків електроємності конденсатора маємо: а) отримати вираз для напруженості поля між обкладинками конденсатора як функції координат та заряду; б) користуючись зв'язком між різницею потенціалів і напруженістю, знайти напругу на конденсаторі, і далі за формулою (14.42) визначити електроємність. Саме таким способом отримані формули (14.43) – (14.45) для конденсаторів із різною геометрією обкладинок.

Зміна параметрів конденсатору, наприклад, зміна відстані між обкладинками, заповнення його діелектриком, приводить до зміни електроємності і супроводжується зміною енергії електричного поля, яке існує проміж його обкладинками. При розгляді задач подібного типу необхідно звертати увагу, за яких умов відбувається зміна параметрів:

а) при попередньому від'єднанні конденсатора від джерела напруги незмінним залишається заряд на його обкладинках, а змінюється напруга на ньому;

б) якщо конденсатор не від'єднують від джерела напруги, змінюється заряд конденсатору, а напруга зберігає своє значення (див. приклад 14.15).

Приклади розв'язання задач.

Приклад 14.1. Визначити прискорення та швидкість руху електрону в атомі гідрогену, якщо радіус електронної орбіти $r = 5 \cdot 10^{-11}$ м.

$\lvert e \rvert = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг $r = 5 \cdot 10^{-11}$ м	Розв'язання Ядро атома гідрогену складається з одного протона. Сила, що діє на електрон з боку протона, визначається законом Кулона (14.1): $F = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ (1),
v; a_n - ?	де e – величина елементарного заряду; $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

Ця сила відіграє роль доцентрової сили, яка надає електрону нормальне прискорення $a_n = \frac{v^2}{r}$ (2).

За II законом Ньютона $F = ma_n$. Після підстановки виразів (1) і (2) отримуємо: $\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{mv^2}{r}$. Звідки $v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 r \cdot m}}$.

Перевіримо розмірність результату:

$$[v]=\frac{Кл\cdot м^{1/2}}{(Ф\cdot м\cdot кг)^{1/2}}=\frac{Кл}{\left(\frac{Кл}{В}\cdot кг\right)^{1/2}}=\left(\frac{Кл\cdot В}{кг}\right)^{1/2}=\left(\frac{Дж}{кг}\right)^{1/2}=\left(\frac{кг\cdot м^2}{с^2\cdot кг}\right)^{1/2}=\frac{м}{с}.$$

Підстановка чисельних значень дає:

$$v=1,6\cdot10^{-19}\sqrt{\frac{9\cdot10^9}{5\cdot10^{-11}\cdot9,1\cdot10^{-31}}}=2,25\cdot10^6\,м/с.$$

Прискорення a_n знаходимо за допомогою формули (2) із використанням знайденого значення швидкості:

$$a_n=\frac{\left(2,25\cdot10^6\right)^2}{5\cdot10^{-11}}=1,01\cdot10^{23}\,м/с^2\approx10\cdot10^{22}\,м/с^2.$$

Порівнюючи отримане прискорення $a_n\approx10\cdot10^{22}\,м/с^2$ з прискоренням вільного падіння $g=9,8$ м/с^2, бачимо, що a_n на 22 порядки перевищує його. Таким чином, електрон у 10^{22} разів сильніше притягається до свого ядра, ніж до Землі!

Приклад 14.2. Дві однакові, однаково заряджені кульки підвішені на нитках однакової довжини (рис.14.15а). При цьому нитки розійшлися на кут α. Кульки занурили в олію. Визначити густину олії, якщо кут розходження ниток при зануренні кульок залишився незмінним. Густина матеріалу кульок $\rho_1=1,5\cdot10^3$ кг/м^3, діелектрична проникність олії ε = 2,2.

$q_1=q_2=q$ $m_1=m_2=m$ $l_1=l_2=l$ $\alpha=\alpha_1$ $\rho_1=1,5\cdot10^3$ кг/м^3 ε=2,2	
ρ – ?	

Розв'язання

На кожну з кульок у повітрі діють такі сили (рис.14.15а): сила тяжіння $m\vec{g}$, де $\vec{g}$ – прискорення вільного падіння; сила пружності, тобто сила реакції нитки $\vec{T}$; сила електростатичної взаємодії, тобто сила кулонівського відштовхування $\vec{F}_k$, яка дорівнює

$$F_k=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q^2}{r^2},\qquad(1)$$

де ε_0= 8,85 10^{-12} Ф/м – електрична стала, r – відстань між кульками.

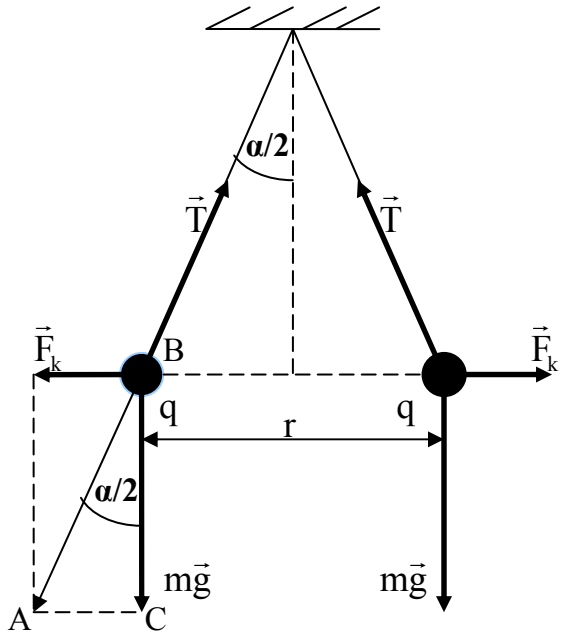


Рис.14.15а

Умова рівноваги кожної з кульок у повітрі має вигляд: $\vec{F}_k + m\vec{g} + \vec{T} = 0$. Звідки витікає: $\vec{F}_k + m\vec{g} = -\vec{T}$. Останнє означає, що рівнодійна сил $\vec{F}_k + m\vec{g}$ направлена вздовж нитки протилежно $\vec{T}$ і утворює з вертикаллю кут $\frac{\alpha}{2}$. З прямокутного трикутника $\Delta ACB\left(\angle ABC = \frac{\alpha}{2}\right)$ витікає $F_k = mg \cdot tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Виражаємо масу кульки через густину ρ_1 її матеріалу: $m = \rho_1 V$ (2), де V – об'єм кульки. Тоді $F_k = \rho_1 Vg \cdot tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. (3)

Для зарядів, які знаходяться в олії (рис.14.15б) змінюється величина кулонівської сили взаємодії проміж ними ($\vec{F}_{k1} < \vec{F}_k$):

$$F_{k1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{\varepsilon r^2}, \qquad (4)$$

де ε – відносна діелектрична проникність олії. Окрім того, з боку олії діє сила виштовхування $\vec{F}_A$, яка згідно закону Архімеда дорівнює: $F_A = \rho g V$, де ρ – густина олії. Відповідно, умова рівноваги кожної з кульок приймає вигляд: $m\vec{g} + \vec{F}_{k1} + \vec{F}_A + \vec{T}_1 = 0$, або

$$m\vec{g} + \vec{F}_{k1} + \vec{F}_A = -\vec{T}_1.$$

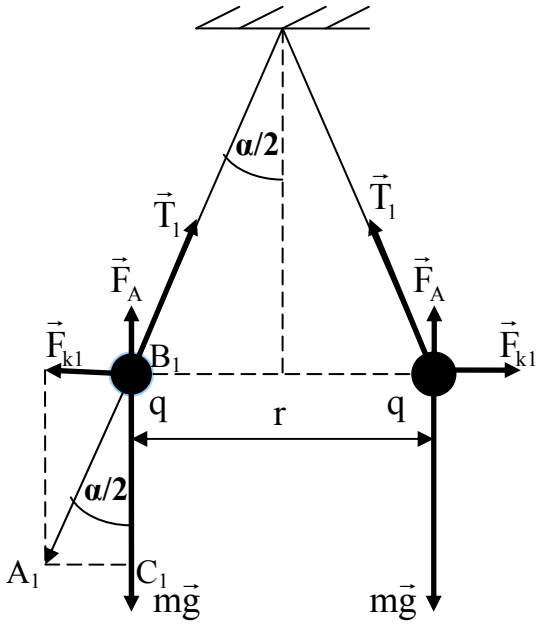


Рис.14.15б

Аналогічно попередньому, з прямокутного трикутника $\Delta A_1C_1B_1$, де $\angle A_1B_1C_1 = \frac{\alpha}{2}$, а $C_1B_1 = mg - F_A$, отримуємо $F_{k1} = (mg - F_A) \cdot tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, або з урахуванням виразів (2) та (5): $F_{k1} = (\rho_1 - \rho) Vg \cdot tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ (5). Відношення рівняння (3) до рівняння (5) дає: $\frac{F_k}{F_{k1}} = \frac{\rho_1 Vg \cdot tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{(\rho_1 - \rho) Vg \cdot tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\rho_1}{(\rho_1 - \rho)}$.

З виразів (1) і (4) знаходимо, що $\frac{F_k}{F_{k1}} = \varepsilon$. Таким чином, $\frac{\rho_1}{(\rho_1 - \rho)} = \varepsilon$. Звідки

$$\rho = \frac{(\varepsilon - 1)\rho_1}{\varepsilon}. \qquad \rho = \frac{2,2-1}{2,2} \cdot 1,5 \cdot 10^3 \frac{кг}{м^3} = 8,18 \cdot 10^2 \frac{кг}{м^3}.$$

Приклад 14.3. Два точкові електричні заряди різних знаків ($q_1 > 0; q_2 < 0$) закріплені на прямій на відстані L один від одного. $|q_2| < q_1$ (рис.14.16). Третій заряд q_0 може переміщуватися тільки вздовж прямої, що з'єднує заряди. Визначити положення заряду q_0, при якому він буде знаходитися у рівновазі. Яким повинен бути знак цього заряду, щоб рівновага була стійкою?

Розв'язання.

Заряд q_0 буде знаходитися у рівновазі, якщо геометрична сума сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, що діють на нього з боку зарядів q_1 і q_2 дорівнюватиме нулю: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$ (1). Визначимо, на якій з ділянок, які показано на рис.14.16, може виконуватися умова (1). Припустимо для визначеності, що заряд q_0 є позитивним.

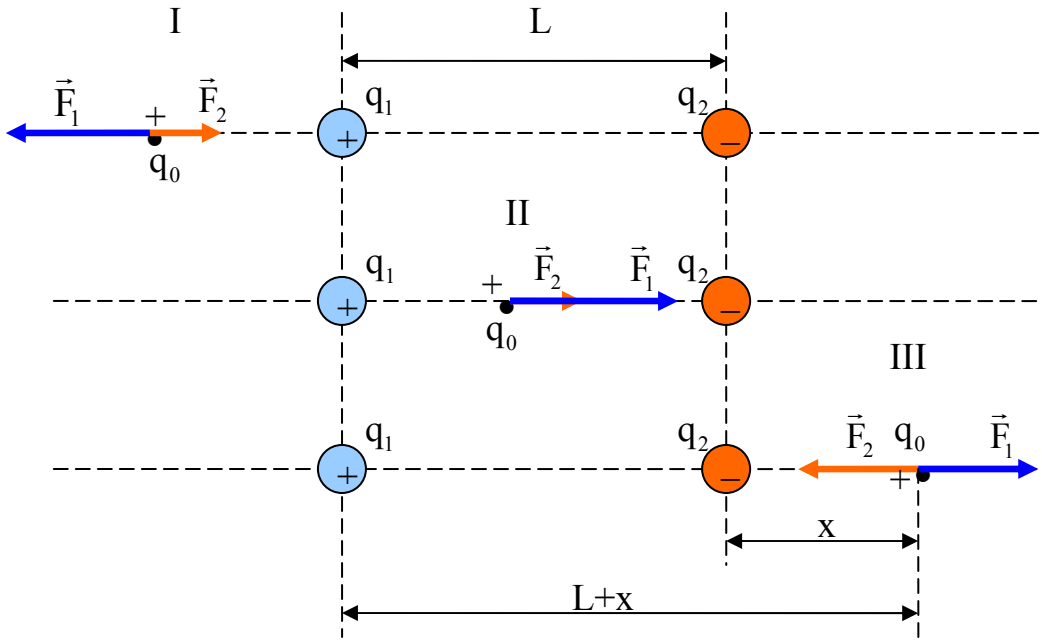


Рис.14.16

Якщо заряд q_0 розташований на ділянці I, сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ направлені протилежно. Сила $\vec{F}_1$, що діє на заряд q_0 з боку заряду q_1, в будь-якій точці ділянки I буде більшою за силу $\vec{F}_2$, оскільки більший за величиною заряд q_1 завжди буде знаходитися ближче до заряду q_0, ніж менший заряд q_2.

При знаходженні заряду q_0 на ділянці II рівновага неможлива, оскільки сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ направлені в один бік – до негативного заряду q_2.

При розміщенні заряду q_0 на ділянці III сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ направлені протилежно, але, на відміну від ділянки I, менший за абсолютною величиною заряд q_2 завжди знаходиться ближче до заряду q_0, ніж більший заряд q_1. Це означає, що існує точка, в якій сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, що мають протилежний напрям, будуть однаковими за модулем. Отже на цій ділянці шукаємо точку, в якій виконується умова $F_1 = F_2$ (2).

Позначимо через x відстань до шуканої точки від заряду q_2. Тоді відстань від заряду q_1 буде дорівнювати L+x. Виражаємо сили F_1 і F_2 за законом Кулона (14.1) і підставляємо у рівняння (2):

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1 q_0}{(L+x)^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_2 q_0}{x^2}.$$

Після скорочення коефіцієнтів та q_0 дістаємо корінь з обох частин рівності і отримуємо:

$$\frac{\sqrt{q_1}}{L+x} = \pm\frac{\sqrt{q_2}}{x}, \text{ тобто } \sqrt{q_2}(L+x) = \pm\sqrt{q_1}x.$$

Звідки знаходимо $x_1 = \dfrac{\sqrt{q_2}L}{\sqrt{q_1}-\sqrt{q_2}}$; $\quad x_2 = -\dfrac{\sqrt{q_2}L}{\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}}$.

Корінь рівняння x_2 визначає точку, що належить ділянці II. В цій точці сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ рівні, але направлені в один бік. Таким чином, значення x_2 не відповідає умові задачі.

Визначимо знак заряду q_0, при якому рівновага буде стійкою. За умову стійкості приймемо наступне: при відхиленні заряду від положення рівноваги виникають сили, що намагаються повернути його у початкове положення.

Якщо заряд q_0 позитивний, при зміщенні його вправо сила F_2 за величиною буде зменшуватися швидше, ніж сила F_1 (в області III відстань до заряду q_1 завжди більша, ніж до заряду q_2), і на заряд q_0 буде діяти рівнодійна сила, направлена також вправо (див. рис.14.16). Під дією цієї сили заряд q_0 буде відхилятися далі від положення рівноваги. Так само при зміщенні заряду вліво сила F_2 буде зростати швидше за силу F_1, що приведе до зміщення заряду вліво, тобто відхиленню від положення рівноваги. Таким чином у випадку позитивного заряду рівновага є нестійкою.

У випадку негативного заряду q_0 напрям сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ змінюється на протилежний, а поведінка сил залишається такою самою, як у попередньому випадку. Тому рівнодійна сила, що виникає при будь-якому

відхиленні заряду q_0 від положення рівноваги, буде повертати заряд назад, і рівновага буде стійкою.

Примітка. Стійка рівновага розглянутої системи зарядів можлива тільки тому, що два з них були закріпленими. У випадку незакріплених зарядів згідно з теоремою Ірншоу стійка рівновага будь-якої системи нерухомих зарядів взагалі неможлива.

Приклад 14.4. Два точкові електричні заряди q_1=–1нКл і q_2=2нКл знаходяться в повітрі на відстані r=10см один від одного. Визначити напруженість $\vec{E}$ у точці, яка знаходиться на відстані r_1= 9см від першого заряду і r_2 =7см від другого.

$q_1 = -1 \cdot 10^{-9}$ Кл
$q_2 = 2 \cdot 10^{-9}$ Кл
$r_1 = 9 \cdot 10^{-2}$ м
$r_2 = 7 \cdot 10^{-2}$ м
$r = 10 \cdot 10^{-2}$ м

E - ?

Розв'язання.

Згідно принципу суперпозиції полів (14.5) напруженість поля може бути визначена як геометрична сума напруженості полів $\vec{E}_1$ і $\vec{E}_2$ кожного із зарядів: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$.

Напруженість електричного поля, створеного у повітрі (ε =1) зарядом q_1 дорівнює $E_1 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}$ (1),

другим – $E_2 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}$. (2)

Вектор $\vec{E}_1$ спрямований вздовж прямої до заряду q_1, оскільки він негативний; відповідно, вектор $\vec{E}_2$ спрямований від позитивного заряду q_2 (рис.14.17). Абсолютне значення вектора $\vec{E}$ знаходимо за теоремою косинусів:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos(\pi - \alpha)} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\alpha}, \quad (3)$$

де α – кут між векторами $\vec{E}_1$ і $\vec{E}_2$. Його можна визначити з трикутника із сторонами r, r_1 і r_2 (див. рис. 14.17) за теоремою косинусів:

$$\cos\alpha = \frac{(0{,}1^2) - (0{,}09)^2 - (0{,}07)^2}{2 \cdot 0{,}09 \cdot 0{,}07} = -0{,}238.$$

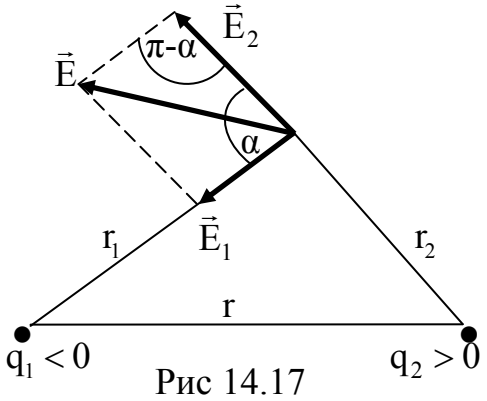


Рис 14.17

Підстановка виразів E_1 і E_2 з формул (1) та (2) у формулу (3) дає:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{q_1^2}{r_1^4} + \frac{q_2^2}{r_2^4} + 2\frac{q_1q_2}{r_1^2r_2^2}\cos\alpha}.$$

Перевіряємо розмірність: $[E]=\frac{м}{Ф}\cdot\left(\frac{Кл^2}{м^4}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{В}{м}$.

Тепер підставимо числові значення в отриману формулу для E і проводимо обчислення ($\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}=9\cdot10^9$ м/Ф):

$$E=9\cdot10^9\cdot\sqrt{\left(\frac{10^{-9}}{(0{,}09)^2}\right)^2+\left(\frac{2\cdot10^{-9}}{(0{,}07)^2}\right)^2+2\cdot\frac{10^{-9}\cdot2\cdot10^{-9}}{(0{,}09)^2\cdot(0{,}07)^2}(-0{,}238)}=3{,}56\cdot10^3.$$

Відповідь: E = 3,56 кВ/м.

Примітка. Якщо відстані між зарядами та між зарядами і точкою поля, в якій визначається напруженість, задані числами 3, 4, 5 (у будь-якій послідовності), або кратними ним, то трикутник – прямокутний. В цьому випадку можна скористатися теоремою Піфагора.

Приклад 14.5. За умовами попередньої задачі визначити потенціал φ електричного поля зарядів q_1 і q_2.

Розв'язання.

Згідно з принципом суперпозиції полів (14.17), потенціал φ сумарного поля, створеного зарядами q_1 і q_2, дорівнює алгебраїчній сумі потенціалів φ_1 і φ_2 полів, які створюються кожним з зарядів окремо: $\varphi=\varphi_1+\varphi_2$.

Потенціал електричного поля, яке утворюється у вакуумі точковим зарядом q на відстані r від нього (14.16) $\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$. Тоді

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1}+\frac{q_2}{r_2}\right).$$

Перевірка одиниці вимірювання: $[\varphi]=\frac{м}{Ф}\cdot\frac{Кл}{м}=В$.

$$\varphi=9\cdot10^9\cdot\left(\frac{-10^{-9}}{0{,}09}+\frac{2\cdot10^{-9}}{0{,}07}\right)=157\,В$$

Отже, як видно з розв'язків задач 14.4 і 14.5, завдяки скалярному характеру потенціалу його розрахунок для системи зарядів суттєво спрощується порівняно з розрахунком вектора напруженості.

У випадках, коли відомі координати точок, в яких знаходяться заряди, значення напруженості можна знайти, визначивши компоненти вектора $\vec{E}$ (див. приклад 14.6).

Приклад 14.6. Точкові заряди $q_1 = 2нКл$; $q_2 = -3нКл$; $q_3 = 1нКл$ знаходяться у вакуумі у точках з координатами (x_1=0; y_1=0,1)м; (x_2= –0,1; y_2= –0,2)м; (x_3=0,2; y_3= –0,1)м відповідно. Визначити величину та напрям вектора напруженості поля в точці А з координатами (x_A=01; y_A=0,1)м.

$q_1 = 0,5 \cdot 10^{-9}$ Кл
$q_2 = -4 \cdot 10^{-9}$ Кл
$q_3 = 1 \cdot 10^{-9}$ Кл
x_1=0; y_1=0,1м
x_2= –0,1м; y_2=-0,2м
x_3=0,2м; y_3= –0,1м
x_A=0,1м; y_A=0,1м

$\vec{E}_A - ?$

Розв'язання

Напруженість сумарного поля точкових зарядів знаходимо за принципом суперпозиції $\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i$, але, оскільки поле утворюється більш, ніж двома зарядами, вектор напруженості поля зручно виразити через його компоненти:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}; \qquad (1)$$

$$E_x = E_{1x} + E_{2x} + E_{3x} = E_1 \cos\alpha_1 + E_2 \cos\alpha_2 + E_3 \cos\alpha_3, \qquad (2)$$

$$E_y = E_{1y} + E_{2y} + E_{3y} = E_1 \sin\alpha_1 + E_2 \sin\alpha_2 + E_3 \sin\alpha_3, \qquad (3)$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2$ – кути, які вектори $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$ утворюють з віссю ОХ.

Зобразимо на координатній площині ХОУ положення завданих зарядів та побудуємо в точці А вектори напруженості полів, утворених ними (рис.14.18). Величину вектора напруженості кожного з зарядів визначимо за формулою (14.4):

$$E_i = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_i^2}, \ (i=1,2,3). \qquad (4)$$

Відстань r_i від заряду q_i до точки А знаходимо за формулою

$$r_i = \sqrt{(x_A - x_i)^2 + (y_A - y_i)^2}. \qquad (2)$$

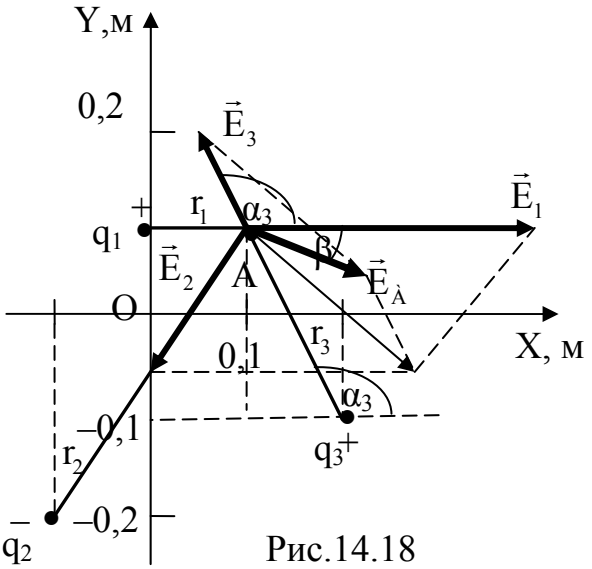


Рис.14.18

Розрахунок дає

$$r_1 = \sqrt{(0,1-0)^2 + (0,1-0,1)^2}м = 0,1м;$$

$$r_2 = \sqrt{(0,1-(-0,1))^2 + (0,1-(-0,2))^2}м = \sqrt{0,13}м = 0,36м;$$

$$r_3 = \sqrt{(0,1-0,2)^2 + (0,1-(-0,1))^2}м = \sqrt{0,05}м = 0,224м.$$

Перевіряємо розмірність: $[E]=\frac{м}{Ф}\cdot\frac{Кл}{м^2}=\frac{В}{м}$.

Підставляємо числові значення в формулу і проводимо обчислення: ($\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}=9\cdot10^9$ м/Ф)

$\left|\vec{E}_1\right|=\frac{0,5\cdot10^{-9}\cdot9\cdot10^9}{0,1^2}=450$ (В/м); $\left|\vec{E}_2\right|=\frac{4\cdot10^{-9}\cdot9\cdot10^9}{0,36^2}=278$ (В/м);

$\left|\vec{E}_3\right|=\frac{1\cdot10^{-9}\cdot9\cdot10^9}{0,224^2}=180$ (В/м).

Для визначення проекцій векторів на координатні осі знаходимо косинуси та синуси кутів α_i, скориставшись тим, що вектори $\vec{E}_i$ утворюють з координатними осями такі самі кути, що й прямі r_i проведені від зарядів до точки А. З урахуванням напряму векторів маємо:

$\cos\alpha_1=\frac{x_A-x_1}{r_1}=\frac{0,1-0}{0,1}=1$; $\sin\alpha_1=\frac{y_A-y_1}{r_1}=\frac{0,1-0,1}{0,1}=0$;

$\cos\alpha_2=\frac{x_2-x_A}{r_2}=\frac{-0,1-0,1}{0,36}=-0,556$; $\sin\alpha_2=\frac{y_2-y_A}{r_2}=\frac{-0,2-0,1}{0,36}=-0,833$;

$\cos\alpha_3=\frac{x_A-x_3}{r_3}=\frac{0,1-0,2}{0,224}=-0,446$; $\sin\alpha_3=\frac{y_A-y_3}{r_3}=\frac{0,1-(-0,1)}{0,224}=0,893$.

Відповідно: $E_{1x}=450\cdot1=450$; $E_{1y}=0$;

$E_{2x}=277\cdot(-0,556)=-154$; $E_{2y}=277\cdot(-0,833)=-231$;

$E_{3x}=180\cdot(-0,446)=-80$; $E_{3y}=180\cdot0,893=161$.

За допомогою формул (1) – (3) визначимо компоненти вектора напруженості поля трьох зарядів, а потім напруженість $\vec{E}$:

$E_{Ax}=450-154-80=216$; $E_{Ay}=0-231+161=-70$;

$Å_À=\sqrt{216^2+(-70)^2}=227$ (В/м).

Тангенс кута β нахилу вектора $\vec{E}_A$ до осі OX знаходимо за формулою

$tg\beta=\frac{E_y}{E_x}=\frac{-70}{216}=-0,324$; $\beta=arctg(-0,324)=-18°$.

Відповідь: $E_A=227\frac{В}{м}$; $\beta=-18°$.

Приклад 14.7. Дві нескінченні паралельні рівномірно заряджені площини знаходяться на відстані d = 1см одна від одної. Поверхнева густина заряду площин відповідно σ_1= 0,6мкКл/м^2 і σ_2= –0,2мкКл/м^2. 1) Визначити напруженість поля поза площинами та проміж ними. Побудувати графік залежності від координати проекції вектора напруженості на вісь OX.

2) Знайти різницю потенціалів між площинами.

$d = 0{,}01$ м $\sigma_1 = 0{,}6 \cdot 10^{-6}$ Кл/м^2 $\sigma_2 = -0{,}2 \cdot 10^{-6}$ Кл/м^2 $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м	Розв'язання
Графік $E_x(x)$ – ? $(\varphi_1 - \varphi_2)$ – ?	

1) Площини розділяють простір на три області. Напруженість поля в кожній з них визначаємо за принципом суперпозиції полів, згідно якому $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. Поле, яке створює кожна площина є однорідним. Визначаємо напрям векторів $\vec{E}_1$ та $\vec{E}_2$. Вектор напруженості $\vec{E}_1$ направлений вздовж нормалі від першої площини, яка несе позитивний заряд, вектор напруженості $\vec{E}_2$ – до другої площини, заряд якої – негативний. Значення напруженості полів, які створюються кожною з площин визначається формулою (14.10): $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}$, де ε_0 – електрична стала, ε – відносна діелектрична проникність, яка за умовою задачі дорівнює одиниці.

Зображуємо вектори $\vec{E}_1$ і $\vec{E}_2$ (рис.14.19).

В областях I та III вектори $\vec{E}_1$ і $\vec{E}_2$ спрямовані протилежно один

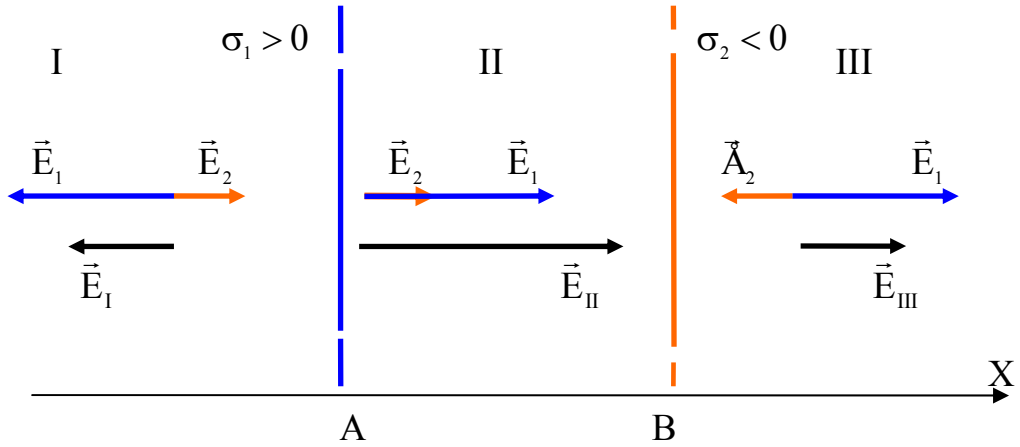


Рис.14.19

одному. Тому напруженість сумарного поля в цих областях за модулем є однаковою, але за напрям сумарних векторів – протилежною, і знаки проекцій $\vec{E}_I$ та $\vec{E}_{III}$ на вісь OX є різними:

$$\left|\vec{E}_I\right| = \left|\vec{E}_{III}\right| = \left|\vec{E}_1\right| - \left|\vec{E}_2\right| = \frac{\sigma_1 - |\sigma_2|}{2\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{0{,}6 \cdot 10^{-6} - 0{,}2 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 1 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} = 2{,}26 \cdot 10^4 \text{ (В/м)};$$

$$E_{Ix} = -2{,}25 \cdot 10^4 \text{ В/м}; \quad E_{IIIx} = 2{,}25 \cdot 10^4 \text{ В/м}.$$

Перевіряємо розмірність: $[E] = \left[\dfrac{\text{Кл}}{\text{м}^2 \cdot \text{Ф} \cdot \text{м}^{-1}}\right] = \left[\dfrac{\text{В}}{\text{м}}\right]$.

В області II вектори $\vec{E}_1$ і $\vec{E}_2$ направлені в один бік, і їх напрям співпадає з напрямом осі OX. Тому

$$\left|\vec{E}_{II}\right| = \left|\vec{E}_1\right| + \left|\vec{E}_2\right| = \frac{\sigma_1 + |\sigma_2|}{2\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{0,6\cdot 10^{-6} + 0,2\cdot 10^{-6}}{2\cdot 1\cdot 8,85\cdot 10^{-12}} = 4,52\cdot 10^4\,\text{В/м}$$

$E_{IIx} = 4,52\cdot 10^4$ В/м.

За результатами розрахунків будуємо графік $E_x(x)$ (рис.14.20).

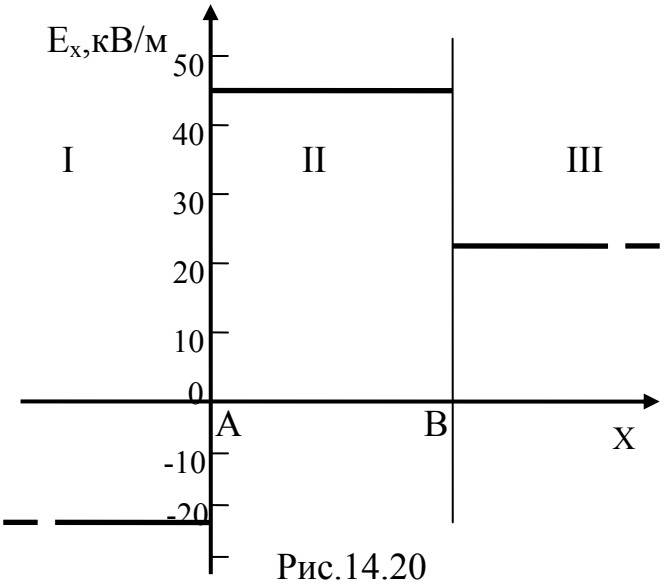


Рис.14.20

2) Зв'язок між різницею потенціалів та напруженістю у випадку однорідного поля, яким є поле заряджених площин, надається формулою (14.20а):

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d}.$$

Звідки витікає

$$\varphi_1 - \varphi_2 = Ed. \qquad (1)$$

Підставляємо значення напруженості в області II $E = 4,52\cdot 10^4$ В/м до формули (1) і знаходимо різницю потенціалів між площинами: $\varphi_1 - \varphi_2 = 4,52\cdot 10^4\,\text{В/м}\cdot 10^{-2}\,\text{м} = 4,52\cdot 10^2\,\text{В}$.

Приклад 14.8. Дві концентричні сфери несуть на собі рівномірно розподілені заряди, які дорівнюють відповідно $q_1 = 6$ нКл та $q_2 = -9$ нКл. Радіуси сфер $R_1 = 6$ см; $R_2 = 12$см. Визначити напруженість поля на відстані $r_1 = 4$ см; $r_2 = 9$см; $r_3 = 15$ см від центру сфер. Побудувати графік $E(r)$ залежності напруженості від відстані r до центра сфер.

$q_1 = 6\cdot 10^{-9}$ Кл
$q_2 = -10\cdot 10^{-9}$ Кл
$R_1 = 6\cdot 10^{-2}$ м
$R_2 = 12\cdot 10^{-2}$ м
$r_1 = 4\cdot 10^{-2}$ м
$r_2 = 9\cdot 10^{-2}$ м
$r_3 = 15\cdot 10^{-2}$ м

$E(r_1); E(r_2); E(r_3) - ?$

Розв'язання

Визначимо напруженість поля сферичної поверхні в заданих точках за формулою (14.12) і принципом суперпозиції (14.5).

1) Точка r_1 знаходиться всередині обох сфер, де електричне поле відсутнє, отже, $E(r_1) = 0$; (1)

2) Відстань r_2 задовольняє подвійній нерівності $R_1 < r_2 < R_2$. У просторі між двома сферами поле утворюється зарядом тільки першої сфери. Тому

$$E(r_2) = E_1(r_2) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}, \text{ де } \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\cdot 10^9\,\text{м/Ф}. \qquad (2)$$

3) На відстані $r > R_2$ поле утворюється зарядами двох сфер. Тому, з урахуванням того, що обидва вектори направлені вздовж радіусу, а знак проекції вектора напруженості на радіус-вектор $\vec{r}$ співпадає зі знаком заряду, маємо:

$$E(r_3) = E_1(r_3) + E_2(r_3) = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_3^2}. \qquad (3)$$

4) Для побудови графіку $E(r)$ необхідно також визначити значення напруженості в точках $r = R_1$ та $r = R_2$, де напруженість змінюється стрибкоподібно при переході через поверхню зарядженої сфери.

При наближенні до поверхні першої сфери з середини $E(R_1) = 0$; при переході через сферу

$$E(R_1) = E_1(R_1) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2}. \qquad (4)$$

При наближенні до поверхні другої сфери з середини

$$E(R_2) = E_1(R_2) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2}; \qquad (5)$$

при наближенні зовні

$$E(R_2) = E_1(R_2) + E_2(R_2) = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2}. \qquad (6)$$

Перевіряємо розмірність: $[E] = \frac{м}{Ф} \cdot \frac{Кл}{м^2} = \frac{В}{м}$.

Обчислення за формулами (2) – (6) дає:

$$E(R_1) = \frac{6 \cdot 10^{-9} \cdot 9 \cdot 10^9}{\left(6 \cdot 10^{-2}\right)^2} = 1{,}5 \cdot 10^4 \text{ В/м} = 15 \text{кВ/м};$$

$$E(r_2) = \frac{6 \cdot 10^{-9} \cdot 9 \cdot 10^9}{\left(9 \cdot 10^{-2}\right)^2} = 0{,}67 \cdot 10^4 \text{ В/м} = 6{,}7 \text{кВ/м};$$

$$E_1(R_2) = \frac{6 \cdot 10^{-9} \cdot 9 \cdot 10^9}{\left(12 \cdot 10^{-2}\right)^2} = 0{,}375 \cdot 10^4 \text{ В/м} = 3{,}75 \text{кВ/м};$$

$$E(R_2) = \frac{(6-10) \cdot 10^{-9} \cdot 9 \cdot 10^9}{\left(12 \cdot 10^{-2}\right)^2} = -0{,}25 \cdot 10^4 \text{ В/м} = -2{,}5 \text{кВ/м};$$

$$E(r_3) = \frac{(6-10) \cdot 10^{-9} \cdot 9 \cdot 10^9}{\left(15 \cdot 10^{-2}\right)^2} = -0{,}16 \cdot 10^4 \text{ В/м} = -1{,}6 \text{кВ/м}.$$

Графік залежності напруженості електричного поля від відстані до центру сфер, який наведений на рис.14.21, побудовано за результатами обчислень.

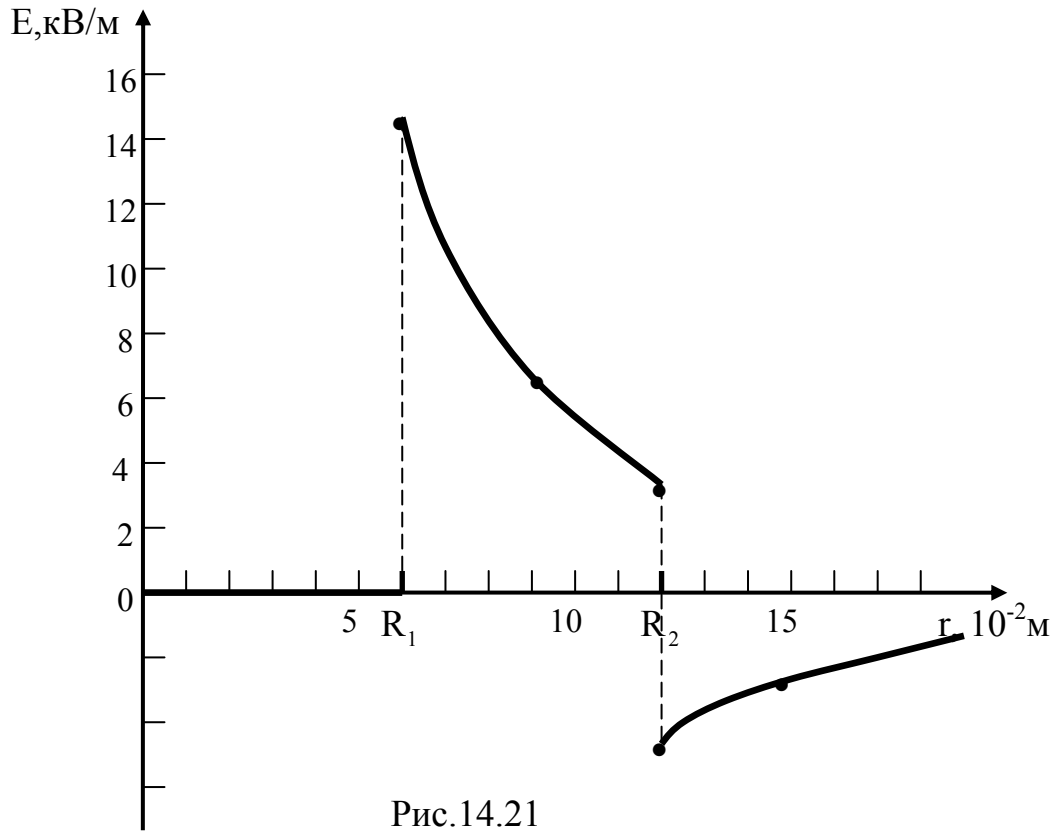


Рис.14.21

Приклад 14.9. Тонкий диск радіусу R рівномірно заряджений з поверхневою густиною заряду σ. Знайти потенціал і напруженість електричного поля в точці A, яка знаходиться на осі диска на відстані z_0 від нього (рис.14.22).

Розв'язання

Для знаходження потенціалу в точці A необхідно застосувати принцип суперпозиції, за яким при неперервному розподілі зарядів $\varphi = \int d\varphi$. Розіб'ємо диск на елементарні кільця товщиною dr, площа яких дорівнює $2\pi r dr$, а заряд $dq = 2\pi\sigma r dr$ (1). Оскільки всі точки кільця рівновіддалені від точки A на відстань $\sqrt{r^2 + z_0^2}$, то потенціал dφ поля, утвореного зарядом кільця збігається з потенціалом поля точкового заряду величини dq на тій самій відстані.

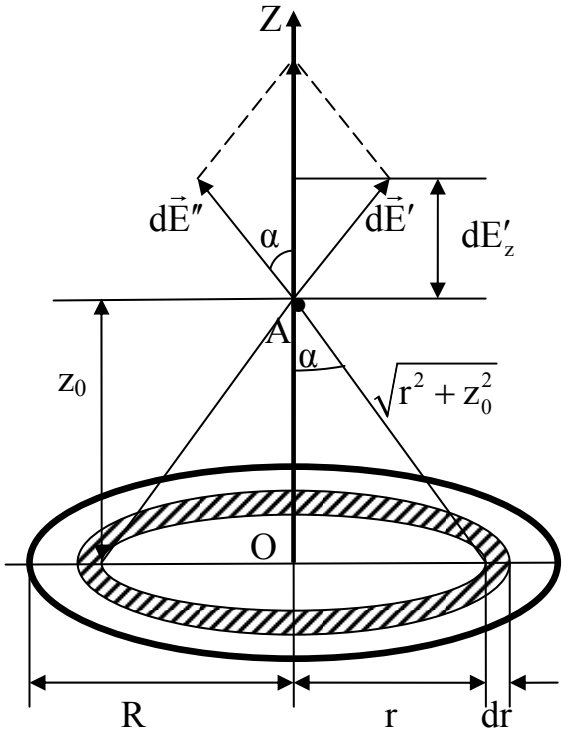


Рис.14.22

За формулою (14.16)

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+z_0^2}} = \frac{\sigma r dr}{2\varepsilon_0\sqrt{r^2+z_0^2}}. \quad (1)$$

Інтегруванням знайденого виразу в границях від $r_1 = 0$ до $r_2 = R$, тобто по всій поверхні диска, визначаємо його потенціал:

$$\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{rdr}{\sqrt{r^2+z_0^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{r^2+z_0^2}\right)\Big|_0^R = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+z_0^2} - z_0\right). \quad (2)$$

За принципом суперпозиції напруженість поля диску дорівнює $\vec{E} = \int d\vec{E}$, де $d\vec{E}$ – напруженість поля, утвореного зарядом елементу диска. Вектори $d\vec{E}$ від різних елементів диска мають різні напрями. Але, оскільки розподіл зарядів має осеву симетрію, при додаванні полів від будь-яких двох симетрично розташованих елементів диска, виникає поле, вектор якого направлений вздовж осі симетрії OZ, на якій лежить точка A (див. рис. 14.22). Отже,

$$E = \int dE_z, \quad (3)$$

де dE_z – проекція вектора $d\vec{E}$ на вісь OZ.

$$dE_z = dE\cos\alpha.$$

В останній формулі $\cos\alpha = \frac{z_0}{\sqrt{r^2+z_0^2}}$ (4), а dE – напруженість поля, утвореного зарядом елементарного кільця, яка збігається з напруженістю поля точкового заряду $dq = 2\pi\sigma r dr$ (1) і дорівнює:

$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\left(r^2+z_0^2\right)} = \frac{2\pi\sigma r dr}{4\pi\varepsilon_0\left(r^2+z_0^2\right)} = \frac{\sigma r dr}{2\varepsilon_0\left(r^2+z_0^2\right)}. \quad (5)$$

Підстановка виразів (4) і (5) до формули (3) з подальшим інтегруванням (яке виконується за допомогою заміни змінних $r^2 + z_0^2 = t^2$) від $r_1 = 0$ до $r_2 = R$ дає:

$$E = \frac{\sigma z_0}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{rdr}{\left(r^2+z_0^2\right)^{3/2}} = \frac{\sigma z_0}{2\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{\sqrt{r^2+z_0^2}}\right)\Bigg|_0^R = \frac{\sigma z_0}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{z_0} - \frac{1}{\sqrt{R^2+z_0^2}}\right);$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z_0}{\sqrt{R^2+z_0^2}}\right). \quad (6)$$

Зрозуміло, що розрахунок напруженості поля порівняно з його потенціалом ускладнюється векторним характером цієї величини. Але, якщо заздалегідь відомий вираз (2) для потенціалу, цей розрахунок

суттєво спрощується. А саме, користуючись формулою (14.20) $\vec{E}=-\mathrm{grad}\varphi$, маємо зв'язок між напруженістю і потенціалом електричного поля.

Розглянемо цей спосіб знаходження напруженості детальніше. Внаслідок симетрії поля градієнт потенціалу направлений вздовж осі OZ до диска (саме в цьому напрямі потенціал зростає найбільш швидко). Приймаючи z_0 у якості змінної маємо $\mathrm{grad}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial z_0}$. Тоді, користуючись формулами (14.20) та (2) отримуємо вираз для E, який збігається з (6):

$$E=-\frac{\partial\varphi}{\partial z_0}=-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial z_0}\left(\sqrt{R^2+z_0^2}-z_0\right)=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{z_0}{\sqrt{R^2+z_0^2}}\right).$$

Звернемо увагу на те, що при $z_0 << R$ другим членом у дужках можна знехтувати, і формула (6) переходить у формулу (14.10) $E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ для напруженості поля нескінченної площини.

Приклад 14.10. Електричне поле утворюється нескінченою ниткою, яка несе на собі рівномірно розподілений позитивний заряд. Під дією поля протон, рухаючись від нитки із точки r_1 = 1см до точки r_2 = 4см, змінив свою швидкість від v_1= $2\cdot10^5$ м/с до $v_2=3\cdot10^6$ м/с. Визначити лінійну густину τ заряду нитки.

Дано
$q_p=1{,}6\cdot10^{-19}$Кл
$m_p=1{,}67\cdot10^{-27}$кг
$r_1=1\cdot10^{-2}$м
$r_2=4\cdot10^{-2}$м
$v_1=2\cdot10^5$м/с
$v_2=3\cdot10^6$м/с

τ-?

Розв'язання.

Зміна кінетичної енергії протона дорівнює роботі сил електричного поля:

$$\frac{m_p v_2^2}{2}-\frac{m_p v_1^2}{2}=\int_{r_1}^{r_2}F\cdot dr. \qquad (1)$$

Виражаємо силу, що діє на заряд протона q_p, через напруженість поля E нескінченої рівномірно зарядженої нитки: F=qE (2), де $E=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r}$ (3).

Тут τ – лінійна густина заряду нитки; $\varepsilon_0=8{,}85\cdot10^{-12}$Ф/м – електрична стала; ε=1 – відносна діелектрична проникність повітря.

Тоді $F=qE=\frac{q\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r}$ (4). Після підстановки виразу (4) у формулу (1) та інтегрування отримуємо:

$$\frac{m_p v_2^2}{2}-\frac{m_p v_1^2}{2}=\frac{q\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r}=\frac{q\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right).$$

Звідки $\tau = \dfrac{\pi\varepsilon_0\varepsilon m_p\left(v_2^2 - v_1^2\right)}{q\ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)}$.

Перевіряємо розмірність: $[\tau] = \dfrac{Ф}{м}\cdot\dfrac{Дж}{Кл} = \dfrac{Дж}{м\cdot В} = \dfrac{В\cdot Кл}{м\cdot В} = \dfrac{Кл}{м}$.

$$\tau = \frac{3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 1{,}67\cdot 10^{-27}\left(9-0{,}4\right)10^{12}}{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot \ln 4} = 5{,}03\cdot 10^{-7}\left(Кл/м\right) \approx 0{,}50\left(мкКл/м\right)$$

Відповідь: τ=0,50мкКл/м.

Приклад 14.11. До якої найменшої відстані можуть зійтися частинки з масами m_1 і m_2 та зарядами $+q_1$ і $+q_2$, що рухаються назустріч одна одній, якщо на віддалі їх відносна швидкість дорівнювала $v_{відн.}$?

Розв'язання.

Розв'язання задачі базується на застосуванні закону збереження енергії $W = const$, оскільки систему двох частинок можна вважати ізольованою, але хід розв'язування задачі залежить від вибору системи відліку.

І спосіб. Найбільш простий розв'язок задача має в системі відліку, яка зв'язана з центром мас системи двох частинок. У такій системі відліку швидкість центра мас v_C=0, і, відповідно, імпульс системи, який дорівнює добутку маси M системи на швидкість руху центра мас, також дорівнює нулю: $\vec{p} = M\vec{v}_C = 0$ (1).

Нехай початкові швидкості частинок (у системі центра мас) дорівнюють $\vec{v}_1'$ і $\vec{v}_2'$. Тоді, з урахуванням співвідношення (1) та тієї обставини, що напрями векторів швидкості є протилежними один до одного, за законом збереження імпульсу маємо

$$m_1 v_1' - m_2 v_2' = 0. \qquad (2)$$

З іншого боку, оскільки частинки рухаються назустріч одна одній,

$$v_{відн.} = v_1' + v_2'. \qquad (3)$$

Сумісне розв'язання рівнянь (2) і (3), які утворюють систему, дає:

$$v_1' = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\cdot v_{відн.}; \qquad v_2' = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\cdot v_{відн.}. \qquad (4)$$

Повна енергія системи частинок у початковий момент дорівнює їх кінетичній енергії (потенціальною енергією кулонівської взаємодії частинок на великій відстані можна знехтувати):

$$W_I = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2}.$$

В момент найбільшого зближення частинки мають однакові за модулем і напрямом швидкості, бо при різних значеннях швидкості частинки або продовжують наближуватися, або починають віддалятися одна від одної. Відстань між ними при цьому вже не буде мінімальною. З урахуванням закону збереження імпульсу системи та умови (1) можна зробити висновок, що кожна з швидкостей при цьому дорівнює нулю: $\vec{v}'_{1\min} = \vec{v}'_{2\min} = 0$. Отже, частинки наближуються, доки їх кінетична енергія повністю не перетвориться в потенціальну енергія кулонівської взаємодії $W_{II} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{\min}}$. За законом збереження енергії

$$\frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{\min}}. \qquad (5)$$

Підставляємо вирази (4) для початкової швидкості частинок у системі центра мас у формулу (5) і знаходимо $r_{\min}$:

$$r_{\min} = \frac{q_1 q_2 \left(m_1 + m_2\right)}{2\pi\varepsilon_0 m_1 m_2 v_{\text{відн.}}^2}. \qquad (6)$$

II спосіб. Розглянемо розв'язання задачі іншим способом. Будемо користуватися лабораторною системою відліку, яка пов'язана з Землею. Якщо $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$ – початкові швидкості частинок в цій системі, то

$$W_I = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}. \qquad (7)$$

Виражаємо відносну швидкість через швидкості частинок. З урахуванням того що швидкості частинок мають протилежні напрями, отримуємо:

$$v_{\text{відн.}} = \left|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right| = v_1 + v_2. \qquad (8)$$

При наближенні частинок їх потенціальна енергія кулонівського відштовхування (яка є позитивною величиною, бо знаки частинок є однаковими) зростає. Відповідно кінетична енергія зменшується і досягає мінімального значення в момент досягнення найменшої відстані між частинками. Безпосередньо в цей момент повна енергія системи дорівнюватиме:

$$W_{II} = W_{k\min} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{\min}}. \qquad (9)$$

Значення $W_{k\min}$ знаходимо з урахуванням того, що в момент максимального зближення частинок їх швидкості є однаковими (див. I спосіб):

$$\vec{v}_{1\min} = \vec{v}_{2\min} = \vec{v}. \qquad (10)$$

Для визначення швидкості v скористаємося законом збереження імпульсу системи.

Імпульс системи частинок $\vec{p}_I = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$ в момент найбільшого зближення (з урахуванням співвідношення (10)) набуває значення $\vec{p}_{II} = (m_1 + m_2)\vec{v}$. В проекції на напрям вектора $\vec{v}_1$ рівняння закону збереження імпульсу має вигляд

$$m_1v_1 - m_2v_2 = (m_1 + m_2)v.$$

Звідки

$$v = \frac{m_1v_1 - m_2v_2}{m_1 + m_2}. \qquad (11)$$

Тоді для величини $W_{k\,min}$ отримуємо

$$W_{k\,min} = \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} = \frac{(m_1v_1 - m_2v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

Підставляємо отриманий вираз у формулу (9) і записуємо рівняння закону збереження енергії $W_I = W_{II}$. З урахуванням виразів для енергій W_I та W_{II} маємо:

$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{(m_1v_1 - m_2v_2)^2}{2(m_1 + m_2)} + \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{min}},$$

або, після виконання алгебраїчних перетворень,

$$\frac{m_1m_2(v_1 + v_2)^2}{(m_1 + m_2)} = \frac{q_1q_2}{2\pi\varepsilon_0 r_{min}}.$$

Звідки, з урахуванням того, що $v_1 + v_2 = v_{відн.}$ (див.(8)), отримуємо r_{min}:

$$r_{min} = \frac{q_1q_2(m_1 + m_2)}{2\pi\varepsilon_0 m_1m_2v_{відн.}^2}. \qquad (6)$$

Розглянемо окремий випадок цієї задачі.

Приклад 14.12. До якої найменшої відстані можуть наблизитися два електрони, які рухаються назустріч один одному з відносною швидкістю $v_{відн.}=10^6$м/с?

$q_1 = q_2 = q = -1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл $m_1 = m_2 = m = 9{,}1\cdot10^{-31}$ кг $v_{відн} = 10^6$м/с ——— r_{min} - ?	Розв'язання З урахуванням еквівалентності зарядів та їх мас формула (6) з попередньої задачі набуває вигляду $r_{min} = \frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 m v_{відн.}^2}.$ (1)

Перевіряємо розмірність:

$$[r_{min}] = \frac{Кл^2\cdot м\cdot с^2}{Ф\cdot кг\cdot м^2} = \frac{В\cdot Кл\cdot с^2}{кг\cdot м} = \frac{Дж\cdot с^2}{кг\cdot м} = \frac{кг\cdot м^2}{с^2}\cdot\frac{с^2}{кг\cdot м} = м$$

Розрахунок за формулою (1) дає:

$$r_{min} = \frac{\left(-1,6\cdot 10^{-19}\right)^2}{3,14\cdot 8,85\cdot 10^{-12}\cdot 9,1\cdot 10^{-31}\cdot 10^{12}} = 1,0\cdot 10^{-9}\text{ м.}$$

Зауважимо, що якби один з електронів залишався нерухомим, а початкова швидкість другого дорівнювала заданому в умові значенню $v=10^6$м/с, рівняння закону збереження енергії мало б вигляд: $\frac{mv^2}{2} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_{min}}$. Звідки $r_{min} = \frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 mv^2}$. Тобто, у цьому випадку електрони могли б наблизитися до удвічі меншій відстані, порівняно з визначеною за формулою (1).

Приклад 14.13. Різниця потенціалів U_1 між розжареним катодом та анодом «електронної гармати» (електронного інжектора) в електронно-променевій трубці дорівнює 300В. Прискорені цим полем електрони, проходячи через незаряджений горизонтальний конденсатор паралельно його пластинам, утворюють на екрані світну пляму. На яку відстань Δh зміститься світна пляма, якщо на конденсатор подати різницю потенціалів U=36В? Довжина конденсатора L_1=6см, відстань між його пластинами d=1,2см. Екран знаходиться на відстані L_2=10см від кінця конденсатора.

U_1=300В
U=36В
L_1 =0,06м
L_2=0,1м
d=0,012м
Δh - ?

Розв'язання

Розглянемо рух електрона в електронно-променевій трубці (рис.14.23). В «електронній гарматі» електрон прискорюється за рахунок роботи електричного поля, яке існує між катодом і анодом. Зміна кінетичної енергії електрона дорівнює роботі сил поля (14.18):

$$\frac{mv_0^2}{2} = |e|U_1. \qquad (1)$$

Тут $\vec{v}_0$ – швидкість, з якою електрон вилітає із «гармати» (початкову швидкість електронів, які залишають катод, вважаємо рівною нулю); e – заряд електрона; m – його маса.

Користуючись (1) отримуємо $\vec{v}_0$: $v_0 = \sqrt{\frac{2|e|U_1}{m}}$. (2)

За умови відсутності заряду на конденсаторі після вильоту електрона з «гармати» на нього не діють сили (силою тяжіння ми нехтуємо), і він рухається прямолінійно вздовж осі OX зі швидкістю $\vec{v}_0$ (див. рис. 14.23).

При поданні напруги U на конденсатор на електрон з боку поля конденсатора діє сила $\vec{F} = e\vec{E}$, яка надає йому прискорення $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{e\vec{E}}{m}$, спрямоване вздовж осі OY. Таким чином, рух електрона є

рівноприскореним. Закон, за яким електрон рухається у межах конденсатора, має вигляд $\Delta\vec{r}_1 = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2} = \vec{v}_0 t + \frac{e\vec{E}t^2}{2m}$ (3). Траєкторія руху електрона є параболою. Швидкість руху визначається формулою

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t = \vec{v}_0 + \frac{e\vec{E}t}{m}. \qquad (4)$$

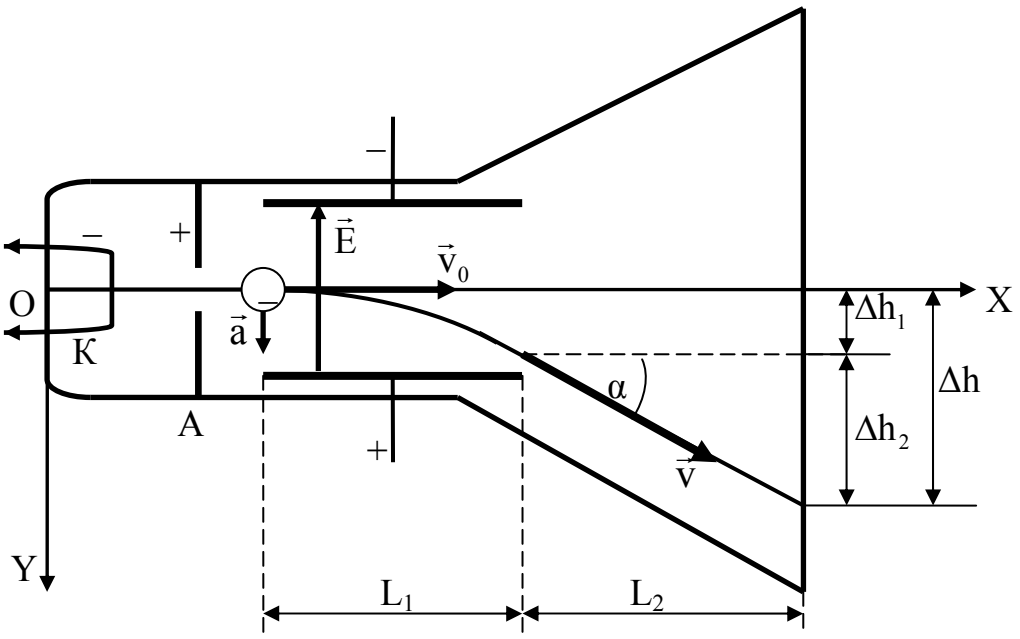


Рис.14.23

В проекціях на координатні вісі рівняння (3) і (4) дають:

$$\Delta x_1 = v_0 t; \ (5) \qquad \Delta y_1 = \frac{|e|Et^2}{2m}; \quad (6)$$

$$v_x = v_0; \quad (7) \qquad v_y = \frac{eE}{m}t \qquad (8)$$

Поле плоского конденсатора є однорідним, тому напруженість E пов'язана з напругою співвідношенням $E = \frac{U}{d}$ (9). Тоді зміщення електрона вздовж осі OY під час руху у полі конденсатора підпорядковується співвідношенню:

$$\Delta y_1 = \frac{|e|Ut^2}{2md}. \qquad (6a)$$

Користуючись формулою (6а), можемо визначити максимальне вертикальне зміщення електрона у конденсаторі. Якщо у якості t обрати час t_1 прольоту електрона крізь конденсатор, з формули (5) при $\Delta x_1 = L_1$ (де L_1 – довжина конденсатора) з урахуванням виразу (2) для швидкості v_0 отримуємо наступний вираз:

$$t_1 = \frac{L_1}{v_0} = L_1\sqrt{\frac{m}{2|e|U_1}}. \qquad (10)$$

Відповідно, з формули (6а) витікає:

$$\Delta h_1 = \frac{|e|Ut_1^2}{2md} = \frac{|e|U}{2md}\cdot\frac{L_1^2 m}{2|e|U_1} = \frac{UL_1^2}{4U_1 d}. \qquad (11)$$

В момент вильоту електрона з конденсатора t_1 його швидкість $\vec{v}$ утворює кут α з початковим напрямом руху, а її складові, які розраховуються за формулами (7), (8) з урахуванням виразів (9) та (10) дорівнюють, відповідно:

$$v_x = v_0;$$

$$v_y = \frac{eE}{m}t_1 = \frac{eUL_1}{md}\cdot\sqrt{\frac{m}{2|e|U_1}}. \qquad (12)$$

У просторі між конденсатором і екраном на електрон не діють сили, і він рухається рівномірно й прямолінійно зі швидкістю $\vec{v}$ за законом $\Delta\vec{r}_2 = \vec{v}t$.

У проекціях на координатні вісі, з урахуванням виразів (7) та (11), маємо:

$$\Delta x_2 = v_x t = v_0 t; \qquad (13)$$

$$\Delta y_2 = v_y t = \frac{eUL_1}{md}\cdot\sqrt{\frac{m}{2|e|U_1}}t. \qquad (14)$$

Покладаючи $\Delta x_2 = L_2$, з формули (13) знаходимо час руху електрона на протязі від конденсатора до екрана

$$t_2 = \frac{L_2}{v_0} = L_2\sqrt{\frac{m}{2|e|U_1}}.$$

Підставляючи час t_2 у формулу (14), отримуємо максимальне вертикальне зміщення Δh_2 на цій стадії:

$$\Delta h_2 = \frac{|e|UL_1}{md}\cdot\sqrt{\frac{m}{2|e|U_1}}t_2 = \frac{|e|UL_1}{md}\cdot\sqrt{\frac{m}{2|e|U_1}}\cdot L_2\sqrt{\frac{m}{2|e|U_1}} = \frac{L_1L_2U}{2U_1d}. \qquad (15)$$

Повне зміщення світлої плями на екрані знаходимо простим додаванням виразів (11) та (15):

$$\Delta h = \Delta h_1 + \Delta h_2 = \frac{UL_1^2}{4U_1d} + \frac{L_1L_2U}{2U_1d} = \frac{L_1U}{4U_1d}\cdot(L_1 + 2L_2). \qquad (16)$$

Перевіряємо розмірність та проводимо розрахунок за формулою (16).

$$[\Delta h] = \frac{\text{м}\cdot\text{В}\cdot\text{м}}{\text{В}\cdot\text{м}} = \text{м};$$

$$\Delta h = \frac{0{,}06\cdot 36}{4\cdot 300\cdot 0{,}012}\cdot(0{,}06 + 2\cdot 0{,}1) = 0{,}039\ \text{м}.$$

Відповідь: $\Delta h = 39$ мм.

Приклад 14.14. Електричний диполь, заряд якого q = 10нКл, а плече l=0,5см, знаходиться в однорідному електричному полі напруженістю E=40кВ/м так, що його дипольний момент $\vec{p}$ утворює з напрямом силових ліній поля кут $\alpha_0 = 60°$. Визначити роботу сил поля при повороті диполя на кут $\delta = 30°$.

Розв'язання

$q = 10 \cdot 10^{-9}$ Кл	Для розв'язання задачі скористаємося формулою,
$l = 5 \cdot 10^{-3}$ м	що надає зв'язок між роботою сил поля та зміною
$E = 4 \cdot 10^{4}$ В/м	потенціальної енергії: $A = W_{p1} - W_{p2}$ (1).
$\alpha_0 = 60°$	Диполь з моментом $\vec{p} = q \cdot \vec{l}$, який міститься в
$\delta = 30°$	електричному полі напруженістю $\vec{E}$, має потенціальну
A - ?	енергію $W_p = q + (-q\varphi_-) = q(\varphi_+ - \varphi_-)$ (2), де $(\varphi_+ - \varphi_-)$ –

різниця потенціалів зовнішнього поля в точках, де знаходяться заряди +q і –q. З рис 14.24 видно, що $\varphi_+ - \varphi_-$ дорівнює приросту потенціалу на відрізку $\Delta x = l\cos\alpha$ (напрям осі x збігається з напрямом вектора $\vec{E}$). Із використанням зв'язку між напруженістю поля і потенціалом, маємо:

$$\varphi_+ - \varphi_- = \frac{d\varphi}{dx} l\cos\alpha = -El\cos\alpha. \qquad (3)$$

Підстановка виразу (3) у формулу (2) дає:

$$W_p = -qEl\cos\alpha = -pE\cos\alpha = -\vec{p}\vec{E}. \qquad (4)$$

Із урахуванням формули (4) роботу сил поля (1) можна представити у вигляді:

$$A = -qlE(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) = qlE(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1). \qquad (5)$$

Диполь може бути повернутим на кут $\delta = 30° = \frac{\pi}{6}$ двома способами: за годинниковою стрілкою до кута $\alpha_1 = \alpha_0 - \delta = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ та проти неї – до кута $\alpha_2 = \alpha_0 + \delta = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ (див. рис.14.24).

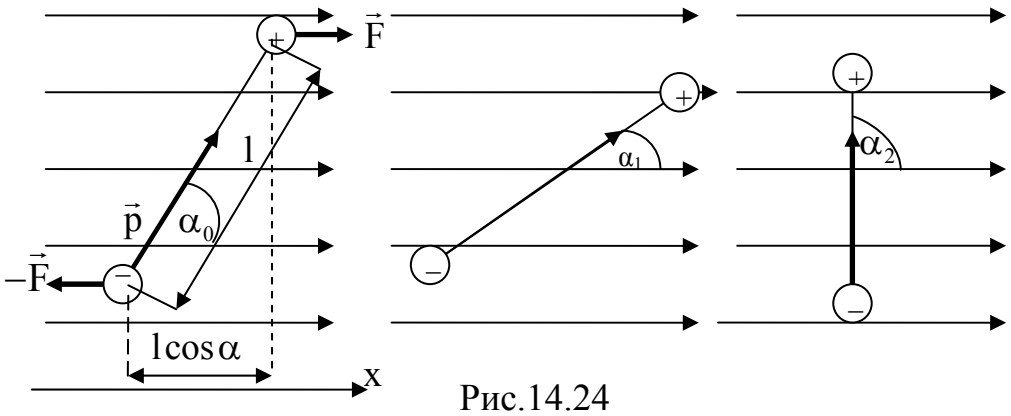


Рис.14.24

Згідно із формулою (5) робота сил поля при повороті диполя за годинниковою стрілкою

$$A_1 = 10 \cdot 10^{-9} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^4 \left(\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{3} \right) = 2 \cdot 10^{-6} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \right) = 0,73 \cdot 10^{-6} \text{ Дж.}$$

При повороті проти годинникової стрілки, відповідно, маємо

$$A_2 = 10 \cdot 10^{-9} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^4 \left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{3} \right) = 2 \cdot 10^{-6} \left(0 - \frac{1}{2} \right) = -1 \cdot 10^{-6} \text{ Дж.}$$

Якщо у першому випадку завдяки обертальному моменту сил, які діють на диполь з боку поля, робота виконується силами поля, у другому випадку зовнішні сили виконують роботу проти сил поля, на що указує знак " $-$ " в отриманому результаті.

Перевірка розмірності: $[A] = \text{Кл} \cdot \text{м} \cdot \frac{\text{В}}{\text{м}} = \text{Дж}$.

Відповідь: $A_1 = 0,73$ мкДж; $A_2 = 1$ мкДж.

Приклад 14.15. Визначити силу**,** з якою полярна молекула (наприклад, молекула води H_2O) з дипольним моментом $\vec{p}$, яка знаходиться біля стінки металевої посудини на відстані r від неї, взаємодіє з провідною стінкою посудини.

Розв'язання

При наближенні молекули до провідної стінки заряд диполя приводить до виникнення на провідній поверхні стінки індукованих зарядів. Взаємодія диполя з цими зарядами і є взаємодією зі стінкою. Для визначення сили взаємодії скористаємося методом електричних зображень. Поверхню стінки будемо вважати плоскою, оскільки розміри стінки значно більші за розміри молекули.

1. Для початку визначимо, яким буде електричне поле, якщо на відстані r від металевої пластини великого розміру знаходиться точковий заряд q. Відомо, що усередині металу електричного поля немає, $\vec{E} = 0$. Повне поле у лівому півпросторі є сумою полів, які створюються зарядом q та індукованими зарядами. Для визначення останнього представимо поле у правому півпросторі також як суму полів заряду q та індукованих зарядів. Зрозуміло, що рівність напруженості цього поля нулю може досягатися тільки, якщо поле індукованих зарядів еквівалентно полю точкового заряду $-q$, поміщеного в ту саму точку, де знаходиться заряд q. Поле індукованих зарядів є симетричним відносно плоскої границі металу, тому зліва від границі воно еквівалентно полю точкового заряду $-q$, розташованого симетрично заряду q справа від площини (рис. 14.25).

Отже, сила, що діє на точковий заряд q збоку індукованих на поверхні металу зарядів може бути визначена за законом Кулона і

дорівнює силі, з якою діяв би на нього точковий заряд $-q$, симетрично розташований по інший бік поверхні металу: $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{(2r)^2}$. (1)

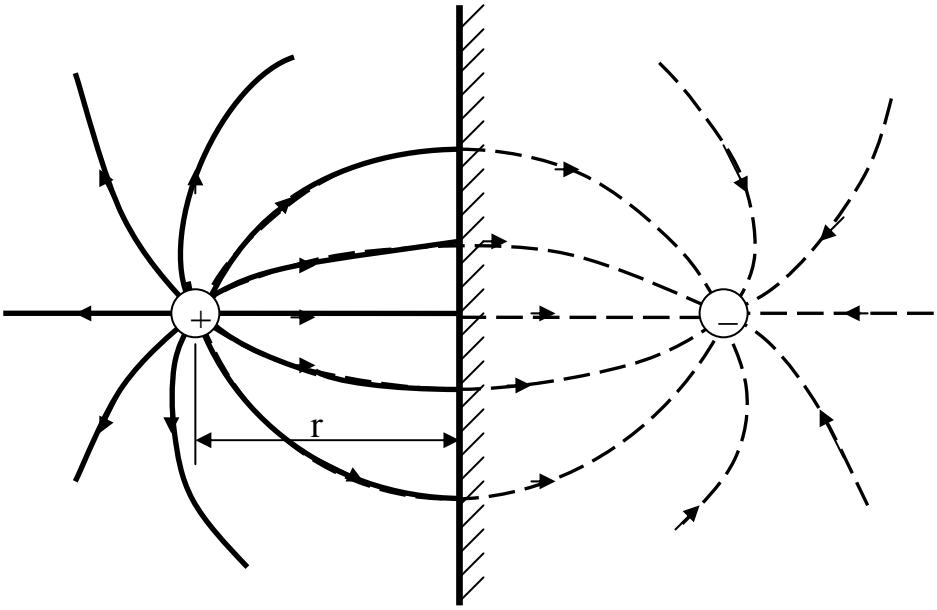


Рис.14.25

2. Отриманий результат використовуємо для знаходження сили, що діє на диполь, розташований паралельно провідній стінці посудини. Згідно попередньому, дія індукованих зарядів на диполь еквівалентна дії на нього двох точкових зарядів, кожний з яких є «зображенням» відповідного заряду диполя (рис.14.26). Таким чином сила, що діє на диполь збоку стінки є рівнодійною чотирьох сил, з яких $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ є силами притягання, а сили $\vec{F}_3$ і $\vec{F}_4$ - силами відштовхування.

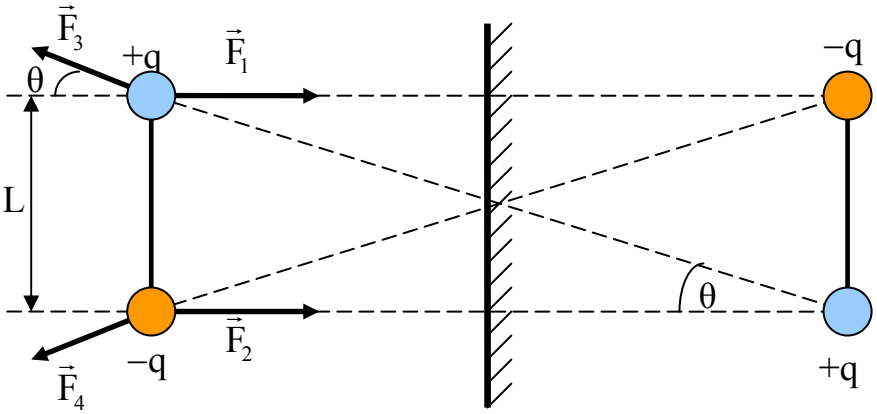


Рис.14.26

Рівнодійна сил притягання $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ направлена до стінки. Із використанням формули (1) для неї отримуємо:

$$\left|\vec{F}_1+\vec{F}_2\right|=2\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q^2}{(2r)^2}. \qquad (2)$$

Рівнодійна сил відштовхування є меншою за величиною внаслідок того, що відстань між однойменними зарядами є більшою у порівнянні із різнойменними, а самі сили спрямовані під деяким кутом θ.

$$\left|\vec{F}_3+\vec{F}_4\right|=2\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q^2}{(2r)^2+L^2}\cos\theta=2\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q^2}{(2r)^2+L^2}\cdot\frac{2r}{\sqrt{(2r)^2+L^2}}. \qquad (3)$$

Аналізуючи отриманий результат, дійдемо до висновку, що диполь, який знаходиться біля металевої стінки, притягується до неї.

Перш, ніж знайти величину рівнодійної усіх сил проведемо перетворення виразу (3), припустивши, що плече диполя L є малим порівняно з відстанню r молекули до стінки. Тоді відношення $\frac{L}{r}<<1$ і, виділивши у виразі (3), отриманому для сили відштовхування безрозмірний параметр $\frac{L}{2r}$, можна провести розклад по ньому, обмежуючись двома першими членами розкладу:

$$\left|\vec{F}_3+\vec{F}_4\right|=\frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2r}{\left((2r)^2+L^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0(2r)^2}\left(1+\frac{L^2}{(2r)^2}\right)^{-\frac{3}{2}}=\frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0(2r)^2}\left(1-\frac{3}{2}\frac{L^2}{(2r)^2}\right)$$

Повна сила F взаємодії диполя зі стінкою є рівнодійною сили притягання та відштовхування:

$$F=\left|\vec{F}_1+\vec{F}_2\right|-\left|\vec{F}_3+\vec{F}_4\right|=\frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0(2r)^2}\cdot\frac{3}{2}\frac{L^2}{(2r)^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3p^2}{(2r)^4},$$

де $p=qL$ – дипольний момент молекули.

Відповідь: сила, що діє з боку металевої стінки на диполь, розташований паралельно до неї, є силою притягання і дорівнює: $F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3p^2}{(2r)^4}$.

Приклад 14.16. Відстань між пластинами плоского горизонтального конденсатора дорівнює d=5мм, різниця потенціалів U=150В. На нижній пластині лежить плитка парафіну (ε_1=2) товщиною d_1=3мм (рис.14.27). Визначити поверхневу густину зв'язаних зарядів на парафіні σ', електричне зміщення D у середині плитки та поляризованість діелектрика P.

Розв'язання

$d = 5 \cdot 10^{-3}$ мм $d_1 = 3 \cdot 10^{-3}$ мм U=150В ε_1=2 $\varepsilon_2 = \varepsilon_{пов.}$=1	Товщина повітряного зазору $d_2 = d - d_1 = 2$ мм.
σ'; D; P – ?	

Різниця потенціалів між пластинами конденсатора складається з різниці потенціалів між поверхнями парафіну U_1 і у повітряному зазорі U_2: $U = U_1 + U_2$.

Ураховуючи зв'язок напруженості з різницею потенціалів у однорідному полі, яким є поле плоского конденсатора, маємо $U = E_1 d_1 + E_0 d_2$. (1)

Напруженість електричного поля у парафіні в ε_1 разів менша, ніж у повітрі:

$E_1 = \dfrac{E_0}{\varepsilon_1}$. Звідки, $E_0 = \varepsilon_1 E_1$ (2). Підстановка виразу (2) у формулу (1) дає:

$$U = E_1 d_1 + \varepsilon_1 E_1 d_2 .$$

Звідки $$E_1 = \frac{U}{d_1 + \varepsilon_1 d_2}.$$

За означенням (14.37) вектора електричного зміщення

$$D = \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 U}{d_1 + \varepsilon_1 d_2}. \qquad (3)$$

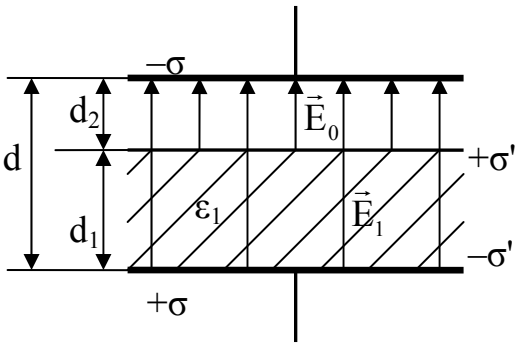


Рис.14.27

Перевіряємо одиницю вимірювання та проводимо обчислення.

$$[D] = \frac{Ф \cdot В}{м^2} = \frac{Кл}{м^2}; \qquad D = \frac{2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 150}{3 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = 3{,}79 \cdot 10^{-7} \ \frac{Кл}{м^2}.$$

З іншого боку, поле у парафіні E_1 менше поля у вакуумі (повітрі) E_0 на величину напруженості E' поля, утворюваного зв'язаними зарядами, що виникають на поверхні парафіну внаслідок його поляризації (рис.14.27):

$$E_1 = E_0 - E'. \qquad (4)$$

Оскільки поле зв'язаних зарядів можна розглядати як поле нескінченних паралельних різнойменно заряджених пластин з поверхневою густиною зарядів σ', за допомогою формули (14.11) отримуємо $E' = \dfrac{\sigma'}{\varepsilon_0}$ (5).

Підстановка виразів (2) і (5) у формулу (4) дає: $E_1 = \varepsilon_1 E_1 - \dfrac{\sigma'}{\varepsilon_0}$. Звідки знаходимо σ'.

$$\sigma' = (\varepsilon_1 - 1)\varepsilon_0 E_1 = \frac{(\varepsilon_1 - 1)\varepsilon_0 U}{d_1 + \varepsilon_1 d_2}. \qquad (5)$$

Перевіряємо розмірність:

$$\sigma' = \frac{Ф \cdot В}{м \cdot м} = \frac{Кл \cdot В}{В \cdot м^2} = \frac{Кл}{м^2}.$$

Після розрахунків отримуємо

$$\sigma' = \frac{(2-1)\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 150}{(3+2\cdot 2)\cdot 10^{-3}} = 1{,}9\cdot 10^{-7}\,\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}.$$

Згідно з формулою (14.35) нормальна складова вектора поляризованості P_n дорівнює поверхневій густині зв'язаних зарядів. З геометрії задачі випливає, що вектор поляризованості є перпендикулярним до поверхні діелектрика, отже $P = P_n = \sigma' = 1{,}9\cdot 10^{-7}\,\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$.

Відповідь: $D = 3{,}79\cdot 10^{-7}\,\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$; $\sigma' = 1{,}9\cdot 10^{-7}\,\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$; $P = 1{,}9\cdot 10^{-7}\,\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$.

Приклад 14.17. Кулі електроємністю 5пФ надали заряд 0,3нКл, а кулі електроємністю 7пФ – заряд 0,9нКл. Як розподіляться заряди між кулями, якщо їх з'єднати провідником? Яким буде потенціал кульок? Електроємністю провідника знехтувати.

Розв'язання

$C_1 = 5\cdot 10^{-12}\,\text{Ф}$ $C_2 = 7\cdot 10^{-12}\,\text{Ф}$ $q_1 = 0{,}3\cdot 10^{-9}\,\text{Кл}$ $q_2 = 0{,}9\cdot 10^{-9}\,\text{Кл}$	При з'єднанні кульок утворюється один провідник з загальним потенціалом φ і зарядом $q = q_1 + q_2$ (1) . Заряди кульок зміняться і будуть дорівнювати q_1' та q_2'. Але їх сума згідно закону збереження заряду залишиться незмінною: $q_1' + q_2' = q$ (2).
$q_1'; q_2'; \varphi - ?$	

Електроємність кульок можна обчислити за формулами $C_1 = \frac{q_1'}{\varphi}$ і $C_2 = \frac{q_2'}{\varphi}$, де φ – загальний потенціал кульок. Додавання цих формул з урахуванням співвідношень (1) і (2) дає:

$$C_1 + C_2 = \frac{q_1' + q_2'}{\varphi} = \frac{q_1 + q_2}{\varphi}.$$

Звідки знаходимо загальний потенціал кульок $\varphi = \frac{q_1 + q_2}{C_1 + C_2}$.

Підставляємо чисельні значення: $\varphi = \frac{(0{,}3 + 0{,}9)\cdot 10^{-9}\,\text{Кл}}{(5+7)\cdot 10^{-12}\,\text{Ф}} = 100\text{В}$.

Розраховуємо заряди кожної з кульок після їх з'єднання:

$q_1' = C_1\varphi = 5\cdot 10^{-12}\,\text{Ф}\cdot 100\text{В} = 0{,}5\cdot 10^{-9}\,\text{Кл} = 0{,}5\text{нКл}$;

$q_2' = C_2\varphi = 7\cdot 10^{-12}\,\text{Ф}\cdot 100\text{В} = 0{,}7\cdot 10^{-9}\,\text{Кл} = 0{,}7\text{нКл}$.

Отже, заряд першої кульки збільшився на 0,2нКл, а другої – зменшився на таку саму величину.

Відповідь: $q_1' = 0{,}5\text{нКл}$; $q_2' = 0{,}7\text{нКл}$; $\varphi = 100\text{В}$.

Приклад 14.18. На рис.14.28 зображена батарея конденсаторів, електроємності яких, виражені у мікрофарадах, указані на схемі. Визначити повну електроємність батареї C_{AB}.

Розв'язання

Скористаємося правилами (14.47), (14.49) для визначення загальної електроємності при послідовному і паралельному з'єднанні конденсаторів.

Розраховуємо електроємність конденсаторів, які з'єднані паралельно. При паралельному з'єднанні електроємності додаються:

$C_{DF} = C_1 + C_2 + C_3$;

$C_{DF} = 3 + 4 + 5 = 12$ мкФ;

$C_{KG} = C_5 + C_6$;

$C_{KG} = 4 + 2 = 6$ мкФ.

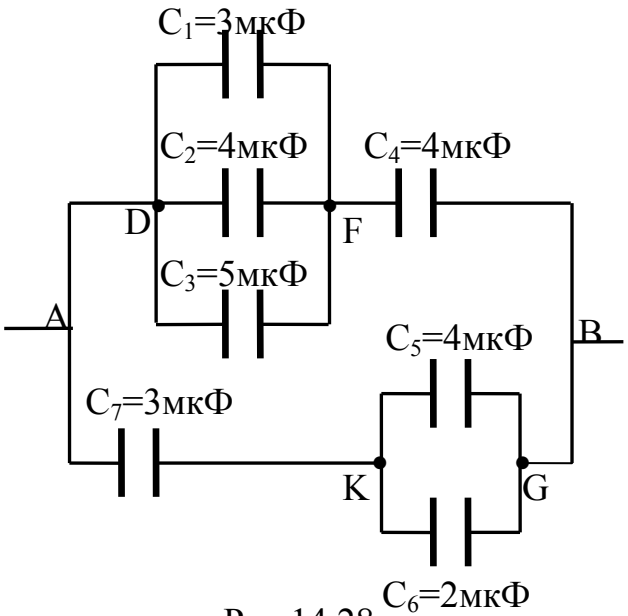


Рис.14.28

Замінюємо відповідні ділянки конденсаторами з розрахованою ємністю. Еквівалентна схема, зображена на рис.14.28а. Розраховуємо електроємність ділянок DB та AG з послідовно з'єднаними конденсаторами. При послідовному з'єднанні додаються величини, обернені ємностям, тобто

$$\frac{1}{C_{DB}} = \frac{1}{C_{DF}} + \frac{1}{C_4} = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}; \qquad C_{DB} = 3\,\text{мкФ};$$

$$\frac{1}{C_{AG}} = \frac{1}{C_7} + \frac{1}{C_{KG}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}; \qquad C_{AG} = 2\,\text{мкФ}.$$

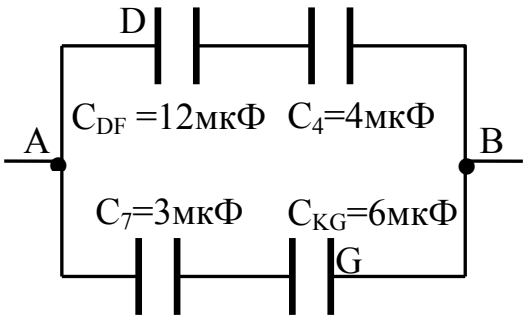


Рис.14.28а

Оскільки ділянки DB та AG між собою з'єднані паралельно, остаточно знаходимо:

$C_{AB} = C_{DB} + C_{AG}$;

$C_{AB} = 3 + 2 = 5$ мкФ.

Відповідь: $C_{AB} = 5$ мкФ.

Приклад 14.19. Площа пластин плоского повітряного конденсатора $S=50см^2$, відстань між ними d_1= 1см. До пластин конденсатора прикладена різниця потенціалів U = 1,5 кВ. Якою стане напруженість E поля конденсатора, якщо, не від'єднуючи конденсатор від джерела напруги, збільшити відстань між пластинами до d_2= 2,5см? Визначити енергії W_1 й W_2 конденсатора до та після збільшення відстані.

$S = 50\cdot10^{-4}м^2$
$d_1 = 1\cdot10^{-2}м$
$d_2 = 2,5\cdot10^{-2}м$
$U = 1,5\cdot10^3В$
$\varepsilon=1$
$\varepsilon_0=8,85\cdot10^{-12}Ф/м$

E_2; W_1; W_2 - ?

Розв'язання

За умовою задачі напруга U на конденсаторі не змінюється, оскільки його не від'єднали від джерела.

Напруженість поля конденсатора визначаємо за формулою

$$E_2 = \frac{U}{d_2} = \frac{1,5\cdot10^3 В}{2,5\cdot10^{-2} м} = 6\cdot10^4 \frac{В}{м}.$$

Енергію поля конденсатора надає формула $W = \frac{CU^2}{2}$ (1), де $C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$ (2) – електроємність конденсатора. Підставляємо вираз (2) у формулу (1). Отримуємо: $W = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 SU^2}{2d}$ (3).

Підстановка значень у формулу (3) дає:

$$W_1 = \frac{1\cdot8,85\cdot10^{-12}\cdot50\cdot10^{-4}\cdot1,5\cdot10^3}{1\cdot10^{-2}} = 6,64\cdot10^{-9} \text{ (Дж)};$$

$$W_2 = \frac{1\cdot8,85\cdot10^{-12}\cdot50\cdot10^{-4}\cdot1,5\cdot10^3}{2,5\cdot10^{-2}} = 2,66\cdot10^{-9} \text{ (Дж)};$$

$$[W] = \left[\frac{Ф\cdot м^2\cdot В^2}{м\cdot м}\right] = [Кл\cdot В] = [Дж].$$

Відповідь: $E_2 = 6\cdot10^4 \frac{В}{м}$; $W_1 = 6,64\cdot10^{-9}$ Дж; $W_2 = 2,66\cdot10^{-9}$ Дж;

Приклад 14.20. Точковий заряд $q = 4$мкКл поміщений у центрі сферичного шару з однорідного та ізотропного діелектрика з ε =2. Внутрішній радіус шару r_1=0,1м, зовнішній r_2=0,3м. Знайти енергію W електричного поля у межах діелектрика.

$q = 4\cdot10^{-6}$ Кл
$\varepsilon=2$
r_1=0,1м
r_2=0,3м

W-?

Розв'язання

Енергія електричного поля в об'ємі V надається формулою (14.55):

$$W = \int_V w\,dV = \int_V \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} dV. \qquad (1)$$

Тут E – напруженість електричного поля, яке

створюється точковим зарядом q у діелектрику, яка дорівнює:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}, \qquad (2)$$

де r – відстань від точкового заряду до даної точки поля.

Об'єм dV обираємо у вигляді тонкого сферичного шару товщиною dr, у межах якого напруженість поля E і об'ємну густину енергії w можна вважати постійними:

$$dV = 4\pi r^2 dr. \qquad (3)$$

Підставляємо вирази (2) і (3) у формулу енергії (1) та беремо інтеграл у межах поля в діелектрику, тобто від r_1 до r_2:

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} \cdot \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}\right)^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Перевіряємо одиницю вимірювання:

$$[W] = \frac{\text{Кл}^2 \cdot \text{м}}{\Phi \cdot \text{м}} = \text{В} \cdot \text{Кл} = \text{Дж};$$

Проводимо обчислення ($\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9$ м/Ф):

$$W = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot \left(4 \cdot 10^{-6}\right)^2}{2 \cdot 2}\left(\frac{1}{0{,}1} - \frac{1}{0{,}3}\right) = 0{,}24 \text{ Дж}.$$

Відповідь: $W = 0{,}24$ Дж.

Задачі для самостійного розв'язування

14.1.Двом однаковим кулькам, які підвішені на нитках рівної довжини, надали однакові за величиною й знаком заряди, після чого занурили у керосин (ε = 2; ρ_1 = 800 кг/м^3). Визначити густину ρ матеріалу кульок, якщо відомо, що кут α розходження ниток у повітрі та в керосині однаковий.

14.2. Дві кулі однакового радіуса та ваги підвішені на нитках так, що їх поверхні торкаються. Після надання кулям заряду q = $4 \cdot 10^{-7}$Кл вони відштовхнулись так, що нитки розійшлись на кут 60°. Знайти вагу куль, якщо відстань від точки підвісу до центра кулі дорівнює 20см.

14.3. На тонкій шовковій нитці підвішена заряджена кулька. Маса кульки m=1 г, заряд q_1= 15нКл. Знизу, у напрямку підвісу, до неї підносять іншу кульку, заряд якої q_2 = –12нКл. При якій найменшій відстані r_{min} між кульками нитка розірветься, якщо максимальна сила натягу, яку витримує нитка T = 15мН?

14.4. На двох однакових краплях води радіусом r = 96,1 мкм знаходяться однакові за величиною негативні заряди. Величина зарядів така, що сила кулонівського відштовхування урівноважує силу гравітаційного притягання. Скільки надлишкових електронів надано кожній краплі? Заряди крапель вважати точковими.

14.5. На двох однакових крапельках води знаходиться по одному зайвому електрону, причому сила електричного відштовхування крапель врівноважується силою гравітаційного тяжіння. Які радіуси крапель?

14.6. Відстань між вільними зарядами q_1= 135 нКл і q_2= 540 нКл становить l= 60 см. Визначити точку на прямій, що проходить через заряди, в яку слід помістити третій заряд так, щоб система знаходилась у рівновазі. Визначити величину й знак заряду. Чи буде стійкою рівновага?

14.7. Навколо нерухомого точкового заряду $q=10^{-9}$Кл, рівномірно обертається під дією кулонівської сили маленька кулька з негативним зарядом. Чому дорівнює відношення заряду до його маси, якщо радіус орбіти 0,2м, а кутова швидкість обертання ω = 3 рад/с?

14.8. Три однакових заряди, величиною q = 4 нКл кожний, розміщені у вершинах рівностороннього трикутника. Який за величиною та знаком заряд q треба помістити в центр трикутника, щоб система перебувала в рівновазі? Чи буде ця рівновага стійкою?

14.9. У вершинах квадрата знаходяться чотири однакових позитивних заряди $q = 6\cdot10^{-7}$Кл. Який заряд q_0 слід помістити в центр квадрата, щоб система зарядів знаходилась у рівновазі?

14.10. Точкові заряди q_1= –20мкКл, q_2= 10мкКл знаходяться на відстані r=10см один від одного. Визначити напруженість поля у точці, яка знаходиться на відстані r_1= 8 см від першого заряду та r_2= 6 см від другого. Яка сила буде діяти на заряд q = 5мкКл, який помістили у цю точку?

14.11* (вар.1-25). Точкові заряди знаходяться у вакуумі. Величини та координати зарядів задані у таблиці 14.1. Визначити величину і напрям вектора напруженості та потенціал поля в точці А с заданими у таблиці координатами.

Таблиця 14.1. Завдання до задач 14.11.1 – 14.11.25.

Номер варіанту	Величини зарядів			Координати зарядів						Координати точки А	
	q_1, нКл	q_2, нКл	q_3, нКл	x_1, м	y_1, м	x_2, м	y_2, м	x_3, м	y_3, м	x_A, м	y_A, м
14.11.1	+1	+1	–2	0,1	0,1	–0,1	–0,1	0,1	–0,2	–0,2	–0,2
14.11.2	+3	–2	+1	0,2	0,1	0,1	–0,2	–0,2	0	0	0,3
14.11.3	–1	+2	–2	0,1	–0,1	0	0,3	0,1	0,2	0,2	0,2
14.11.4	+1	–2	+1	0	0,2	–0,2	0,2	0,1	0,1	–0,1	–0,1
14.11.5	–2	+1	+2	0,1	0	0,1	0,2	–0,2	0,1	0,3	0,1
14.11.6	+2	–2	–1	–0,2	0,2	0,1	0	–0,2	–0,1	0,2	0,2

14.11.7	+1	–1	+2	0	0,3	0,2	–0,2	–0,1	–0,1	0,1	0,2
14.11.8	–2	+2	+1	0,1	0,2	–0,2	0,2	–0,3	–0,1	0,1	–0,3
14.11.9	+2	+1	–2	–0,2	0	–0,2	0,2	0,1	0,2	0,3	–0,1
14.11.10	–1	+3	+2	0,2	0,1	–0,2	0,3	0,1	–0,2	–0,1	–0,1
14.11.11	+1	–2	–3	–0,2	–0,2	0,2	0,1	–0,3	0	0,2	–0,2
14.11.12	+2	+1	–1	0,2	0,2	–0,2	–0,2	0,1	–0,1	0	0,2
14.11.13	+1	–3	+1	–0,1	–0,1	0	0,3	0,2	0	0,1	–0,1
14.11.14	–2	–1	+2	0,2	–0,2	0,1	0,2	–0,2	0,1	–0,1	–0,2
14.11.15	+1	+2	–2	0,1	–0,1	0,2	0,2	0	0,1	–0,2	–0,2
14.11.16	–1	+2	–1	0,1	0,1	0	–0,3	–0,1	–0,1	0,1	–0,3
14.11.17	–2	+1	–1	–0,1	–0,2	0,2	–0,2	0	0,2	0,1	0,1
14.11.18	–1	+3	+1	0,2	0	0,3	–0,1	–0,1	0,1	–0,1	–0,1
14.11.19	+2	+1	–3	–0,2	0,2	–0,1	–0,2	0,2	0,3	0,1	0,1
14.11.20	+1	–2	+3	0	0,2	–0,1	–0,2	0,3	–0,1	0	0
14.11.21	+3	+1	–2	0,2	–0,2	–0,2	–0,1	–0,2	0,2	0,1	0,1
14.11.22	+1	–3	+1	0,1	0,2	–0,1	0,3	–0,1	–0,1	0	–0,2
14.11.23	–1	+1	+2	–0,2	0,1	0,2	0	0,1	–0,2	0,1	0,1
14.11.24	+1	–2	–2	0,3	0	–0,2	0,2	0,1	–0,2	0,1	0,2
14.11.25	–3	–2	+1	0,2	0,3	–0,2	–0,2	0,2	–0,2	0,2	0

14.12. В поле довгого прямого рівномірно зарядженого дроту на відстані r=0,5 м проти його середини поміщений точковий заряд q=10нКл. На заряд із боку дроту діє сила F = 2мкН. Визначити лінійну густину τ заряду дроту.

14.13. З якою силою (на одиницю довжини) відштовхуються дві паралельні, однойменно заряджені, нескінченно довгі нитки з однаковою лінійною густиною заряду $\tau = 2\cdot10^{-6}$Кл/м, які знаходиться на відстані r = 0,04м?

14.14. З якою силою електричне поле зарядженої нескінченні площини діє на кожен метр зарядженої, нескінченної нитки, що розташована паралельно плоскості? Лінійна густина заряду на нитці $\tau=3\cdot10^{-8}$ Кл/м^2, а поверхнева густина заряду на площині $\sigma=20\cdot10^{-9}$ Кл/м^2.

14.15. Дві нескінченні паралельні пластини рівномірно заряджені з поверхневою густиною заряду σ_1= 20нКл/м^2 іσ_2= – 40нКл/м^2. Визначити силу взаємодії F_S, яка припадає на одиницю площі пластин.

14.16. Дві довгі прямі паралельні нитки несуть на собі заряд однакової лінійної густини $\tau_1 = \tau_2 = 5$мкКл/м. Визначити силу, яка діє на точковий заряд q = 0,5мКл, який знаходиться на однаковій відстані r = 10 см від кожної нитки.

14.17(вар.1-25). Дві нескінченні паралельні рівномірно заряджені площини знаходяться на відстані d одна від одної. Поверхнева густина заряду площин відповідно σ_1 і σ_2. Значення d, σ_1 і σ_2 наведені в таблиці 14.2. Визначити напруженість поля поза площинами та проміж ними.

Побудувати графік залежності від координати проекції вектора напруженості на вісь OX. Знайти різницю потенціалів між площинами.

Таблиця 14.2. Завдання до задач 14.17.1 – 14.17.25.

Номер варіанту	σ_1, мкКл/м^2	σ_2, мкКл/м^2	d,м	Номер варіанту	σ_1, мкКл/м^2	σ_2, мкКл/м^2	d,м
14.17.1	0,3	–0,6	0,01	14.17.14	0,5	0,3	0,03
14.17.2	–0,2	0,4	0,01	14.17.15	–0,4	0,1	0,03
14.17.3	–0,4	–0,2	0,02	14.17.16	0,3	–0,4	0,01
14.17.4	–0,5	0,2	0,03	14.17.17	–0,5	–0,4	0,04
14.17.5	0,4	0,3	0,05	14.17.18	–0,5	0,3	0,02
14.17.6	–0,3	0,6	0,03	14.17.19	–0,1	–0,4	0,04
14.17.7	0,6	–0,2	0,01	14.17.20	0,2	0,3	0,05
14.17.8	0,4	–0,3	0,02	14.17.21	–0,2	0,5	0,02
14.17.9	–0,5	–0,2	0,05	14.17.22	0,4	–0,2	0,03
14.17.10	–0,3	0,4	0,01	14.17.23	–0,6	0,4	0,02
14.17.11	0,6	0,2	0,05	14.17.24	0,4	–0,5	0,01
14.17.12	0,1	–0,3	0,03	14.17.25	0,1	0,3	0,04
14.17.13	–0,2	–0,4	0,05				

14.18(вар.1-25).Дві концентричні провідні сфери несуть на собі рівномірно розподілені заряди q_1 і q_2. Радіуси сфер дорівнюють R_1 і R_2. Значення зарядів та радіусів сфер наведені в таблиці .3.3). Визначити напруженість поля на відстанях r_1, r_2, r_3 від центра сфер, значення яких наведені у таблиці. Побудувати графік залежності $E(r)$. 2) Знайти різницю потенціалів між сферами.

Таблиця 14.3. Завдання до задач 14.18.1 – 14.18.25.

Номер варіанту	q_1, нКл	q_2, нКл	R_1,м	R_2,м	r_1,м	r_2,м	r_3,м
14.18.1	5	4	0,05	0,10	0,03	0,08	0,15
14.18.2	6	–9	0,06	0,12	0,04	0,10	0,15
14.18.3	–4	5	0,06	0,12	0,04	0,10	0,15
14.18.4	3	–8	0,04	0,10	0,03	0,08	0,12
14.18.5	5	–9	0,05	0,10	0,02	0,07	0,12
14.18.6	–5	–6	0,06	0,12	0,05	0,10	0,16
14.18.7	4	8	0,06	0,10	0,04	0,08	0,12
14.18.8	–6	4	0,05	0,10	0,02	0,08	0,14
14.18.9	6	–8	0,05	0,10	0,04	0,08	0,14
14.18.10	–4	–3	0,04	0,10	0,03	0,08	0,12
14.18.11	–3	5	0,05	0,10	0,02	0,07	0,12
14.18.12	7	–9	0,06	0,12	0,04	0,10	0,15
14.18.13	5	–8	0,05	0,10	0,03	0,08	0,14

14.18.14	–4	8	0,05	0,12	0,04	0,08	0,12
14.18.15	3	6	0,06	0,12	0,04	0,10	0,15
14.18.16	8	5	0,05	0,10	0,03	0,08	0,15
14.18.17	–7	4	0,06	0,12	0,04	0,10	0,15
14.18.18	6	–4	0,06	0,12	0,04	0,10	0,15
14.18.19	3	–5	0,04	0,10	0,03	0,08	0,12
14.18.20	–8	5	0,05	0,10	0,02	0,07	0,12
14.18.21	–5	–9	0,06	0,12	0,05	0,10	0,16
14.18.22	2	4	0,06	0,10	0,04	0,08	0,12
14.18.23	6	–8	0,05	0,10	0,02	0,08	0,14
14.18.24	3	7	0,05	0,10	0,04	0,08	0,14
14.18.25	–4	8	0,04	0,10	0,03	0,08	0,12

14.19. В полі плоского горизонтального конденсатора знаходиться у рівновазі заряджена крапля масла. Надлишковий заряд краплі створюють вісім електронів. Різниця потенціалів між пластинами конденсатора U=500В, відстань між пластинами d=0,5 см. Визначити радіус краплі. Густина масла ρ=900 кг/м^3.

14.20. Пилинка вагою P=10^{-13}Н зрівноважена у плоскому конденсаторі при напрузі на ньому U_1=54В . Пилинка освітлюється ультрафіолетовим світлом та, втрачаючи заряд, виходить з рівноваги. Для повернення рівноваги, довелось збільшити напругу на конденсаторі на ΔU=8В. Визначити заряд, який втратила пилинка. Відстань між пластинами конденсатора d=$5\cdot10^{-3}$м.

14.21. Пробій повітря за нормальних умов настає тоді, коли напруженість електричного поля $E_0 = 10^6$ В/м. Обчислити найбільший заряд q, який може нести на собі заряджена куля, і потенціал φ, до якого можна зарядити цю кулю. Радіус кулі R = 9 см.

14.22. Тонке кільце радіусом R=5см рівномірно заряджене з лінійною густиною τ=60нКл/м. Визначити потенціал φ: а) у центрі кільця; б) в точці, що лежить на осі кільця на відстані a = 10 см від його центра.

14.23. Дві однакові кульки, які заряджені однаковими за величиною зарядами. знаходяться на відстані l=25 см. Сила взаємодії між зарядами F=1мкН. Визначити потенціал кожної кульки, якщо їх радіуси R=1 см.

14.24. Тисяча однакових крапель ртуті, заряджених до однакового потенціалу φ_1=80В, зливаються в одну велику краплю. Визначити потенціал великої краплі.

14.25. На поверхні провідної сфери знаходиться заряд q=10^{-6} Кл. Різниця потенціалів між двома точками поля, що знаходяться на одній силовий лінії, дорівнює U=100В. Визначити відстань між цими точками, якщо відстань від центра сфери до першої точки 9м.

14.26. Електричне поле утворене нескінченним провідником, лінійна густина заряду якого τ=20нКл/м. Визначити різницю потенціалів U двох точок поля, які находяться на відстані $r_1 = 5$ см і $r_2 =$ 10см від провідника.

14.27. Два точкових заряди q_1=–2мкКл, q_2= 0,9мкКл знаходяться на відстані d =60 см один від одного. Яку роботу А треба виконати зовнішнім силам, щоб наблизити їх до втричі меншої відстані?

14.28. Дві паралельні, однойменно заряджені, нескінченно довгі ниті з однаковою лінійною густиною заряду $\sigma=3\cdot10^{-8}$Кл/см, знаходиться на відстані r_1=0,02м друг от друга. Яку роботу (на одиницю довжини) треба виконати, щоб наблизити ниті до відстані r_2=0,01м?

14.29. Точковий заряд q_1=20нКл перенесений з нескінченності в точку, яка знаходиться на відстані a=1см від поверхні зарядженої кулі радіусом R=2см. Поверхнева густина заряду кулі σ=5мКл/м^2. Визначити роботу А, яку виконують при перенесенні заряду зовнішні сили.

14.30. Точковий заряд q=10^{-10} Кл знаходиться на продовженні осі диполя, електричний момент якого p=$1{,}5\cdot10^{-10}$Кл·м, на відстані r=10см від його центра (ближче до позитивного заряду). Визначити роботу, яку необхідно виконати для перенесення заряду в симетрично розташовану точку по інший бік диполя . (Плече диполя l<<r).

14.31. Електрон із початковою швидкістю $v_0 = 2000$ км/с влітає в однорідне електричне поле і рухається вздовж лінії напруженості. Напруженість електричного поля E=150 В/м. Визначити шлях s, який електрон пройде до повної зупинки та час t його руху.

14.32. До якої найменшої відстані можуть наблизитись один до одного два електрони, які рухаються назустріч один одному з відносною швидкістю $v_0 = 10^5$ м/с?

14.33. Яку відносну швидкість зближення повинні мати протони, знаходячись на відстані 0,05м, щоб наблизитись до відстані 10^{-13}м?

14.34. Електричне поле утворюється нескінченою прямою проволокою, зарядженою позитивно з лінійною густиною заряду τ = 8нКл. Яку швидкість v набуває електрон під дією поля при наближенні до проволоки з відстані r_1 = 2 см до відстані r_2 = 1 см?

14.35.Протон, кінетична енергія якого W_{k1}=52еВ, влітає в однорідне електричне поле вздовж ліній напруженості. Напруженість електричного поля E = 200 В/см. Який шлях повинен пройти протон уздовж ліній напруженості перш, ніж його швидкість збільшиться удвічі? ($1\text{еВ} = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Дж)

14.36.Кулька масою m = 0,2 г і зарядом q = 0,3мкКл переміщується в електричному полі з точки 1, потенціал якої φ_1= 600 В, у точку 2 з потенціалом φ_2= 200 В. Визначити швидкість v_1 кульки у точці 1, якщо в точці 2 вона набула значення v_2= 1,45 м/с.

14.37. Електричне поле утворюється нескінченою ниткою, яка несе на собі рівномірно розподілений позитивний заряд. Під дією поля протон, рухаючись із точки на відстані r_1 =1см від нитки до точки r_2 = 4 см, змінив свою швидкість від $v_1=2\cdot10^5$ м/с до $v_2=3\cdot10^6$ м/с. Визначити лінійну густину τ заряду нитки.

14.38. «Електронна гармата», застосовувана в телевізійних трубках для отримання катодних променів, складається з розжареного катода та розташованого близь нього анода з центральним отвором, через який пролітає потік електронів. Як зміниться швидкість електронів, якщо напруга між катодам та анодам змінюється від 700В до 1000В? Чому дорівнює ця швидкість в обох випадках?

14.39. Різниця потенціалів між катодом і анодом електронної лампи U=60В, відстань r = 1 мм. Яку швидкість v має електрон у момент удару об анод? За який час t електрон проходить відстань від катода до анода? Початкову швидкість v_0 електрона вважати рівною нулю, поле – однорідним.

14.40.Безпосередньо перед світним екраном, на який попадають електрони, розташований плоский конденсатор, вздовж осі якого (посередині між пластинами) пролітають електрони. Довжина пластин конденсатора 8см, відстань між пластинами 2см, напруга між ними 50 В. Наскільки зміститься слід електронів на екрані? Напруга між анодом та катодом 800В.

14.41. Електрон, прискорений різницею потенціалів U = 40 В, влітає в плоский конденсатор паралельно пластинам на рівній відстані від них. Відстань між пластинами d = 4 см. Напруженість поля в конденсаторі E = 100 В/м. Через який час t після того, як електрон влетів у конденсатор, він попаде на одну з його пластин? На якій відстані s від початку конденсатора електрон попаде на пластину?

14.42. Електрон улетів у плоский конденсатор паралельно його пластинам на рівній відстані від них. Швидкість електрона v = 1 Мм/с. Відстань між пластинами d = 2 см, довжина кожної пластини l = 8 см. Яку найменшу різницю потенціалів U треба прикласти до пластин, щоб електрон не вилетів із конденсатора?

14.43. Електрон, маючи швидкість $v_0=6\cdot10^9$ см/с, влітає в плоский конденсатор паралельно його пластинам. Відстань між пластинами конденсатора d =2см, довжина конденсатора l=5см, різниця потенціалів на пластинах U=6000В. Знайти зміщення електрона від початкового напрямку за час руху у конденсаторі та його швидкість в момент вилиту з конденсатора.

14.44. Електрон, початкова швидкість якого $v_0=800$ км/с, влітає в однорідне електричне поле перпендикулярно до ліній напруженості. Напруженість електричного поля E=455В/м. Визначити величину та

напрямок (відносно ліній напруженості) швидкості v електрона через проміжок часу τ = 0,01мкс.

14.45(вар.1-25). Скориставшись умовою задачі 14.11(вар.1-25) і даними таблиці 14.1, визначити енергію взаємодії заданої системи електричних зарядів.

14.46(вар.1-25). Скориставшись результатами розв'язання задачі 14.18(вар.1-25) і таблицею 14.3 визначити енергію електричного поля у просторі між сферами.

14.47. Напруга на обкладинках плоского конденсатора U=100В. Площа пластин S=50см^2, відстань між ними d=1мм. Конденсатор заповнений парафіном (діелектрична проникність ε=2). Конденсатор з'єднали паралельно з незарядженим конденсатором, ємність C_1 якого в три рази менша за ємність C_1. Визначити заряд Δq, який перейшов на другий конденсатор.

14.48. Простір між пластинами плоского конденсатора заповнений двома діелектриками: шаром парафіну завтовшки d_1=0,2см і скла завтовшки d_2=0,3см. Різниця потенціалів між пластинами U=200 В. Визначити напруженість поля E_1 і E_2 та падіння потенціалу U_1 і U_2 у кожному шарі діелектрика.

14.49. Визначити ємність сферичного конденсатора, сферичні обкладинки якого мають радіуси R_1=8см і R_2=8,5см. Простір між сферами заповнений маслом. Який радіус R_0 повинна мати куля, занурена у масло, щоб її ємність дорівнювала ємності конденсатора?

14.50. Металеву кулю радіусом R_1=5 см, заряд якої q_1= 40нКл, з'єднали провідником із незарядженою кулею радіусом R_2= 10 см. Визначити енергію, яка виділилась при розряді.

14.51. З батареєю, ЕРС якої $\mathcal{E}$= 120 В, з'єднані два конденсатори ємності C_1= 0,6 мкФ і C_2= 0,4 мкФ. Визначити заряд q і напругу U на кожному з конденсаторів у двох випадках: а) при послідовному з'єднанні; б) при паралельному з'єднанні.

14.52. Пластини плоского повітряного конденсатора заряджені з поверхневою густиною заряду $\sigma = 2$ мкКл/м^2. Площа кожної пластини S=50см^2, відстань між пластинами d=2см. Визначити енергію конденсатора W та об'ємну густину енергії електричного поля w.

14.53. Відстань між пластинами плоского конденсатора, приєднаного до полюсів батареї з ЕРС $\mathcal{E}$=180В, збільшують з d_1=0,005м до d_2=0,012м. Площа пластини конденсатора S=0,0176м^2. Яка робота виконана при цьому батареєю?

14.54. Площа пластин плоского повітряного конденсатора S=50 см^2, відстань між ними d_1=1см. До пластин конденсатора прикладена різниця

потенціалів U = 1,5кВ. Якою стане напруженість E поля конденсатора, якщо, не від'єднуючи конденсатор від джерела напруги, збільшити відстань між пластинами до d_2=2,5см? Визначити енергії W_1 й W_2 конденсатора до та після збільшення відстані.

14.55.Конденсатор ємністю C_1=6мкФ зарядили до різниці потенціалів U=1,5кВ і від'єднали від джерела напруги. Після цього до конденсатора приєднали паралельно другий, незаряджений конденсатор ємністю C_2=4мкФ. Визначити енергію ΔW, яка було витрачена на утворення іскри при з'єднанні конденсаторів.

14.56. Площа пластин плоского повітряного конденсатора S=50 $см^2$, відстань між ними d_1=1см. До пластин конденсатора прикладена різниця потенціалів U =1,5кВ. Якою стане напруженість E поля конденсатора, якщо конденсатор від'єднати від джерела напруги і потім збільшити відстань між пластинами до d_2=2,5 см? Визначити енергії W_1 й W_2 конденсатора до і після збільшення відстані.

14.57. Плоский конденсатор, заповнений діелектриком із діелектричною проникністю ε=4,5, зарядили до енергії W=40мкДж. Після того, як конденсатор відключили від джерела напруги, діелектрик вийняли з конденсатора. Яка робота A проти сил електричного поля була виконана при вилученні діелектрика?

14.58. Усередині плоского конденсатора з площиною пластин S=0,1$м^2$ та відстанню між ними d=0,2м знаходиться діелектрик (ε=5), який цілком заповнює простір між пластинами. Як зміниться енергія поля конденсатора, якщо вилучити діелектрик, при умові, що конденсатор весь час приєднаний до батареї з ЕРС $\mathcal{E}$= 100 В?

14.59. Усередині плоского конденсатора с площиною пластин S= 0,1$м^2$ та відстанню між ними d=0,2м знаходяться діелектрик (ε=5), який цілком заповнює простір між пластинами. Як зміниться енергія поля конденсатора, якщо вилучити з нього діелектрик після відключення його від батареї с ЕРС $\mathcal{E}$=100В?

Тестові завдання

Вибрати вірну відповідь:

1. Сила взаємодії двох точкових зарядів при зменшенні величини кожного з них у 3 рази

   1 зменшиться у 3 рази 2. зменшиться у 9 разів
   3. не зміниться 4. збільшиться у 3 рази

2. При зменшенні величини одного з зарядів у 4 рази для того, щоб сила взаємодії не змінилася, відстань між зарядами необхідно:

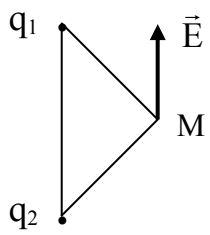
   1. збільшити у 2 рази 2. зменшити у 2 рази
   3. збільшити у 4 рази 4. зменшити у 4 рази

3. Сила взаємодії між двома точковими зарядами, які з повітря перенесли у діелектрик, не змінюючи відстань між ними:

   1. не змінилася 2. збільшилася 3. зменшилася

4. Силовою характеристикою електричного поля є
1.потенціал 2.електроємність 3. напруженість 4. різниця потенціалів

5. Електричне поле утворене рівними за величиною точковими зарядами q_1 та q_2. Якщо у точці М напруженість $\vec{E}$ має напрям, який указано на рисунку, заряди мають знаки:

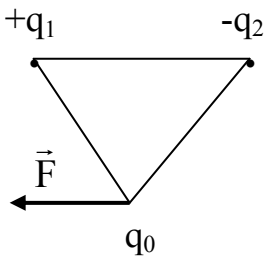


1. $q_1 > 0, q_2 > 0;$ 2. $q_1 < 0, q_2 > 0;$
3. $q_1 > 0, q_2 < 0;$ 4. $q_1 < 0, q_2 < 0.$

6. Напруженість електростатичного поля $\vec{E}$ точкового заряду із відстанню
1. збільшується пропорційно r
2. зменшується обернено пропорційно r
3. зменшується обернено пропорційно r^2
4. зменшується обернено пропорційно r^3

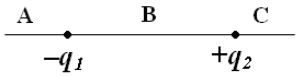
7. Між напруженістю електричного поля точкового заряду та величиною заряду існує залежність
1. прямо пропорційна 2. обернено пропорційна
3. експоненціальна 4. прямо пропорційна квадрату заряду

8. На рисунку зображена сила, яка діє на заряд q_0 з боку електричного поля, утворюваного зарядами q_1 і q_2. Визначити знак заряду q_0



. 1. $q_0 > 0$
2. $q_0 < 0$
3. знак заряду не впливає на напрям сили

9. $|q_1| > |q_2|$. У яку область (А, В чи С) треба вмістити заряд $q_3 > 0$ щоб він знаходився у стані рівноваги?
1. А 2. В 3. С



10. **Установити відповідність** між величиною та формулою:
1. Напруженість поля точкового заряду
2. Напруженість поля нескінченної рівномірно зарядженої площини
3. Напруженість поля усередині зарядженого провідника
4. Напруженість поля у поверхні зарядженого провідника
5. Означення поняття ”вектор напруженості ”

А. $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$ Б. $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$ В. 0 Г. $E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$ Д. $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^3} \cdot \vec{r}$

Вибрати вірну відповідь:

11. Два позитивних та два негативних заряди однакової величини q розташовані у вершинах квадрату зі стороною а. Потенціал поля у центрі квадрата дорівнює

1. $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{8q}{a\sqrt{2}}$ 2. $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2q}{a\sqrt{2}}$ 3. 0 4. $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{4q}{a\sqrt{2}}$

12. Напруженість однорідного електричного поля
1. не змінюється за величиною 2. не змінюється за величиною та напрямом
3. не змінюється за напрямом 4. може змінюватися за величиною та напрямом

13. Однорідне електричне поле утворює

1. точковий заряд 2. циліндричний повітряний конденсатор
3. диполь 4. нескінченна заряджена площина

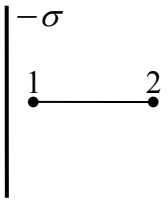
14. Енергетичною характеристикою електричного поля є

1.потенціал 2.електроємність 3.напруженість 4. вектор електричного зміщення

15. Між потенціалом електричного поля точкового заряду та відстанню існує залежність

1. прямо пропорційна 2. обернено пропорційна
3. експоненціальна 4. прямо пропорційна квадрату відстані
5. обернено пропорційна квадрату відстані

16. Нескінченна площина заряджена з густиною заряду $-\sigma$.



А) При переході від точки 1 до 2 (див. рис.) напруженість електричного поля

1. збільшується 2. зменшується 3. не змінюється

Б) При переході від точки 1 до 2 (див. рис.) потенціал електричного поля

1. збільшується 2. зменшується 3. не змінюється

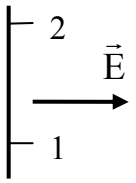
17. Потенціал електричного поля позитивно зарядженої нескінченої площини при наближенні до неї:

1. не змінюється 2. зменшується 3.збільшується

18. **Установити відповідність** між величиною та одиницею вимірювання в СІ

1. Потенціал електростатичного поля	А. В/м
2. Напруженість електричного поля	Б. В (вольт)
3. Електричний заряд	В. Ф (фарад)
4. Електроємність	Г. В·м
5. Потік вектора напруженості	Д. Кл (кулон)

Вибрати вірну відповідь:



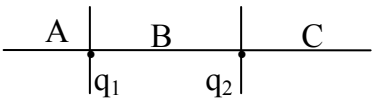
19. На рисунку показаний напрям вектора напруженості для однорідного поля. Електрон ($q_e = -1{,}6\times10^{-19}$ Кл) переміщується із точки 1 в точку 2. Відстань між точками 1 та 2 дорівнює 10 см, Е=200 В/м. Робота, яку виконує поле дорівнює

1. $-3{,}2\cdot10^{-18}$ Дж 2. $3{,}2\cdot10^{-18}$ Дж 3. 0 4. $32\cdot10^{-18}$ Дж

20. Потенціальний характер електростатичного поля відображує

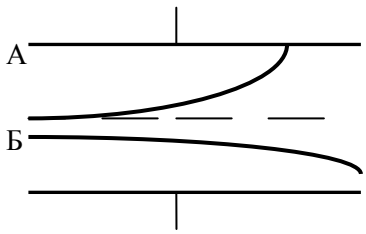
1. теорема Гауса
2. теорема про циркуляцію вектора напруженості електростатичного поля
3. закон Кулона
4. формула густини енергії електричного поля

21. Якщо $q_1 > 0, q_2 < 0$, а $|q_1| > |q_2|$, точка, потенціал якої дорівнює нулю (див.рис.), не може знаходитися в області



1. A 2. B 3. C

22. На рисунку зображені траєкторії електрона та протона ($m_p > m_e$), які влітають з однаковою швидкістю у простір між пластинами плоского конденсатору.



Позитивний заряд має пластина

1. А. 2. Б.

23. Робота однорідного електричного поля при переміщенні у ньому заряду дорівнює нулю при русі заряду відносно ліні:й напруженості під кутом

1. 0°. 2. 30°. 3. 90°. 4. 45°

24. **Установити відповідність між графіком та зображеною залежністю**.

1. залежність потенціалу зарядженої сферичної поверхні від відстані до центра сфери
2. залежність напруженості рівномірно зарядженої сфери від відстані до її центру
3. залежність напруженості рівномірно зарядженої сферичної поверхні від відстані до її центру

зображена: 1. на рис.1 2.на рис.2 3. на рис.3

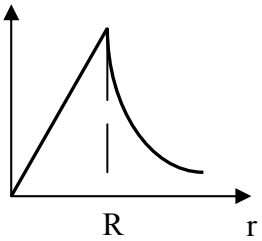


Рис.1

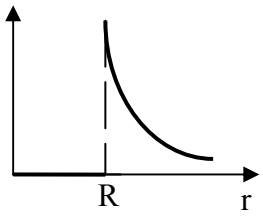


Рис.2

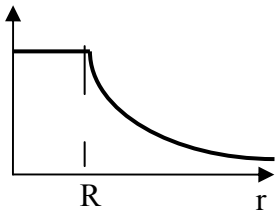


Рис.3

Вибрати вірну відповідь:

25. Робота по переміщенню заряду в електростатичному полі залежить від
   1.форми траєкторії та величини заряду
   2. величини заряду та вибору нульового рівня
   3. вибору нульового рівня та різниці потенціалів
   4. різниці потенціалів та величини заряду

26. Яка з сукупностей зарядів, що обмежені замкненою поверхнею, утворить найбільший потік через неї? найменший потік через неї?
   1. 6 Кл; -2 Кл 2. 5 Кл; 1 Кл; -6 Кл 3. -4 Кл; -3 Кл; 10 Кл 4. 8 Кл; -7 Кл

27. Декілька точкових зарядів вміщено у сферу радіусу R. Потік вектора напруженості через сферу, якщо її радіус збільшити удвічі,
   1. зменшиться удвічі 2. зменшиться у 4 рази
   3. збільшиться удвічі 4. не зміниться

28. Еквіпотенціальною називають поверхню, на якій
   1. потенціал є постійним 2. напруженість електричного поля є постійною
   3. потенціал дорівнює нулю 4. напруженість електричного поля дорівнює нулю

29. Якщо потенціальна енергія взаємодії двох однойменних точкових зарядів, що рухаються вздовж прямої, збільшується у процесі руху, ці заряди
   1. наближаються один до одного 2. віддалюються один від одного

30. Потенціальна енергія взаємодії двох різнойменних точкових зарядів, що наближаються один до одного
   1. збільшується у процесі руху 2. зменшується у процесі руху

31. Для зарядженого провідника при рівновазі наданого йому заряду характерним є:
   1. відсутність поля всередині провідника $\left(\vec{E}=0\right)$;
   2. однорідність поля всередині провідника
   3. однаковість потенціалу всіх точок провідника
   4. рівність нулю потенціалу всіх точок усередині провідника

   (Обрати дві вірні відповіді.)

32. При внесенні провідника у зовнішнє електричне поле спостерігається явище:
   1. електростатичної індукції; 2. деформаційної поляризації;
   3. спонтанної поляризації; 4. іонізації.

33. **Установити відповідність** між типом поляризації та видом діелектрика, в якому вона виникає:

Вид діелектрика	тип поляризації
1. полярний діелектрик	А. деформаційна (електронна)
2. неполярний діелектрик	Б. іонна
3. сегнетоелектрик	В. орієнтаційна
4. іонний кристал	Г. спонтанна

Вибрати вірну відповідь:

34. Означенням вектора поляризованості $\vec{P}$ діелектрика є формула:

1. $\vec{P}=\kappa\varepsilon_0\vec{E}$ 2. $\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}=\vec{D}$ 3. $\vec{P}=\lim\limits_{\Delta V\to 0}\sum\limits_{i=1}^{N}\vec{p}_i \Big/ \Delta V$ 4. $\mathrm{div}\vec{P}=\rho'$

35. Величина потоку вектора напруженості $\vec{E}$ через замкнену поверхню у діелектрику залежить від охоплених нею:

1. вільних зарядів 2. зв'язаних зарядів 3. вільних та зв'язаних зарядів

36. Величина потоку вектора електричного зміщення $\vec{D}$ через замкнену поверхню залежить від охоплених нею:

1. вільних зарядів 2. зв'язаних зарядів 3. вільних та зв'язаних зарядів

37. Означення поняття „електроємність провідника " надає формула

1. $C=\dfrac{q}{U}$ 2. $C=\dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$ 3. $C=\dfrac{q}{\varphi}$ 4. $C=\dfrac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$

38. На електроємність конденсатора впливають: (Обрати дві вірні відповіді.)

1. геометричні розміри та форма 2. наявність інших тіл поряд з конденсатором
3. природа обкладинок 4. діелектрик,що заповнює конденсатор

39. На електроємність провідника впливають: (Обрати дві вірні відповіді.)

1. геометричні розміри та форма 2. природа провідника
3. температура провідника 4. наявність інших тіл поряд з провідником

40. Електроємність плоского конденсатора залежить від: (Обрати дві вірні відповіді.)

1. площі обкладинок 2. напруги на обкладинках
3. заряду на обкладинках 4. матеріалу обкладинок
5. відстані між обкладинками

41. Сумарна ємність конденсаторів при їх
а) послідовному з'єднанні; б) паралельному з'єднанні

1. зменшується 2. не змінюється 3. збільшується

42. Плоский конденсатор складається з двох круглих пластин. Його електроємність, якщо радіус пластин зменшити утричі, а простір між пластинами заповнити діелектриком з $\varepsilon = 3$

1. зменшиться у 3 рази 2. збільшиться у 3 рази
3. не зміниться 4. збільшиться у 9 разів

43. Означенням поняття "густина енергії електричного поля " є формула:

1. $w=\dfrac{ED}{2}$ 2. $w=\dfrac{dW}{dV}$ 3. $w=\dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}$ 4. $w=\dfrac{D^2}{2\varepsilon\varepsilon_0}$

44. Мильна булька радіуса R заряджена зарядом q. Якщо заряд бульки зменшиться удвічі, її електрична енергія:

1. зменшиться у 2 рази 2. зменшиться у 4 рази 3. не зміниться
4. збільшиться у 4 рази 5. збільшиться у 2рази

45. Мильна булька радіуса R заряджена зарядом q. Якщо бульку роздути так, що її радіус збільшиться удвічі, електрична енергія бульки,

1. зменшиться у 2 рази 2. збільшиться у 2 рази 3. не зміниться
4. збільшиться у 4 рази 5. зменшиться у 4 рази.

46. Плоский конденсатор підключено до джерела напруги. Відстань між пластинами зменшили удвічі. При цьому енергія електричного поля конденсатора

1. зменшилась удвічі 2. не змінилась
3. збільшилась у 4 рази 4. збільшилась удвічі

47. Плоский конденсатор відімкнули від джерела напруги, а потім зменшили удвічі відстань між пластинами. При цьому енергія електричного поля конденсатора

1. зменшилась удвічі 2. не змінилась
3. збільшилась у 4 рази; 4. збільшилась удвічі

48. Плоский повітряний конденсатор відімкнули від джерела напруги, а потім заповнили простір між пластинами діелектриком. При цьому енергія електричного поля конденсатора

1. збільшилась 2. не змінилась 3. зменшилась

49. Простір між пластинами плоского повітряного конденсатора заповнили діелектриком, не відімкнувши від джерела напруги. При цьому енергія електричного поля конденсатора

1. збільшилась 2. не змінилась 3. зменшилась

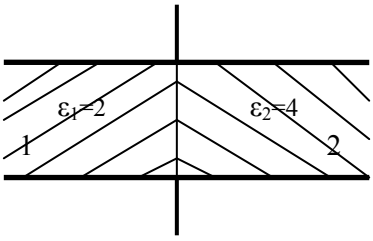
50. Два конденсатори, що мають однакові геометричні параметри, заповнені різними діелектриками з діелектричною проникністю ε_1 і ε_2 та з'єднані паралельно. Однаковою у цих конденсаторів є

1.заряд на обкладинках 2.енергія поля; 3.електроємність 4.напруга

51. Два конденсатори, що мають однакові геометричні параметри, заповнені різними діелектриками з діелектричною проникністю ε_1 і ε_2 та з'єднані послідовно. Однаковою у цих конденсаторів є

1.електроємність 2.енергія поля 3.заряд на обкладинках 4.напруга

52. Плоский конденсатор заповнений двома різними діелектриками (див. рис.) та з'єднаний з джерелом напруги. В обох частинах конденсатору однаковою є



1. напруженість електричного поля
2. поверхнева густина зв'язаного заряду в Діелектриках
3. об'ємна густина енергії електричного поля
4. енергія електричного поля

53. Два конденсатори, що мають однакові геометричні параметри, заповнені різними діелектриками з діелектричною проникністю ε_1 і ε_2 та з'єднані паралельно. Відношення енергії електричного поля конденсаторів W_1/W_2 дорівнює

1. $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ 2. 1 3. $\varepsilon_2/\varepsilon_1$

54. Два конденсатори, що мають однакові геометричні параметри, заповнені різними діелектриками з діелектричною проникністю ε_1 і ε_2 та з'єднані послідовно. Відношення енергії електричного поля конденсаторів W_1/W_2 дорівнює

1. $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ 2. 1 3. $\varepsilon_2/\varepsilon_1$

Розділ 15. Постійний електричний струм

Тема: Електричний струм. Закони Ома, Джоуля-Ленца в інтегральній та диференціальній формі. Правила Кірхгофа. Електронна теорія електропровідності Лоренца. Електричний струм у металі.

Основні поняття і формули

Електричний струм – упорядкований рух заряджених частинок.
Розрізняють:
- струм провідності – утворюється рухом вільних зарядів у провідному середовищі;
- конвекційний струм – пов'язаний з рухом заряджених макроскопічних тіл;
- струм у вакуумі.

Провідники – матеріальні тіла, в яких при наявності електричного поля виникає електричний струм вільних зарядів. Якщо в провіднику тече електричний струм, то (на відміну від електростатики) його об'єм не є еквіпотенціальним.

● **Характеристики електричного струму:** сила струму (струм) I та об'ємна густина струму $\vec{j}$.

Сила струму (струм) I – скалярна величина, яка чисельно дорівнює заряду, який проходить крізь поперечний переріз провідника за одиницю часу.
За означенням

$$I = \frac{dq}{dt}, \qquad (15.1)$$

де dq – заряд, який проходить крізь поперечний переріз провідника за час dt.
Стаціонарний або **постійний струм** – струм, при якому за однакові скінченні проміжки часу Δt проходять однакові заряди Δq і напрям струму при цьому не змінюється. При постійному струмі

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}. \qquad (15.1a)$$

Одиниця вимірювання струму **ампер** (А) у системі одиниць СІ є основною електромагнітною одиницею, її означення надається на основі магнітної взаємодії провідників зі струмом (див. розділ 16).

Електричний струм може нерівномірно розподілятися по поверхні, крізь яку протікає, тому для більш детальної характеристики струму вводять вектор густини струму $\vec{j}$.

Об'ємна густина струму $\vec{j}$ – вектор середньої густини потоку зарядів; чисельно дорівнює заряду, який проходить за 1 секунду крізь

одиничну площину, перпендикулярну до швидкості упорядкованого руху зарядів.

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}} \qquad (15.2)$$

Вектор $\vec{j}$ співпадає за напрямом із вектором швидкості $\vec{v}$ упорядкованого руху позитивно заряджених частинок.

$$\vec{j} = qn\vec{v} = \rho\vec{v}. \qquad (15.3)$$

Тут q – величина заряду окремого носія струму, n – чисельна густина зарядів, ρ – об'ємна густина зарядів у даній точці провідника. Якщо в провіднику існують вільні заряди різних знаків із зарядами q^+ і q^-, чисельною густиною n^+ і n^- та об'ємною густиною ρ^+ і ρ^-, які рухаються з середніми швидкостями $\langle\vec{v}^+\rangle$ і $\langle\vec{v}^-\rangle$ відповідно, то

$$\vec{j} = q^+n^+\langle\vec{v}^+\rangle + q^-n^-\langle\vec{v}^-\rangle = \rho^+\langle\vec{v}^+\rangle + \rho^-\langle\vec{v}^-\rangle.$$

Розмірність густини струму $[j] = \frac{A}{м^2}$.

З означення $\vec{j}$ витікає, що сила струму дорівнює потоку вектора густини струму через переріз провідника:

$$I = \int \vec{j} \cdot d\vec{S}. \qquad (15.4)$$

Рівняння неперервності (закон збереження заряду)

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{j} = 0,$$

де ρ – об'ємна густина зарядів у провіднику, $\vec{j}$ – густина струму. Якщо струм постійний, то величина заряду в будь-якій частині об'єму провідника залишається незмінною і всюди виконується співвідношення:

$$\mathrm{div}\vec{j} = 0.$$

● **Умови підтримки постійного струму:**

- замкненість електричного кола;
- незмінність різниці потенціалів між двома будь-якими точками кола ($\varphi_1 - \varphi_2 = \mathrm{const}$).

Остання вимога забезпечується дією на деякій ділянці кола сил неелектричного походження (так званих, **сторонніх сил**), які виконують роботу по переміщенню заряду проти сил електричного поля (розділенню зарядів) за рахунок енергії **джерела струму**.

Сторонні сили можуть бути обумовлені, наприклад вихровим електричним полем, силою Лоренца, фізичною або хімічною неоднорідністю провідників, їх прискореним рухом.

● **Електрорушійна сила** (**ЕРС**) джерела струму – характеристика джерела струму, яка чисельно дорівнює роботі сторонніх сил по переносу одиничного позитивного заряду вздовж електричного кола:

$$\mathcal{E} = \frac{A^*}{q}, \qquad (15.5)$$

де $A^* = \oint_L \vec{F}^* d\vec{l} = q\oint_L \vec{E}^* d\vec{l}$ – робота сторонніх сил, яка може бути виражена через напруженість поля сторонніх сил $\vec{E}^*$.

Напруженість поля сторонніх сил $\vec{E}^*$ дорівнює сторонній силі, яка діє на вільний носій одиничного позитивного заряду.

З урахуванням виразу для роботи сторонніх сил отримуємо

$$\mathcal{E} = \oint_L \vec{E}^* d\vec{l}, \qquad (15.6)$$

тобто ЕРС джерела струму дорівнює циркуляції вектора напруженості поля сторонніх сил вздовж електричного кола.
Відповідно, ЕРС, яка діє на ділянці кола, дорівнює

$$\mathcal{E}_{12} = \frac{A^*_{12}}{q} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{E}^* d\vec{l}. \qquad (15.6а)$$

З формули (15.5) витікає, що розмірність ЕРС збігається з розмірністю потенціалу, тому, одиницею вимірювання електрорушійної сили, так саме, як і потенціалу, в системі одиниць СІ є вольт (В).

● **Напруга** U_{12} на ділянці кола – величина роботи сил електричного поля та сторонніх сил по переносу одиничного позитивного заряду вздовж ділянки кола:

$$U_{12} = \frac{A_{12} + A^*_{12}}{q} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}. \qquad (15.7)$$

Одиниця вимірювання напруги в СІ – вольт (В).

Ділянку кола, на якій на заряди діють тільки сили електричного походження, називають **однорідною**. На однорідній ділянці кола напруга співпадає з різницею потенціалів на її кінцях:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2. \qquad (15.8)$$

Неоднорідна – ділянка кола, на якій на заряди діють як електричні, так і сторонні сили. Напруга на неоднорідній ділянці кола визначається за формулою (15.7).

● **Закон Ома для однорідної ділянки кола.**

Сила струму, яка протікає по провіднику при відсутності в ньому дії сторонніх сил, пропорційна напрузі U між кінцями провідника:

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{U}{R}, \qquad (15.9)$$

де $\varphi_1 - \varphi_2 = U$ – різниця потенціалів (напруга) на кінцях ділянки; R – електричний опір ділянки провідника.

Одиниця вимірювання R у системі СІ – [Ом]. 1Ом – опір такого провідника, в якому тече струм в 1А при різниці потенціалів на його кінцях, яка дорівнює 1В.

Опір провідника R та його провідність G – взаємно обернені величини:

$$R = \frac{1}{G}. \qquad (15.10)$$

Одиниця вимірювання G у системі СІ – Сіменс [См]. 1См = 1Ом$^{-1}$.

Опір залежить від форми і розміру провідника, а також від матеріалу, з якого він зроблений, та температури. У простому випадку однорідного провідника постійного перерізу його опір визначається за формулою

$$R = \rho\frac{l}{S}, \qquad (15.11)$$

де l – довжина провідника; S – площа перерізу провідника; ρ – питомий опір матеріалу провідника, одиниця вимірювання якого в системі одиниць СІ – $\text{Ом} \cdot \text{м}$.

Питомий опір матеріалу і його питома провідність γ є взаємно оберненими величинами:

$$\rho = \frac{1}{\gamma}. \qquad (15.12)$$

У системі СІ питома електропровідність вимірюється в $(\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}$.

Залежність опору металевого провідника від температури:

$$R = R_0(1+\alpha t), \qquad (15.13)$$

де t – температура за шкалою Цельсія; R_0 – опір провідника при температурі 0° С; α – температурний коефіцієнт опору.

● **Закон Ома для неоднорідної ділянки кола**, яка містить джерело струму, виглядає наступним чином:

$$IR_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}, \qquad (15.14)$$

де $\mathcal{E}_{12}$ – електрорушійна сила джерела струму; R_{12} – повний опір ділянки.

● **Закон Ома у диференціальній формі**, записаний для вектора густину струму $\vec{j}$, дозволяє детальніше описати проходження струму крізь переріз провідника.

Для однорідної ділянки кола він має наступний вигляд

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho}\vec{E} = \gamma\vec{E}. \qquad (15.15)$$

Тут $\vec{E}$ – напруженість електростатичного поля в провіднику.

Для неоднорідної ділянки кола

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho}\left(\vec{E} + \vec{E}^*\right) = \gamma\left(\vec{E} + \vec{E}^*\right), \qquad (15.16)$$

де $\vec{E}^*$ – напруженість поля сторонніх сил.

● **Закон Ома для замкненого (повного) нерозгалуженого кола:** сила струму в замкненому колі прямо пропорційна алгебраїчній сумі всіх ЕРС, що діють у колі, і обернено пропорційна його повному опору, який дорівнює сумі опорів зовнішньої та внутрішньої ділянок, тобто

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}, \qquad (15.17)$$

де R – сумарний опір зовнішньої ділянки кола, r – сума внутрішніх опорів джерел струму.

● **Правила Кірхгофа для розгалуженого кола.**

Перше правило: алгебраїчна сума струмів, що сходяться в будь-якому вузлі, дорівнює нулю, тобто

$$\sum_i I_i = 0. \qquad (15.18)$$

Перше правило є наслідком закону збереження заряду та умови підтримки постійного струму, за яким при постійному струмі потенціали будь-яких точок кола з часом не змінюються.

Вузол – точка кола, в якій сходиться не менш, ніж три провідника.

Друге правило: для будь-якого замкненого контуру, виділеного в розгалуженому колі, алгебраїчна сума добутків сили струму на опір відповідної ділянки кола дорівнює алгебраїчній сумі всіх ЕРС, які діють в цьому контурі:

$$\sum_i I_i R_i = \sum_k \varepsilon_k. \qquad (15.19)$$

Друге правило Кірхгофа є узагальненням закону Ома для неоднорідної ділянки кола.

● Загальний опір n провідників **при послідовному з'єднанні** дорівнює

$$R = \sum_{i=1}^{n} R_i; \qquad (15.20)$$

Для послідовного з'єднання ділянок кола є характерною відсутність вузлів (розгалужень) на провіднику, який з'єднує ці ділянки (рис. 15.1а). При цьому струм на цих ділянках (опорах) є однаковим, а напруга дорівнює сумі напруг на кожній з них:

$$U = \sum_{i=1}^{n} U_i; \quad I = I_1 = I_2 = ... = I_n. \qquad (15.21)$$

Загальний опір n провідників **при паралельному з'єднанні** знаходиться з співвідношення

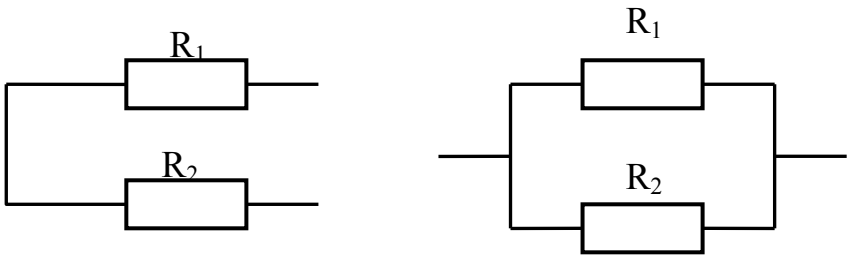
$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}, \qquad (15.22)$$

тобто у цьому випадку додаються провідності G_i окремих провідників:

$$G = \sum_{i=1}^{n} G_i . \qquad (15.23)$$

При паралельному з'єднанні ділянок кола кінці усіх ділянок підключені к тим самим двом точкам кола (рис.15.1б). При цьому напруга на цих ділянках є однаковою, а сума струмів в усіх ділянках дорівнює струму в колі до розгалуження:

$$I = \sum_i I_i ; \quad U = U_1 = U_2 = ... = U_n \qquad (15.24)$$



а) б)

Рис. 15.1

● **Робота електричних сил** на ділянці кола, на кінцях якої існує різниця потенціалів $\varphi_1 - \varphi_2$, дорівнює

$$A = (\varphi_1 - \varphi_2)It = IUt . \qquad (15.25)$$

● **Закон Джоуля-Ленца:** кількість теплоти, що виділяється на ділянці кола опору R, по якій протягом часу t проходить струм I, дорівнює

$$Q = IUt = I^2Rt = \frac{U^2}{R}t . \qquad (15.26)$$

Відповідно теплова потужність, яка виділяється в провіднику постійним струмом I, дорівнює

$$P = IU = I^2R = \frac{U^2}{R} . \qquad (15.27)$$

● Більш детально описує виділення енергії у провіднику при проходженні струму **питома потужність струму** w, яка надає кількість енергії, що виділяється в одиниці об'єму провідника за одиницю часу:

$$w = \frac{dW}{dV \cdot dt} . \qquad (15.28)$$

Закон Джоуля – Ленца у **диференціальній формі** для питомої потужності струму w:

$$w = \vec{j}\vec{E} = j^2\rho = \gamma E^2 . \qquad (15.29)$$

● Повна потужність у електричному колі, тобто потужність джерела ЕРС:

$$P = \mathcal{E}I \qquad (15.30)$$

де $\mathcal{E}$ – електрорушійна сила джерела струму.

Робота,яка здійснюється джерелом електричної енергії за час t,

$$A = \mathcal{E}It = I^2R_{повн.}t = \frac{\mathcal{E}^2}{R_{повн.}}t, \qquad (15.31)$$

де $R_{повн.}$ – повний опір кола.

Методичні вказівки

1. Для обчислення сили струму і густини струму, а також розрахунку опорів однорідних провідників застосовують закон Ома в інтегральній (15.9) або диференціальній (15.15) формі.

Інтегральну форму закону Ома зручно використовувати при розрахунках струмів у провідниках.

Для обчислення струмів та опорів у необмежених провідних середовищах (наприклад, у випадку заземлення електродів) використовують диференціальну форму закону Ома. Притому, напруженість електричного поля при наявності постійного струму та однорідності середовища можна обчислювати методами електростатики, оскільки вона співпадає з напруженістю електростатичного поля при тій самій напрузі (різниці потенціалів) у непровідному середовищі.

2. При розрахунку струмів у суцільному провідному середовищі та визначенні опору провідного середовища між електродами (електрод – еквіпотенційний провідник, провідність якого набагато менша за електропровідність середовища) доцільно притримуватися наступної схеми:

а) розв'язок задачі почати зі струму I, за яким визначити густину струму $\vec{j}(\vec{r})$. При постійному струмі $\vec{j}$ завжди задовольняє умові $\operatorname{div}\vec{j} = 0$ незалежно від діелектричних та провідних властивостей середовища. В задачах з симетричним полем ця умова дозволяє відразу визначити характер залежності густину струму від координати.

б) Скориставшись законом Ома у диференціальній формі, перейти до напруженості електричного поля $\vec{E}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})\vec{j}(\vec{r})$.

в) Шляхом інтегрування визначити різницю потенціалів між електродами:

$$U(\vec{r}) = -\int \vec{E}(\vec{r})d\vec{r}.$$

г) Далі за законом Ома знайти опір середовища між електродами: $R = \frac{U}{I}$.

Отже, схема розв'язання задачі має вигляд:

$$I \to \vec{j} \to \vec{E} \to U. \qquad (15.32)$$

У випадку однорідного середовища поле повністю визначається зарядами і потенціалами електродів, і у якості вхідного параметру можна обрати напругу U на електродах, за якою визначити напруженість E електричного поля між електродами. Далі, користуючись законом Ома у диференціальній формі (15.15), перейти до густини електричного струму j, яка дозволяє за формулою (15.4) визначити струм I:

$$U \to \vec{E} \to \vec{j} \to I. \qquad (15.33)$$

Або, якщо відомий заряд $\pm q$ на електродах (обкладинках конденсатора), схема розв'язання приймає вигляд

$$q \to \vec{E} \to \vec{j} \to I. \qquad (15.34)$$

Якщо провідне середовище не є однорідним розв'язання задачі ускладнюється внаслідок появи у провідному середовищі вільних зарядів, що ускладнює визначення залежності питомого опору ρ від r і робить простий перехід від U або q до E неможливим.

3. При застосуванні закону Ома для повного кола (15.17) при розв'язуванні конкретної задачі його зручно записувати у наступному вигляді:

$$\pm IR = \sum_j \pm \mathcal{E}_j, \qquad (15.17a)$$

де R – повний опір кола з урахуванням внутрішнього опору джерел струму. При розв'язанні конкретної задачі треба спочатку обирати напрям струму (рис. 15.2), який можна задати довільним способом (дійсний напрям струму визначається потім знаком отриманого розв'язку).

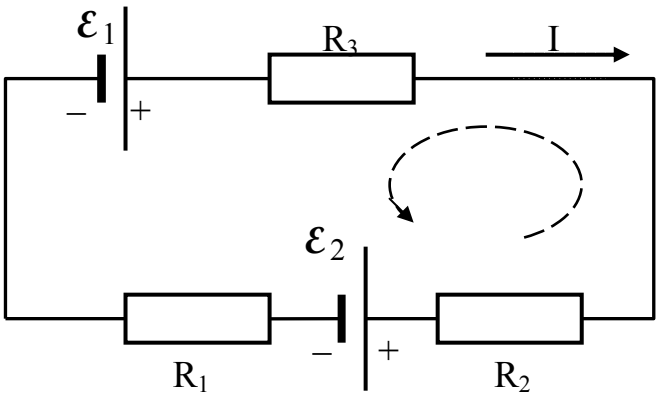


Рис. 15.2

Далі здійснюється обхід контуру. **Правила знаків** в законі Ома для повного кола

для струму: струм вважається додатним $(+I)$, якщо його напрям співпадає з обраним напрямом обходу контуру, у протилежному випадку струм вважається від'ємним $(-I)$;

для ЕРС: ЕРС є додатною $(+\mathcal{E})$, якщо при обході контуру джерело струму проходять у напрямі дії сторонніх сил, тобто від контакту $(-)$ до контакту $(+)$, і від'ємною $(-\mathcal{E})$ у протилежному випадку.

Для кола, схема якого наведена на рис. 15.2, при обраного напряму струму та напряму обходу контуру рівняння, записане за законом Ома для повного кола у відповідності з наведеними правилами, має вигляд:

$$-I(R_1 + R_2 + R_3) = -\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2.$$

4. Для розрахунків, пов'язаних з розгалуженим колом, зручно це коло умовно поділити на декілька замкнених нерозгалужених контурів і використати правила Кірхгофа (15.18), (15.19).

При використанні правил Кірхгофа слід дотримуватися наступних рекомендацій:

а) обрати довільним способом та указати стрілками напрями струмів на всіх ділянках розгалуженого кола;

б) при запису рівнянь за I правилом Кірхгофа (15.18) слід дотримуватися правила знаків: струми, що притікають у вузол, вважають додатними, а ті, що витікають з вузла – від'ємними;

в) звернути увагу на те, що кількість незалежних рівнянь, складених за I правилом Кірхгофа, завжди на одиницю менша кількості вузлів у даному електричному колі;

г) обрати напрям обходу контурів (за чи проти годинникової стрілки);

д) при запису рівнянь, які відповідають другому правилу Кірхгофа (15.19) слід дотримуватися правил знаків, які є аналогічними наведеним вище для закону Ома для повного кола;

ж) для того, щоб усі рівняння, складені за II правилом були незалежними, необхідно кожного разу розглядати контури, які містять хоча б одну нову гілку, яка не увійшла у попередні контури;

з) якщо після розв'язання системи рівнянь в отриманій відповіді деякий струм має знак «–», це означає, що у дійсності струм тече у протилежному напрямі. Якщо в задачі визначається опір, отримане значення якого в результаті з'явилося від'ємним, це також свідчить про невірний вибір напряму струмів у даному провіднику. Але в цьому випадку невірним буде також і отримане значення опору. Тому необхідно змінити напрям струму в провіднику на протилежний, скласти нову систему рівнянь і розв'язати її заново.

5. При розв'язуванні задач на роботу та потужність струму слід мати на увазі, що робота сил електричного (15.25) і кількість теплоти (15.26), яка виділяється при проходженні струму, співпадають тільки, якщо розглянута ділянка кола не містить джерел струму, і для неї справедливий закон Ома (15.9). Якщо ділянка містить джерело струму, величини A і Q не є однаковими. Знак нерівності залежить від напрямів струму та ЕРС.

Приклади розв'язання задач

Приклад 15.1. Визначити силу струму I у провіднику, якщо за кожну секунду t = 1с крізь його переріз проходить $N = 2 \cdot 10^{17}$ електронів.

$t = 1$с $N = 2 \cdot 10^{17}$ $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл I - ?	Розв'язання. Сила постійного струму дорівнює заряду, який проходить через переріз провідника за одиницю

часу (15.1а). Кожен електрон переносить заряд q, тому за 1с всі вони перенесуть заряд N·q.

Тоді сила струму $$I = \frac{Nq}{t};$$

Перевіряємо розмірність: $$[I] = \frac{[q]}{[t]} = \frac{Кл}{с} = А.$$

Підставляємо числові значення, знайшовши в таблицях заряд електрона $q = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл:

$$I = \frac{2\cdot10^{17}\cdot1{,}6\cdot10^{-19}}{1} = 3{,}2\cdot10^{-2} = 0{,}032А.$$

Відповідь: I = 0,032 А.

Приклад 15.2. Сила струму у провіднику змінюється за законом I = 2+2t, де I вимірюється в амперах, t – в секундах. Знайти заряд q, який проходить крізь переріз провідника за проміжок часу від $t_1 = 1с$ до $t_2 = 3с$.

I = 2+2t
$t_1 = 1с$
$t_2 = 3с$
q - ?

Розв'язання.

Користуючись формулою (15.1) можна записати: $dq = Idt$. Відповідно для визначення повного заряду q треба здійснити інтегрування.

$$q = \int_{t_2}^{t_1} Idt = \int_{t_2}^{t_1}(2+2t)dt = 2\int_{t_2}^{t_1}dt + 2\int_{t_2}^{t_1}tdt = 2(t_2 - t_1) + (t_2^2 - t_1^2) = 12Кл.$$

Відповідь: q = 12 Кл.

Приклад 15.3. Визначити густину струму в мідному дроті довжиною 10м, якщо різниця потенціалів $\varphi_1 - \varphi_2$ на його кінцях дорівнює 8,5В.

l = 10м
$\varphi_1 - \varphi_2 = 8{,}5В$
$\rho = 1{,}7\cdot10^{-8}$Ом·м
j - ?

Розв'язання

Розглянемо два способи розв'язання задачі: за законом Ома в диференціальній та інтегральній формах.

І спосіб. За законом Ома у диференціальній формі (15.15) $\vec{j} = \gamma\vec{E} = \frac{1}{\rho}\vec{E}$, де значення питомого опору мідного провідника $\rho = 1{,}7\cdot10^{-8}$Ом·м дістаємо з таблиці.

Напруженість електричного поля всередині провідника виражаємо через різницю потенціалів на його кінцях та довжину *l* (див. формулу (14.20а)): $$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{l}.$$

Тоді $$j = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\rho l}. \qquad (1)$$

II спосіб. Густину струму j виражаємо через силу струму I за означенням (15.2): $j=\frac{I}{S}$ (2). Силу струму I знаходимо із закону Ома для однорідної ділянки кола (15.9): $I=\frac{U}{R}=\frac{\varphi_1-\varphi_2}{R}$. Підстановка цього виразу у формулу (2) з урахуванням виразу (15.11) $R=\rho\frac{l}{S}$ для опору провідника приводить до того самого результату (1):

$$j=\frac{\varphi_1-\varphi_2}{RS}=\frac{\varphi_1-\varphi_2}{\rho l}.$$

Перевіряємо одиницю вимірювання: $[j]=\frac{В}{Ом\cdot м\cdot м}=\frac{А}{м^2}$.

Розрахунок дає: $j=\frac{8,5}{1,7\cdot 10^{-8}\cdot 10}=5\cdot 10^7\ \frac{А}{м^2}$.

Відповідь: $j=5\cdot 10^7\ \frac{А}{м^2}$.

Приклад 15.4. Обмотка реостату зроблена з мідного дроту діаметром d=0,5мм, який щільно намотано на циліндр радіусом r=2см. Скільки витків N слід зробити, щоб опір реостата дорівнював R=50 Ом?

R = 50 Ом d = $0,5\cdot 10^{-3}$м r = $2\cdot 10^{-2}$м ρ=$1,7\cdot 10^{-8}$Ом·м	Розв'язання Кількість витків обмотки реостату визначаємо як відношення довжини дроту L до довжини одного витка $l_1=2\pi r$: $N=\frac{L}{l_1}=\frac{L}{2\pi r}$. (1)
N - ?	

Довжину дроту можна визначити з формули для опору $R=\rho\frac{L}{S}$,

де ρ – питомий опір провідника; $S=\frac{\pi d^2}{4}$ – площа його перерізу.

$$L=\frac{RS}{\rho}=\frac{\pi d^2 R}{4\rho}.$$

Після підстановки отриманого виразу в формулу (1) визначаємо кількість витків:

$$N=\frac{\pi d^2 R}{4\rho\cdot 2\pi r}=\frac{d^2 R}{8\rho r}.$$

Перевірка розмірності: $[N]=\left[\frac{м^2\cdot Ом}{Ом\cdot м\cdot м}\right]=1$.

$$N=\frac{0,25\cdot 10^{-6}\cdot 50}{8\cdot 1,7\cdot 10^{-8}\cdot 2\cdot 10^{-2}}=4595\approx 4600\ (\text{витків}).$$

Приклад 15.5. На плоский конденсатор ємністю C подана напруга U. Знайти струм витоку у конденсаторі, якщо питома провідність речовини, що заповнює зазор між обкладинками конденсатора дорівнює ρ, а її діелектрична проникність дорівнює ε.

Розв'язання

Оскільки напруга на обкладинках конденсатора є постійною, а поле між обкладинками – однорідним, то для розв'язання задачі можна скористатися схемою (15.33).

Напруженість однорідного поля плоского конденсатора дорівнює:

$$E = \frac{U}{d},$$

де d – відстань між обкладинками конденсатора.

За законом Ома у диференціальній формі (15.15) визначаємо густину струму провідності.

$$j = \frac{E}{\rho} = \frac{U}{\rho d}.$$

Сила струму, який тече між обкладинками, дорівнює $I = jS = \frac{US}{\rho d}$ (1).

З урахуванням виразу для електроємності плоского конденсатора $C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$, звідки $\frac{S}{d} = \frac{C}{\varepsilon\varepsilon_0}$, формула (1) набуває вигляду $I = \frac{UC}{\rho\varepsilon\varepsilon_0}$.

Відповідь: $I = \frac{UC}{\rho\varepsilon\varepsilon_0}$.

Приклад 15.6. Між обкладинками сферичного конденсатора, радіус яких дорівнює r_1 і r_2, знаходиться слабко провідна однорідна речовина з провідністю ρ і діелектричною проникністю ε. Визначити опір R такого шару.

Розв'язання.

І спосіб. Згідно умові задачі, речовина, що заповнює конденсатор є однорідною, тому ρ =const, і можна скористатися схемою (15.34).

Нехай заряд на обкладинках конденсатору дорівнює $\pm q$. Тоді напруженість поля між обкладинками згідно формулі (14.12) дорівнює

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} \quad (r_1 < r < r_2).$$

Напруга між сферами

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E(r)dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r^2}dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\cdot\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}. \qquad (1)$$

Визначимо силу струму, що протікає між обкладинками (струм витоку). Виражаємо струм через його густину j і далі використовуємо

закон Ома у диференціальній формі (15.15). Оскільки заряди на обкладинках є постійними, то через будь-яку концентричну поверхню радіуса r ($r_1 < r < r_2$) струм є однаковим і дорівнює

$$I = jS = \frac{E}{\rho}S = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\rho r^2}\cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0\varepsilon\rho}. \qquad (2)$$

Виражаємо R із закону Ома в інтегральній формі і після підстановки виразів (1) і (2) отримуємо:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\cdot\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\cdot\frac{\varepsilon_0\varepsilon\rho}{q} = \frac{\rho}{4\pi}\cdot\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}. \qquad (3)$$

II спосіб. Розглянемо можливість застосування формули опору (15.11) $R = \rho\frac{l}{S}$, яка є справедливою для циліндричного провідника, вздовж якого тече струм. Зрозуміло, що безпосередньо у наданому вигляді її застосувати неможливо. Але, якщо виділити всередині конденсатора сферичний шар радіуса r завтовшки dr (рис.15.3), то, з урахуванням симетрії картини ліній струму відносно центра сфер, цей шар можна розглядати як провідник довжиною dr та площиною перерізу $S = 4\pi r^2$. Тоді, відповідно формулі (15.11) опір dR виділеного сферичного шару дорівнює:

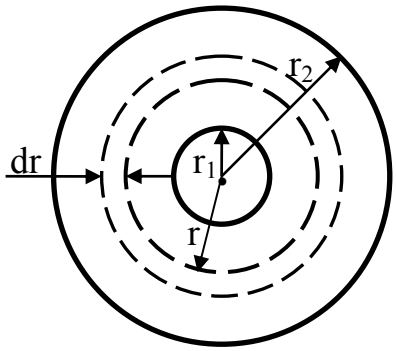


Рис. 15.3

$$dR = \rho\frac{dr}{4\pi r^2}. \qquad (4)$$

Інтегрування виразу (4) у межах між обкладинками конденсатора дає результат, який збігається з результатом (3) попереднього способу.

$$R = \int_{r_1}^{r_2}\rho\frac{dr}{4\pi r^2} = \frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{\rho}{4\pi}\cdot\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}.$$

Примітка. Якщо нескінченне середовище з питомим опором ρ оточує відокремлену провідну сферу радіусу r, його опір буде дорівнювати

$$R = \frac{\rho}{4\pi r},$$

оскільки у цьому випадку $r_2 = \infty$.

Приклад 15.7. Вольтметр, який послідовно з'єднали з резистором опором R_1=2кОм, при напрузі U=100В, показав U_1=80В (рис.15.4). При послідовному з'єднанні вольтметра з резистором невідомого опору R_2 при тій самій напрузі його показання дорівнюють U_2=60В. Визначити величину опору R_2.

Розв’язання.

$U=100В$
$U_1=80В$
$R_1=1\cdot10^3$ Ом
$U_2=60В$

R_2 -?

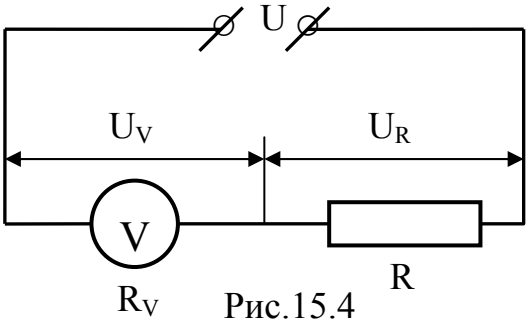


Рис.15.4

Електричне коло складається з двох послідовно з’єднаних елементів – вольтметра та резистора. При заданому з’єднані вольтметр вимірює напругу на кінцях ділянки кола, якою є він сам, тобто на самому собі (див.рис.15.4).

При послідовному з’єднані сила струму є однаковою в усіх елементах кола; напруга на окремих елементах кола співпадає з різницею потенціалів на їх кінцях, є пропорційною опору ділянок і в сумі дає напругу у всьому колі: $U = U_V + U_R$. Тоді, згідно закону Ома для однорідної ділянки кола (15.9) при включеному в коло резисторі R_1 внаслідок рівності струмів крізь вольтметр і резистор можна скласти пропорцію:

$$\frac{U_1}{R_V} = \frac{U - U_1}{R_1}, \qquad (1)$$

де $U_1 = U_{V_1}$ – напруга на вольтметрі при включеному в коло опорі R_1, R_V – опір вольтметра; $U - U_1 = U_{R_1}$ – напруга на резисторі опором R_1.

Аналогічно при включеному в коло невідомому резисторі R_2

$$\frac{U_2}{R_V} = \frac{U - U_2}{R_2}. \qquad (2)$$

Діленням виразу (1) на вираз (2) виключаємо з них невідомий опір вольтметра і знаходимо R_2.

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{U - U_1}{R_1} \cdot \frac{R_2}{U - U_2},$$

Звідки

$$R_2 = \frac{U_1 R_1}{U_2} \cdot \frac{U - U_2}{U - U_1}.$$

Підстановка значень дає: $R_2 = \frac{80 \cdot 2 \cdot 10^3}{60} \cdot \frac{100 - 60}{100 - 80} = 5{,}3 \cdot 10^3$ Ом.

Відповідь: $R_2 = 5{,}3$кОм.

Примітка 1. При розглянутому в задачі послідовному включенні вольтметра неможливо безпосередньо виміряти напругу на будь-якому елементі кола, оскільки вольтметр вимірює напругу на собі. Отже

зрозуміло, що для вимірювання напруги на резисторі, вольтметр необхідно підключати до цього резистору паралельно.

Примітка 2. Якби розглянута в задачі ділянка кола була б підключена до батареї гальванічних елементів, то напругу на ділянці з вольтметра та резистора вважати постійною неможливо. При підключенні до полюсів батареї, яка має внутрішній опір r, напруга U повинна змінюватися при зміні опору R. Для розв'язування задач подібного типу необхідно використовувати закон Ома для повного кола (15.17), а для напруги U на розглянутій ділянці справедливим буде співвідношення $U = U_V + U_R = \mathcal{E} - Ir$, де $\mathcal{E}$ – електрорушійна сила батареї.

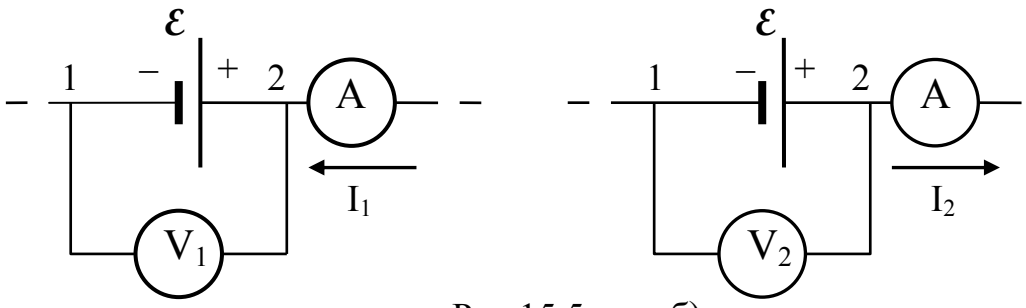
Приклад 15.8. Наприкінці зарядки акумулятора при силі струму в колі I_1=3А показання вольтметра, підключеного до клем акумулятора, дорівнювали U_1 = 4,25В. На початку розрядки того самого акумулятора при силі струму в колі I_2=4А показання вольтметра становлять U_2 = 3,9В. Визначити ЕРС та внутрішній опір акумулятора.

I_1=3А
U_1 = 4,25В
I_2=4А
U_2 = 3,9В
$\mathcal{E}$; r - ?

Розв'язання.

Можна вважати, що наприкінці зарядки і на початку розрядки ЕРС акумулятора має максимальне номінальне значення, яке необхідно визначити.

Схеми, які відповідають процесам зарядки і розрядки акумулятора зображені на рисунках 15.5 а, б.



а) Рис.15.5 б)

На основі закону Ома для неоднорідної ділянки кола 1-2 записуємо рівняння, які для зарядки і розрядки акумулятора відповідно мають вигляд:

$$-I_1 r = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}; \quad (1)$$

$$I_2 r = (\varphi_1' - \varphi_2') + \mathcal{E}. \quad (2)$$

Вольтметр, включений в коло, показує напругу, яка дорівнює різниці потенціалів між точками підключення 1 і 2, тобто

$$(\varphi_1 - \varphi_2) = -U_1; \quad (3)$$

$$(\varphi_1' - \varphi_2') = -U_2. \quad (4)$$

Підставляємо вирази (3) і (4) у відповідні рівняння (1) і (2) і розв'язуємо отриману систему відносно шуканих величин r та $\mathcal{E}$.

$$\begin{cases} -I_1 r = -U_1 + \mathcal{E}; \\ I_2 r = -U_2 + \mathcal{E}. \end{cases} \rightarrow \; r = \frac{U_1 - U_2}{I_1 + I_2}; \quad \mathcal{E} = \frac{U_1 I_2 + U_2 I_1}{I_1 + I_2}. \qquad (5)$$

Розрахунок за формулами (5) дає:

$$r = \frac{4,25 - 3,9}{3+4}\frac{В}{А} = 0,05\,Ом;$$

$$\mathcal{E} = \frac{4,25 \cdot 4 + 3,9 \cdot 3}{3+4}\frac{В \cdot А}{А} = 4,1В.$$

Відповідь: $r = 0,05\,Ом$; $\mathcal{E} = 4,1В$.

Приклад 15.9. Елемент з електрорушійною силою $\mathcal{E}$=12В при підключенні до зовнішнього опору R=15Ом дає струм I=0,75А. Визначити максимальний струм I_{max} (струм короткого замикання), який може дати цей елемент.

$\mathcal{E}$=12В R=15Ом I=0,75А	Розв'язання. Застосуємо закон Ома для повного кола (15.17):
I_{max}- ?	$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}, \qquad (1)$$ де $\mathcal{E}$– електрорушійна сила елемента; R – зовнішній опір; r – внутрішній опір елемента.

З формули (1) знаходимо внутрішній опір r:

$$I\,(R + r) = \mathcal{E}.$$

Звідки

$$r = \frac{\mathcal{E} - IR}{I}. \qquad (2)$$

Максимальним струм у колі буде тоді, коли R = 0. Тому за формулою (1)

$$I_{max} = \frac{\mathcal{E}}{r}. \qquad (3)$$

Підставляємо (2) в рівняння (3): $I_{max} = \dfrac{\mathcal{E}I}{\mathcal{E} - IR}$.

Перевіряємо розмірність: $[I_{max}] = \dfrac{В \cdot А}{В - А \cdot Ом} = \dfrac{В \cdot А}{В - В} = А$

Після розрахунків отримуємо $I_{max} = \dfrac{12 \cdot 0,75}{12 - 0,75 \cdot 15} = 12$ А.

Відповідь: I_{max} = 12 А.

Приклад 15.10. У схемі, яка зображена на рис.15.6, $\mathcal{E}$=50 В; R_2=3,6 кОм; R_3=6 кОм. Амперметр показує струм I_3= 6мА. Опором амперметра і внутрішніми опорами елементів знехтувати. Знайти опір R_1.

Дано
$\mathcal{E}$=50 В
R_2=3,6 кОм
R_3=6 кОм
I_3=6 мА

R_1-?

Розв'язання

За законом Ома для повного кола $I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$ (1). За умовою задачі внутрішній опір джерела струму r=0.

Зовнішній опір кола R, оскільки опори R_2 та R_3 з'єднані між собою паралельно і послідовно з опором R_1, дорівнює $R = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$ (2). Тоді

$$R_1 = R - \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}. \qquad (3)$$

Знаходимо R з формули (1): $R = \frac{\mathcal{E}}{I}$ і підставляємо в формулу (3):

$$R_1 = \frac{\mathcal{E}}{I} - \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}. \qquad (4)$$

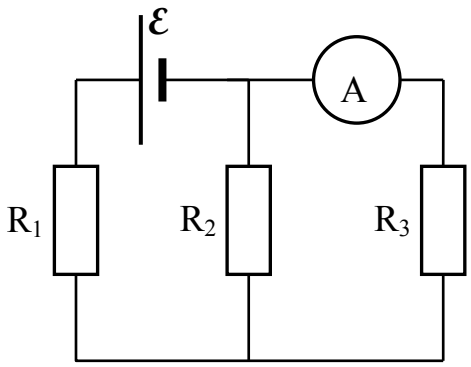


Рис.15.6

Величину струму I, який тече через опір R_1 записуємо із використанням співвідношень для струмів I_2 та I_3, які протікають через опори R_2 та R_3: $I = I_2 + I_3$.

Значення струму I_2 знаходимо за умовою рівності напруги на паралельно з'єднаних опорах: $U_2 = U_3$. За законом Ома для ділянки кола $U_2 = I_2 R_2$; $U_3 = I_3 R_3$. Звідки витікає $I_2 = \frac{I_3 R_3}{R_2}$ та $I = I_3\left(\frac{R_3}{R_2} + 1\right)$ (5).

Обчислюємо величину струму $I = 6 \cdot 10^{-3}\left(\frac{6 \cdot 10^3}{3{,}6 \cdot 10^3} + 1\right) = 16 \cdot 10^{-3}\,(\text{А})$ та за формулою (4) визначаємо R_1: $R_1 = \frac{50}{16 \cdot 10^{-3}} - \frac{3{,}6 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^3}{3{,}6 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^3} = 875\,(\text{Ом})$.

Відповідь: R_1=875 Ом.

Приклад 15.11. У схемі, яку зображено на рис.15.7, $\mathcal{E}_1$ = 2В; $\mathcal{E}_2$ = 2,5В; R_1=1кОм; R_2 = 1,5кОм; R_3 = 2кОм. Знайти струм I_3, який протікає через опір R_3? Внутрішній опір елементів не враховувати.

$\mathcal{E}_1$ = 2В
$\mathcal{E}_2$ = 2,5В
R_1=1кОм
R_2 = 1,5кОм
R_3 = 2кОм

I_3 - ?

Розв'язання

Будемо вважати, що струми мають напрямки, які указані на рисунку (рис.15.7).

Запишемо перший закон Кірхгофа для вузла А і другий закон Кірхгофа для лівого і правого контурів

схеми, обравши напрям обходу контуру – за годинниковою стрілкою:

$$\begin{cases} I_1 + \quad I_2 - \quad I_3 = 0 \\ R_1 I_1 \quad\quad\quad + R_3 I_3 = \mathcal{E}_1 \\ \quad\quad -R_2 I_2 \quad - R_3 I_3 = \mathcal{E}_2 \end{cases}$$

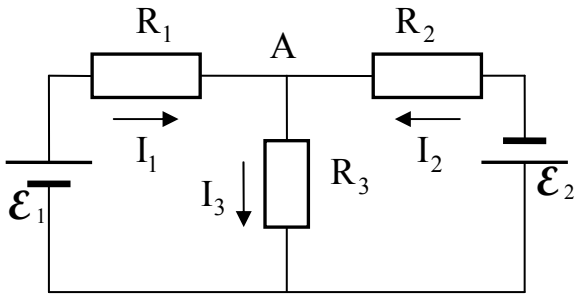


Рис.15.7

Маємо систему трьох рівнянь з трьома невідомими. Розв'язуємо систему відносно I_3:

$$I_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

де
$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ R_1 & 0 & R_3 \\ 0 & -R_2 & -R_3 \end{vmatrix} = 6{,}5 \cdot 10^6 \left(\text{Ом}^2\right);$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ R_1 & 0 & \mathcal{E}_1 \\ 0 & -R_2 & \mathcal{E}_2 \end{vmatrix} = 0{,}5 \cdot 10^3 (\text{В} \cdot \text{Ом}).$$

Перевіряємо розмірність: $[I_3] = \dfrac{\text{В} \cdot \text{Ом}}{\text{Ом}^2} = \text{А}.$

$$I_3 = \frac{0{,}5 \cdot 10^3}{6{,}5 \cdot 10^6} = 7{,}7 \cdot 10^{-5}\ \text{А} = 77\ \text{мкА}$$

Відповідь: $I_3 = 77$ мкА.

Приклад 15.12. Електрорушійна сила елемента $\mathcal{E}$ = 40В. Максимальна сила струму, яку може дати елемент I_{max} = 0,6А. Знайти максимальну потужність P_{max}, яку може віддати у зовнішню ділянку кола цей елемент.

$\mathcal{E} = 40$В $I_{max} = 0{,}6$А	Розв'язання. Потужність P струму вимірюється роботою, яку виконують електричні сили у одиницю часу. Згідно з формулою (15.27):
P_{max}-?	

$$P = I^2 R. \qquad (1)$$

Оскільки за законом Ома $I = \dfrac{\mathcal{E}}{R + r}$, то $P = \dfrac{\mathcal{E}^2 R}{(R+r)^2}$. (2)

Знайдемо умову, за якою функція P(R) має максимум. Для цього треба дослідити вираз (2) на екстремум. Записавши першу похідну і дорівнюючи її нулю, дістанемо висновок, що потужність буде максимальною, коли R = r:

$$P'_R = \left(\frac{\mathcal{E}^2 R}{(R+r)^2}\right)'_R = \frac{\mathcal{E}^2\left((R+r)-2R\right)}{(R+r)^3} = 0.$$

Звідки $(R+r)-2R=0$ і $r=R$.

Тоді $$P_{max} = \frac{\mathcal{E}^2 r}{(r+r)^2} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r}. \quad (3)$$

Оскільки $I_{max} = \mathcal{E}/r$, то рівняння (3) можна записати у вигляді: $P_{max} = \frac{\mathcal{E} I_{max}}{4}$.

Перевіримо одиницю вимірювання: $[P_{max}] = В \cdot А = \frac{В \cdot Кл}{с} = Вт.$

Підставимо числові дані: $P_{max} = \frac{40 \cdot 0{,}6}{4} = 6$ (Вт).

Приклад 15.13. Елемент з електрорушійною силою $\mathcal{E}$= 2 В і внутрішнім опором r = 0,4Ом створює на зовнішній ділянці кола струм I=2 А. З яким коефіцієнтом корисної дії η працює елемент?

Розв'язання

Дано	
$\mathcal{E}$=2 В r =0,4Ом I=2А	Коефіцієнт корисної дії елементу визначається відношенням його корисної потужності, яка виділяється у зовнішній частині кола $P_{кор}=I \cdot U_R$, до витраченої потужності $P_{витр.}$, яка визначається роботою джерела струму за одиницю часу і дорівнює $P_{витр}=I\mathcal{E}$.
η-?	

$$\eta = \frac{P_{кор}}{P_{витр}} = \frac{IU_R}{I\mathcal{E}} = \frac{U_R}{\mathcal{E}}. \quad (1)$$

Напругу U_R на зовнішній ділянці кола виражаємо з використанням закону Ома для повного кола $I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}$: $U_R = IR = \mathcal{E} - Ir$. Тоді $\eta = \frac{\mathcal{E} - Ir}{\mathcal{E}}$.

$$\eta = \frac{2 - 2 \cdot 0{,}4}{2} = 0{,}6 = 60\%.$$

Відповідь: $\eta = 60\%$.

Приклад 15.14. Елемент замикають двічі: спочатку дротом з опором R_1=5Ом, потім – з опором R_2=9Ом. В обох випадках кількість тепла, яка виділяється в обох дротах за однаковий час є однаковою. Визначити внутрішній опір r елементу.

Розв'язання

R_1=5Ом R_2=9Ом Q_1= Q_2	Згідно умові задачі Q_1= Q_2. Виражаємо кількість виділеної теплоти за допомогою закону Джоуля-Ленца (3.81): $I_1^2 R_1 t = I_2^2 R_2 t$. Звідки
r - ?	

$$I_1^2 R_1 = I_2^2 R_2. \quad (1)$$

З іншого боку, на основі закону Ома для повного кола

$$\mathcal{E} = I_1(R_1 + r); \qquad \mathcal{E} = I_2(R_2 + r).$$

Тоді $$I_1(R_1 + r) = I_2(R_2 + r) \qquad (2)$$

З виразів (1) та (2) дістаємо відношення струмів.

З виразу (1) витікає $$\frac{I_1}{I_2} = \sqrt{\frac{R_2}{R_1}},$$

а з виразу (2) $$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2 + r}{R_1 + r}.$$

Звідки $$\sqrt{\frac{R_2}{R_1}} = \frac{R_2 + r}{R_1 + r}.$$

Розв'язання останнього рівняння відносно r дає:

$$r = \frac{R_2 - R_1\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}}{\sqrt{\frac{R_2}{R_1}} - 1} = \sqrt{R_1 R_2}.$$

Після підстановки чисельних значень отримуємо:

$r = \sqrt{4 \cdot 9} = 6$ Ом.

Відповідь: $r = 6$ Ом.

Приклад 15.15. Визначити роботу електричних сил та кількість теплоти, що виділяється щосекунди, у таких випадках: 1) у резисторі при струмі через нього I=2A і різниці потенціалів на кінцях резистора $\varphi_a - \varphi_b = 16$ В; 2) в акумуляторі з електрорушійною силою $\mathcal{E}_1$=12В, який заряджують струмом I=2A при різниці потенціалів на його затискачах $\varphi_a - \varphi_b = 16$ В; 3) в батареї акумуляторів з ЕРС $\mathcal{E}_2$=24В, яка дає струм I=2A на зовнішній опір; різниця потенціалів на затискачах батареї $\varphi_a - \varphi_b = 16$ В.

Випадок 1.

I=2A $\varphi_a - \varphi_b = 16$ В t =1с
A; Q - ?

Розв'язання

Розглянута ділянка не містить ЕРС, для неї справедливий закон Ома (15.9) для однорідної ділянки кола $\varphi_a - \varphi_b = IR$. У цьому випадку робота сил електричного поля (15.25) і кількість теплоти (15.26), яка виділяється при проходженні струму, співпадають. Вся робота сил електричного поля йде на нагрівання резистора:

$$A = Q = (\varphi_a - \varphi_b)It. \qquad (1)$$

$$[A] = В \cdot А \cdot с = Дж; \qquad A = 16 \cdot 2 \cdot 1 = 32 \text{ Дж}.$$

Випадок 2.

Розв’язання

I=2A
$\varphi_a - \varphi_b = 16\,В$
t =1c
$\mathcal{E}_1$=12В
A; Q - ?

При зарядженні акумулятора його приєднують до джерела з постійною різницею потенціалів на полюсах так, що струм усередині акумулятора йде від «+» до «–», тобто у напрямі, протилежному струму розрядки (рис.15.8).

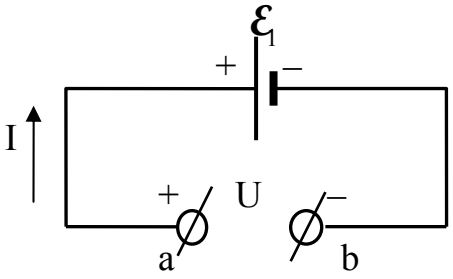


Рис.15.8

Робота сил електричного поля, як і в попередньому випадку, визначається за формулою (15.25):

$$A = (\varphi_a - \varphi_b)It = 16 \cdot 2 \cdot 1 = 32 \text{ Дж.}$$

Для визначення кількості виділеної теплоти за законом Джоуля-Ленца $Q = I^2Rt$ (2) необхідно знайти опір R ділянки кола a$\mathcal{E}$b. Оскільки ділянка містить ЕРС, скористаємося законом Ома для неоднорідної ділянки кола (15.14). З урахуванням напряму струму і ЕРС у відповідності з правилами вибору знаків записуємо:

$$I = \frac{\varphi_a - \varphi_b - \mathcal{E}_1}{R}.$$

Звідки $R = \frac{\varphi_a - \varphi_b - \mathcal{E}_1}{I}$ (3). Підстановка виразу (3) у формулу (2) дає

$$Q = I^2Rt = (\varphi_a - \varphi_b - \mathcal{E}_1)It = (16 - 12)2 \cdot 1 = 8 \text{ Дж.}$$

Отже, при зарядженні акумулятора тільки частина роботи електричних сил йде на нагрів акумулятора. Інша частина, яка дорівнює A–Q=24Дж, перетворюється в хімічну енергію акумулятора.

Випадок 3.

Розв’язання

I=2A
$\varphi_a - \varphi_b = 16\,В$
t =1c
$\mathcal{E}_2$=24В
A; Q - ?

1 спосіб. Електрична схема, яка відповідає розрядженню конденсатора, зображена на рис.15.9. Робота електричних сил усередині батареї в цьому випадку також визначається за формулою (15.25), але порівняно з попереднім, на протилежний змінюється напрям струму на ділянці a$\mathcal{E}$b. Тому

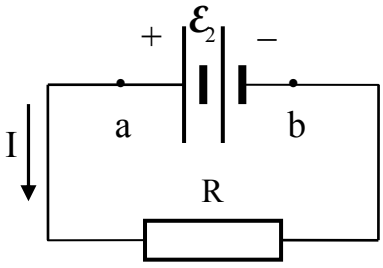


Рис.15.9

$$A = (\varphi_a - \varphi_b)(-I)t = -16 \cdot 2 \cdot 1 = -32 \text{Дж.}$$

Знак «–» відображує той факт, що всередині акумулятора позитивні заряди рухаються від «–» до «+», тобто проти сил електричного поля. При цьому

додатну роботу виконують сторонні сили, а робота електричних сил є від'ємною.

Кількість теплоти, що виділяється в батареї, знову знаходимо за законом Джоуля - Ленца (15.26), обчисливши внутрішній опір батареї r за законом Ома для неоднорідної ділянки кола (15.14). З урахуванням знаків струму та ЕРС маємо: $-I = \frac{\varphi_a - \varphi_b - \mathcal{E}_2}{r}$. Звідки $r = \frac{\mathcal{E}_2 - (\varphi_a - \varphi_b)}{I}$.

Підстановка виразу r у формулу (15.26) дає:

$$Q = I^2 rt = \left(\mathcal{E}_2 - (\varphi_a - \varphi_b)\right) It = (24 - 16) 2 \cdot 1 = 16 \text{ Дж}.$$

2 спосіб. Робота електричних сил на зовнішній ділянці кола aRb (див. формулу (1), випадок 1) дорівнює

$$A_{\text{зовн.}} = Q_{\text{зовн.}} = (\varphi_a - \varphi_b) It = 16 \cdot 2 \cdot 1 = 32 \text{ Дж}.$$

Сумарна робота електричних (консервативних) сил по переміщенню зарядів вздовж замкненого кола завжди дорівнює нулю. Тоді робота електричних сил усередині батареї

$$A = A_{\text{внутр.}} = -A_{\text{зовн.}} = -32 \text{ Дж}.$$

Енергія, яка витрачається батареєю, визначається роботою сторонніх сил і дорівнює $A_{\text{витр.}} = I\mathcal{E}t = 2 \cdot 24 \cdot 1 = 48 \text{ Дж}.$

Ця енергія перетворюється в тепло, яке виділяється у зовнішній ділянці кола (опір R) та усередині джерела. Оскільки $Q_{\text{зовн.}} = 32$ Дж, то кількість теплоти, що виділяється усередині батареї, дорівнює

$$Q = A_{\text{витр.}} - Q_{\text{зовн.}} = 48 - 32 = 16 \text{ Дж}.$$

Відповідь: 1. $A = Q = 32$ Дж. 2. A=32Дж; $Q = 8$ Дж. 3. $A = -32$ Дж; $Q = 16$ Дж.

Задачі для самостійного розв'язування

15.1. Визначити середню швидкість направленого руху електронів вздовж мідного провідника при густині постійного струму 11А/мм^2, якщо вважати, що на кожний атом міді в металі припадає два вільних електрона.

15.2. Сила постійного струму, який протікає по провіднику, I=40мА. Яка кількість електронів N проходить крізь переріз провідника за час Δt=5с?

15.3. За який час Δt крізь переріз провідника, по якому протікає постійний струм I=10мкА, пройде N=7,5$\cdot 10^{17}$ електронів?

15.4. Визначити густину струму j у алюмінієвому дроті довжиною l=2м, на кінцях якого підтримується постійна різниця потенціалів U=10В.

15.5. На кінцях мідного дроту довжиною 5м підтримується напруга 1 В. Визначити густину струму у дроті.

15.6. Який струм I протікає по спіралі лампочки розжарювання при густині струму j=45А/м^2 ? Діаметр спіралі d= 20мкм .

15.7. Величина струму в мідному провіднику I=10 А. Поперечний переріз провідника S=1мм^2. Визначити швидкість упорядкованого руху електронів у провіднику.

15.8. Крізь срібний дріт перерізом в 1мм^2 проходить струм силою в 1 А. Вичислити швидкість вільних електронів (швидкість хаотичного руху та швидкість направленого руху). Температура срібла t=20°С, густина ρ=10,5г/см^3. Атомна вага 108.

15.9. В досліді Толмена і Стюарта отримані наступні данні: лінійна швидкість руху дроту, з якого складається котушка, $v = 5\cdot10^3$см/с; довжина дроту $l=4\cdot10^4$ см; загальний опір котушки, з'єднувальних проводів та гальванометра R=40Ом; величина сумарного заряду, що проходить крізь гальванометр, $q=3\cdot10^{-9}$ кулона. Знайти питомий заряд електрона. (Питомий заряд – відношення заряду частинки до її маси).

15.10. Сила струму у провіднику змінюється за законом I=2+3t, де час t вимірюється у секундах, струм I в амперах. Який заряд пройде крізь переріз провідника за час від t_1=0 до t_2=2с?

15.11. Опір ділянки кола R, на кінцях якої підтримується постійна різниця потенціалів $\varphi_1 - \varphi_2$, з часом рівномірно зростає. За t=10с сила струму у провіднику зменшилась від I_0=4А до I=2А. Який заряд q пройшов за цей час крізь переріз провідника?

15.12. Обмотка реостата зроблена з мідного дроту діаметром d=0,5 мм, який щільно намотано на циліндр радіусом r =2см. Скільки треба зробити витків N, щоб отримати опір реостата R=50Ом?

15.13. Визначити опір R мідного дроту діаметром d=1мм і масою m=0,5кг.

15.14. Визначити падіння потенціалу $\varphi_1 - \varphi_2$ на залізному дроті довжиною l=200м, якщо по ньому тече струм I =2А. Діаметр дроту d=0,5мм.

15.15. Який діаметр повинен мати графітовий стержень, щоб падіння потенціалу на ньому при силі струму I=5А становило $\varphi_1 - \varphi_2$=25мВ? Довжина стержня l=1м.

15.16. Як треба з'єднати опори R_1=4 Ом; R_2=6 Ом і R_3=12Ом, щоб отримати систему з загальним опором R=8 Ом? Накреслити схему з'єднання.

15.17. До амперметра, опір якого R_A=0,12Ом, підключений паралельно опір R=0,03Ом (шунт). Амперметр показує I_A=2А. Чому дорівнює струм I у магістралі?

15.18. Амперметр опором R=0,12Ом має шкалу з N=20 поділками і розрахований на вимірювання максимального струму I_{max1}=20А. Який опір (шунт) слід взяти і як його треба підключити до амперметра, щоб можна було вимірювати струм I_{max2}=50А? У скільки разів при цьому збільшиться ціна поділки?

15.19. Батарея замкнена на опір R_1=9Ом дає силу струму I_1=2А. Якщо цю батарею підключити до опору R_2=19 Ом, сила струму буде I_2=1А. Знайти електрорушійну силу батареї $\mathcal{E}$ та її внутрішній опір r.

15.20. У схемі, яка зображена на рис.15.10, $\mathcal{E}$=2В; R_1=100Ом; R_2 може змінюватися від 0 до 100Ом. Побудувати графік залежності стуму I від R_2. Внутрішнім опором елемента r знехтувати.

15.21. Якщо батарею гальванічних елементів підключити до опору R_1=2,5Ом, вона дає струм I_1=1,67А. Якщо до батареї підключити опір R_2=1,5 Ом, вона дає струм I_2=2,5А. Який найбільший струм I_{max} може дати ця батарея?

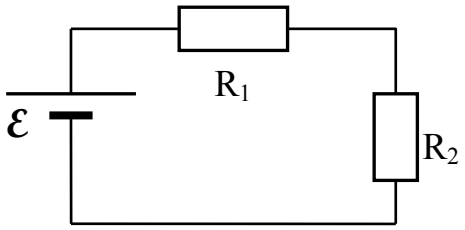


Рис. 15.10

15.22. Електрорушійна сила елемента $\mathcal{E}$=5В. Якщо до елемента підключити зовнішній опір R=10Ом, струм у колі дорівнюватиме I=0,45А. Визначити струм короткого замикання I_{max}.

15.23. До генератора з електрорушійною силою $\mathcal{E}$=50В і внутрішнім опором r =1Ом підключений споживач з опором R=20Ом. Визначити: 1)силу струму I, який протікає у колі; 2) заряд q, який проходить по колу протягом часу t=1 год.

15.24. До полюсів акумулятору з електрорушійною силою $\mathcal{E}$=5В підключили ніхромовий дріт довжиною l=5 м. Визначити густину струму j у провіднику. Внутрішній опір акумулятора не враховувати.

15.25. Елемент з електрорушійною силою $\mathcal{E}$=4В замкнений на зовнішній опір R=2Ом. Сила струму у колі I =1,6А. Знайти внутрішній опір елемента r і падіння потенціалу всередині елемента.

15.26. Елемент з електрорушійною силою $\mathcal{E}$=2В і внутрішнім опором r=0,4Ом замкнуто на зовнішній опір R=10Ом. Знайти: 1)силу струму I у колі; 2) падіння потенціалу на зовнішній ділянці кола; 3) падіння потенціалу усередині елемента; 4)коефіцієнт корисної дії η елемента.

15.27. Чотири однакових джерела з внутрішнім опором r=0,2 Ом кожний з'єднані послідовно та підключені до двох паралельно з'єднаних опорів R_1=30Ом та R_2=70Ом. Визначити ЕРС джерел, якщо сила струму в першому з резисторів становить I_1=1А.

15.28. Визначити температурний коефіцієнт α опору дроту, з якого виготовлено реостат, якщо при температурі $t_1 = 0°C$ його опір дорівнює R_1=100 Ом, а при температурі $t_2 = 80°C$ опір R_2=132 Ом.

15.29. Обмотка реостата зроблена із залізного дроту і при температурі $t = 20°C$ має опір R_1=20Ом. Після пропускання через обмотку струму опір підвищився до R_2=25Ом. На скільки підвищилася температура обмотки реостата? Температурний коефіцієнт опору заліза $\alpha=6\cdot10^{-3}\,K^{-1}$.

15.30. Знайти температуру вольфрамової нитки лампочки, якщо при вмиканні її в мережу (при температурі 20°С) струм у ній дорівнював I_1=6,1А, а установлений струм I_2=0,68 А. Температурний коефіцієнт опору вольфраму $\alpha=4{,}6\cdot10^{-3}\,K^{-1}$.

15.31. У схемі, яку зображено на рис.15.11, $\mathcal{E}$=50 В; R_1=100 Ом; R_2=200 Ом; R_3=300 Ом. Знайти струми I_1, I_2, I_3, які протікають через відповідні опори. Внутрішнім опором елемента знехтувати.

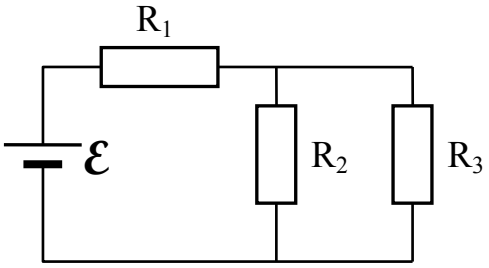


Рис. 15.11

15.32. У схемі, яка зображена на рис.15.12, $\mathcal{E}_1$= $\mathcal{E}_2$ =2 В; R=20 Ом; внутрішні опори елементів дорівнюють: r_1=0,5Ом і r_2=1Ом Знайти показання амперметра. Опором амперметра знехтувати.

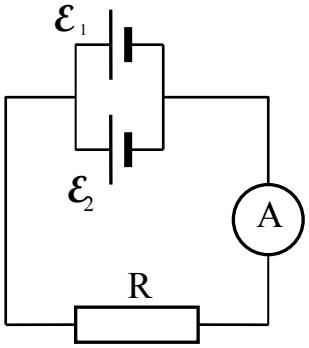


Рис.15.12

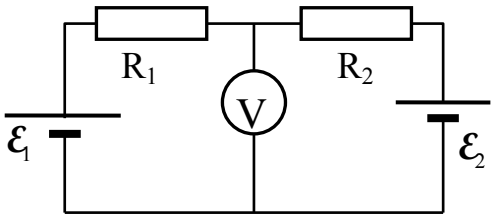


Рис.15.13

15.33. На рис.15.13 наведено схему, у якій $\mathcal{E}_1$=2В; $\mathcal{E}_2$=2,5В; R_1=1кОм; R_2=1,5кОм; опір вольтметра R_V=2кОм. Внутрішнім опором елементів знехтувати. Визначити показання вольтметра.

15.34. У схемі, яка зображена на рис.15.14, $\mathcal{E}$=50В; R_2=3,6кОм; R_3=6кОм. Амперметр показує струм I_3=6мА. Опором амперметра і внутрішніми опорами елементів знехтувати. Знайти опір R_1.

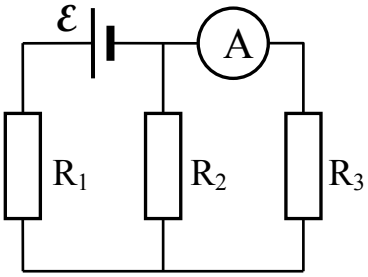


Рис.15.14

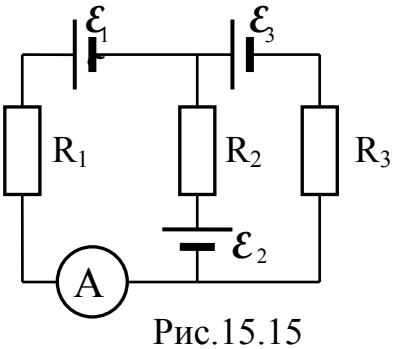


Рис.15.15

15.35. На рис.15.15 наведено електричну схему, у якій $\mathcal{E}_1$=3 В; $\mathcal{E}_2$=1,5 В; $\mathcal{E}_3$=2В; R_1=100 Ом; R_3=200 Ом; амперметр показує I_1=8мА. Знайти струми I_2 і I_3, які протікають через опори R_2 і R_3. Внутрішніми опорами елементів і опором амперметра знехтувати.

15.36. У схемі, наведеній на рис.15.16, $\mathcal{E}_1$=1,5В; $\mathcal{E}_2$=1В; R_1=50 Ом; R_2=100 Ом; R_3=80 Ом. Знайти струми I, I_2, I_3, які протікають через відповідні опори. Внутрішнім опором елементів знехтувати.

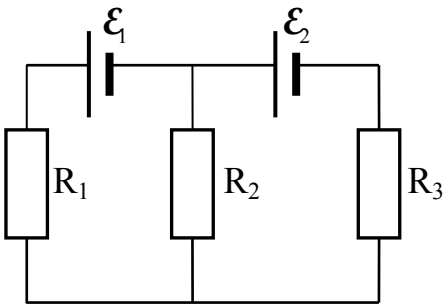


Рис. 15.16

15.37. Електричну лампочку потужністю P=60 Вт, розраховану на напругу U_1=120В, треба ввімкнути у мережу з напругою U_2=220В. Якої довжини l треба взяти ніхромовий дріт діаметром d=0,35мм для того, щоб його послідовне з'єднання з лампочкою дозволило підключити її до напруги 220В?

15.38. Електрична плитка живиться від мережі з напругою U=220В. Якої довжини l треба взяти ніхромовий дріт діаметром d=0,3 мм для того, щоб зробити спіраль для плитки потужністю P=0,8кВт ?

15.39. Густина струму у залізному дроті $j=6\cdot10^5$А/м^2. Знайти кількість теплоти Q, яка виділяється за t=1с в одиниці об'єму дроту. Вважати, що енергія електричного струму повністю перетворюється на теплову.

15.40. Знайти кількість тепла, яка виділяється кожної секунди в одиниці об'єму мідного дроту при густині струму j=30 А/см^2.

15.41. У мідному провіднику довжиною 2м та площиною поперечного перерізу S=0,4 мм^2 тече струм. При цьому кожної секунди виділяється Q=0,35 Дж теплоти. Скільки електронів проходить за 1с крізь поперечний переріз цього провідника?

15.42. Електричний кип'ятильник містить V=2 л води і живиться від мережі з напругою U=220В.Опір спіралі кип'ятильника R=30 Ом. Через який час τ вода закипить, якщо початкова температура води t= 20°C?

15.43. Для нагрівання V=2л води від температури t=30°C до температури кипіння, електричний кип'ятильник витратив енергію W=0,3кВт–годин електричної енергії. З яким коефіцієнтом корисної дії η працює кип'ятильник ?

15.44. Електричний чайник ввімкнутий до мережі з напругою U=220В. Яка сила струму I проходить крізь спіраль, якщо V=2л води закипають за τ=20хвилин? Початкова температура води t=20°C.

15.45. Електричний кип'ятильник має дві спіралі. Якщо ввімкнути одну з них, вода закипить через t_1=10 хвилин, Якщо ввімкнути тільки другу, вода закипить через t_2=20 хвилин. Через який час t закипить вода, якщо увімкнути обидві спіралі одночасно: 1) послідовно; 2) паралельно ?

15.46. Елемент з електрорушійною силою $\mathcal{E}$=2В і внутрішнім опором r=0,4Ом створює на зовнішній ділянці кола струм I=2А. З яким коефіцієнтом корисної дії η працює елемент?

15.47. Елемент з електрорушійною силою $\mathcal{E}$=4В може дати найбільшу силу струму I_{max}=10А. Яку найбільшу потужність P_{max} може віддати елемент у зовнішню ділянку кола ?

15.48.Знайти максимальну потужність P_{max}, яку елемент з електрорушійною силою $\mathcal{E}$=10В і внутрішнім опором r = 0,5Ом, може віддати у зовнішню ділянку кола.

15.49. Генератор з електрорушійною силою $\mathcal{E}$=2,23В і потужністю P=5кВт передає електроенергію споживачу по дротяних провідниках з опором R=200Ом. Визначити коефіцієнт корисної дії η лінії передачі (тобто відношення потужності, яка виділяється на споживачі, до потужності генератора). Внутрішнім опором генератора знехтувати.

15.50. Десять паралельно з'єднаних ламп, кожна з яких розрахована на напругу U_1=120В та має опір R=0,5кОм, з'єднані послідовно з реостатом і живляться від електричної мережі напругою U=220В. Визначити потужність електричного струму в реостаті та ККД цієї мережі.

15.51. На якій відстані від генератора з напругою U=750В слід розмістити споживача, розрахованого на 5кВт, щоб утрати потужності в мідному дроті перерізом S=1мм^2 не перевищували 10% потужності споживача?

Тестові завдання

Вибрати вірну відповідь:

1. У загальному випадку означення поняття „сила струму" надає формула:

1. $I=\frac{U}{R}$ 2. $I=\frac{q}{t}$ 3. $I=\frac{dq}{dt}$ 4. $I=\frac{\varepsilon}{R+r}$

2. Векторною характеристикою струму є:

1. сила струму 2. потужність струму
3. густина струму 4. робота струму на ділянці кола

3. Залежність електричного опору провідника від його параметрів та матеріалу надає формула:

1. $R=R_0e^{\frac{\Delta W}{2kT}}$ 2. $R=R_0(1+\alpha t)$ 3. $R=\frac{1}{G}$ 4. $R=\rho\frac{l}{S}$

4. Серед перелічених величин: А) довжина; Б) сила струму; В) матеріал; Г) температура; Д) прикладена напруга; Е) площа перерізу виберіть ті, від яких залежить опір провідника:

1. А), Б), Г), Е) 2. А), В), Г), Д)
3. А), В), Г), Е) 4. А), Б), Г), Д)

5. Залежно від температури а) опір провідника; б) опір напівпровідника

1. прямо пропорційно зростає 2.зменшується за експоненціальним законом
3. обернено пропорційно зменшується 4.зростає за експоненціальним законом

6. Зв'язок між питомим опором провідника та його питомою провідністю надає формула:

1. $\rho=\rho_0(1+\alpha t)$ 2. $\rho=\rho_0\alpha T$ 3. $\rho=R\frac{S}{l}$ 4. $\rho=\frac{1}{\gamma}$

7. **Установити відповідність** між фізичною величиною та одиницями її вимірювання:

1. Сила струму	А. В (вольт)
2. Густина струму	Б. А (ампер)
3. Опір	В. А/м^2
4. Напруга	Г. Ом

8. **Установити відповідність** між фізичною величиною та одиницями її вимірювання:

1. Питомий опір (в одиницях СІ)	А.. Ом·мм^2/м
2. Опір	Б. См (сіменс)
3. Провідність	В. Ом
4. Питомий опір (позасистемна одиниця)	Г. Ом·м

Вибрати вірну відповідь:

9. Залежність електричного опору провідника І-го роду (металу) від температури надає формула:

1. $R = R_0 e^{\frac{\Delta W}{2kT}}$ 2. $R = R_0(1+\alpha t)$ 3. $R = \frac{1}{G}$ 4. $R = \rho\frac{l}{S}$

10. Власна електропровідність напівпровідників зумовлена

1. тільки електронами 2. тільки «дірками»
3. електронами і «дірками» одночасно 4. іонами

11. Означення поняття „густина струму” надає формула:

1. $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ 2. $\vec{j} = en\vec{v}_{др.}$ 3. $\vec{j} = \gamma\left(\vec{E} + \vec{E}_{стор.}\right)$ 4. $j = \frac{dI}{ds_{\perp}}$; $\vec{j} \uparrow\uparrow \vec{v}_{др.}$

12. При послідовному з’єднанні опорів їх загальна провідність:

1. не змінюється 2. зменшується 3. збільшується

13. При послідовному з’єднанні опорів їх загальний опір:

1. дорівнює сумі опорів окремих провідників
2. менше найменшого з опорів окремих провідників
3.не змінюється

14. При паралельному з’єднанням декількох окремих опорів загальний опір утвореної ділянки кола:

1. дорівнює сумі опорів окремих провідників
2. менше найменшого з опорів окремих провідників
3. не змінюється

15. Які з наведених тверджень є справедливими а)при послідовному з’єднанні провідників; б) паралельному з’єднанні провідників?

1. $R = \sum_i R_i$; $I = \sum_i I_i$ 2. $R = \sum_i R_i$; $U = \sum_i U_i$

3. $\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i}$; $I = \sum_i I_i$ 4. $\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i}$; $U = \sum_i U_i$

16. З наведених умов А) $d\varphi = \text{Const}$; Б) $\vec{j} = \text{Const}$; В) $\text{ЕРС} \neq 0$; Г) $I = \text{const}$ умовами підтримки постійного струму у колі є:

1. А) та Б) 2. А) та В) 3. Б) та В) 4. В) та Г)

17. З наведених комбінацій містить величини, що входять до закону Ома у диференціальній формі:

1. I, E, R 2. U, R, j 3. γ, E, j 4. γ, U, j

18. Закон Ома для неоднорідної ділянки кола у диференціальній формі надає формула:

1. $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ 2. $\vec{j} = en\vec{v}_{др.}$ 3. $\vec{j} = \gamma\left(\vec{E} + \vec{E}_{стор.}\right)$ 4. $j = \frac{dI}{ds_{\perp}}$

19. Напруга дорівнює різниці потенціалів на кінцях ділянки у випадку:
1. неоднорідної ділянки кола 2. однорідної ділянки кола 3. повного кола

20. Одиницею вимірювання електрорушійної сили джерела струму в СІ є:
1. А (ампер) 2. В (вольт) 3. В/м 4. Вт (ватт) 5. Ом

21. **Установити відповідність** між формулою та випадком, в якому вона застосовується:

1. Закон Ома для однорідної ділянки кола в інтегральній формі А. $I = \dfrac{\varepsilon}{R+r}$

2. Закон Ома для неоднорідної ділянки кола в інтегральній формі Б.. $I = \dfrac{U}{R}$

3. Закон Ома для повного кола В. $I = \dfrac{\varepsilon_{12} + (\varphi_1 - \varphi_2)}{R_{12}}$

Вибрати вірну відповідь:

22. Електрорушійна сила джерела струму визначається:
1. роботою сил електричного поля по переміщенню одиничного позитивного заряду вздовж усього кола
2. роботою сторонніх сил по переміщенню одиничного позитивного заряду вздовж усього кола
3. сумарною роботою сторонніх та електричних сил по переміщенню одиничного позитивного заряду вздовж усього кола

23. Зв'язок між ЕРС джерела струму та напруженістю поля сторонніх сил надає формула: 1. $\varepsilon = \dfrac{A_{стор.}}{q}$; 2. $\varepsilon = I(R+r)$; 3. $\varepsilon = \oint \vec{E}_{стор.} d\vec{l}$; 4. $U = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}$.

24. Напруга (спад напруги) на ділянці кола визначається:
1. роботою сил електричного поля по переміщенню одиниці позитивного заряду вздовж усього кола
2. роботою сторонніх сил по переміщенню одиниці позитивного заряду вздовж усього кола
3. сумарною роботою сторонніх та електричних сил по переміщенню одиниці позитивного заряду вздовж усього кола

25. Неоднорідною називають ділянку кола, на якій діють:
1. тільки сторонні сили;
2. одночасно сили електричного поля та сторонні сили;
3. тільки сили електричного поля;
4. серед наведених немає вірної відповіді.

26. Напруга на клемах джерела струму в замкненому колі завжди:
1. дорівнює ЕРС джерела; 2. більша за ЕРС джерела; 3. менша за ЕРС джерела;
4.співвідношення цих величин залежить від величини зовнішнього опору кола.

27. І правило Кірхгофа є наслідком:
1. закону збереження енергії; 2. закону збереження імпульсу;
3. закону збереження маси; 4. закону збереження заряду.

28. ІІ правило Кірхгофа є узагальненням:
1. закону Ома для неоднорідної ділянки кола; 2. І правила Кірхгофа;
3. закону Ома для повного кола; 4. закону збереження заряду.

29. Роботу струму на однорідній ділянці кола надає формула:

1. $A = IUt$ 2. $A = I\Delta\Phi$

3. $A = It((\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon)$ 4. $A = \varepsilon It$, де ε –ЕРС джерела струму

30. Закон Джоуля – Ленца у інтегральній формі надає формула:

1. $Q = cm(t_2 - t_1)$ 2. $Q = I^2 Rt$ 3. $Q = \Pi_{\alpha\beta} It$ 4. $dQ = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} dSdt$

31. Потужність струму на однорідній ділянці кола надає формула:

1. $P = F \cdot v$ 2. $P = \frac{A}{t}$ 3. $P = I \cdot \varepsilon$, де ε – ЕРС 4. $P = \frac{U^2}{R}$

32. Означенню поняття „питома потужність струму” відповідає формула:

1. $w = jE$; 2. $w = \frac{dW}{dV \cdot dt}$ 3. $w = \rho j^2$ 4. $w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}$

33. Закон Джоуля – Ленца у диференціальній формі надає формула:

1. $w = \gamma E^2$ 2. $w = \frac{dW}{dV \cdot dt}$ 3. $w = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu}$ 4. $w = \frac{ED}{2}$

34. При нагріванні провідника, якщо напруженість поля підтримується постійною, а зміною геометричних параметрів провідника можна знехтувати, густина струму в ньому:

1. не зміниться 2. зменшиться 3. збільшиться

35. Дротяний провідник (без ізоляції) склали вдвічі і скрутили. Його опір при цьому

1. збільшився вдвічі 2. збільшився в чотири рази

3. зменшився вдвічі 4. зменшився в чотири рази

36. У двох провідниках однакового перерізу за однаковий проміжок часу при однаковому струмі виділилася однакова кількість теплоти. Перший провідник утричі довший за другий ($l_1=3l_2$). Відношення питомих опорів ρ_1 та ρ_2 цих провідників дорівнює:

1. $\rho_1/\rho_2 = 3$ 2. $\rho_1/\rho_2 = \sqrt{3}$ 3. $\rho_1/\rho_2 = \frac{1}{3}$ 4. $\rho_1/\rho_2 = \frac{1}{9}$

37. У двох провідниках однакового перерізу за однаковий проміжок часу при однаковій напрузі виділилася однакова кількість теплоти. Перший провідник утричі довший за другий ($l_1=3l_2$). Відношення питомих опорів ρ_1 та ρ_2 цих провідників дорівнює:

1. $\rho_1/\rho_2 = 3$ 2. $\rho_1/\rho_2 = \sqrt{3}$ 3. $\rho_1/\rho_2 = \frac{1}{3}$ 4. $\rho_1/\rho_2 = \frac{1}{9}$

38. У двох провідниках однакової довжини за однакові проміжки часу при однаковій напрузі виділилось однакова кількість теплоти. Переріз першого провідника удвічі більший за переріз другого ($S_1=2S_2$). Відношення питомих опорів ρ_1 та ρ_2 цих провідників дорівнює:

1. $\frac{\rho_1}{\rho_2} = 2$ 2. $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \sqrt{2}$ 3. $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{1}{2}$ 4. $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{1}{4}$

39. У двох провідниках з різною питомою провідністю γ_1 та γ_2 виділяються однакові питомі потужності струму. Якщо $\gamma_1 = 2\gamma_2$, відношення напруженості електричних полів E_1 і E_2 у цих провідниках дорівнює:

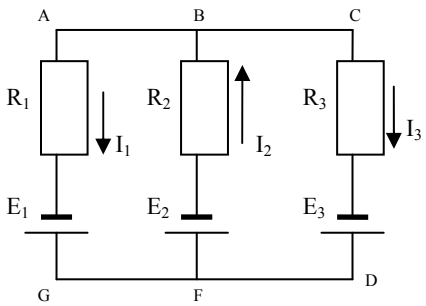
1. $\frac{E_1}{E_2} = 2$ 2. $\frac{E_1}{E_2} = \sqrt{2}$ 3. $\frac{E_1}{E_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 4. $\frac{E_1}{E_2} = \frac{1}{2}$

40. Електрична плитка має дві спіралі однакового опору. Час, необхідний для нагрівання води у чайнику до температури кипіння, буде мінімальним, якщо:

1. увімкнена одна спіраль
2. спіралі ввімкнені послідовно
3. спіралі ввімкнені паралельно

41. Для контуру AGFBA, виділеному в розгалуженому колі, що приведений на схемі, рівняння, яке записане за II правилом Кірхгофа (напрям обходу контуру – проти годинникової стрілки) має вид:

1. $I_1R_1 + I_2R_2 = E_1 + E_2$ 2. $I_1R_1 + I_2R_2 = E_1 - E_2$
3. $I_1R_1 + I_2R_2 = -E_1 + E_2$ 4. $I_1R_1 - I_2R_2 = E_1 - E_2$



42. Для вузла B розгалуженого кола, що наведений на схемі, рівняння, яке записане за I правилом Кірхгофа, має вигляд:

1. $I_1 + I_2 + I_3 = 0$ 2. $-I_1 + I_2 + I_3 = 0$
3. $-I_1 + I_2 - I_3 = 0$ 4. $I_1 + I_2 - I_3 = 0$

43. До амперметра, опір якого R_A= 0,8 Ом, для розширення границі вимірювання паралельно підключений шунт з опором $R_ш$=0,2 Ом. Якщо амперметр показує струм I_A= 1 А, струм у магістралі дорівнює:

1. 2 А 2. 4 А 3. 5 А 4. 8 А

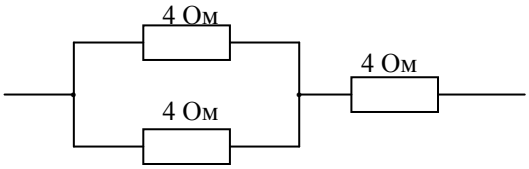
44. До вольтметра, опір якого R_v= 400 Ом, для розширення границі вимірювання послідовно підключений додатковий опір $R_д$=1,6 кОм. Якщо вольтметр показує напругу U_v=20 В, напруга на ділянці кола, до якої підключений вольтметр, дорівнює:

1. 40 В 2. 80 В 3. 100 В 4. 160 В

45. Два провідники однакової довжини та площі перерізу, виготовлені з різних матеріалів і з'єднані послідовно. Якщо відношення питомих опорів провідників $\rho_1/\rho_2 = 2$, для напруги U_1 та U_2 на провідниках справедливо співвідношення

1. U_2=2U_1 2. U_1=2U_2 3. U_1=4U_2 4. U_2=4U_1

46. Загальний опір зображеної на рисунку ділянки кола дорівнює



1. 2 Ом 2. 4 Ом
3. 6 Ом 4. 8 Ом

47. Електричне коло складається з джерела струму з ЕРС 12 В і внутрішнім опором 2 Ом і провідника. Якщо сила струму у колі дорівнює 2 А, електричний опір провідника становить

1. 1 Ом 2. 2 Ом 3. 4 Ом 4. 6 Ом

48. Робота сили струму на ділянці кола за 4 с дорівнює 16 Дж. Якщо напруга на ділянці кола дорівнює 2 В, сила струму у колі дорівнює

1. 8 А 2. 6 А 3. 4 А 4. 2 А 5. 1 А

49. Якщо до амперметра з внутрішнім опором 10 Ом паралельно ввімкнути шунт з опором 1 Ом, показання амперметра

1. зменшаться у 10 разів 2. збільшаться у 10 разів 3. зменшаться у 9 разів
4. зменшаться у 11 разів 5. збільшаться у 11 разів

50. Якщо до вольтметра з внутрішнім опором 100 Ом послідовно ввімкнути додатковий опір 500 Ом, показання вольтметра

1. зменшаться у 5 разів 2. збільшаться у 5 разів 3. зменшаться у 4 рази
4. зменшаться у 6 разів 5. збільшаться у 6 разів

Розділ 16. Електромагнетизм

16.1. Магнітне поле та його характеристики.

Тема: Поле точкового заряду, що рухається. Опис магнітного поля. Магнітне поле струму. Закон Біо-Саварра-Лапласа. Принцип суперпозиції. Сила Ампера. Взаємодія струмів. Сила Лоренца. Рух під впливом сили Лоренца. Властивості магнітного поля. Теорема про циркуляцію.

Основні поняття і формули

● **Магнітостатичне поле.** Будь-який рухомий заряд створює в оточуючому просторі окрім електричного, магнітне поле. Магнітне поле, утворене постійними (стаціонарними) струмами або нерухомими магнітами є магнітостатичним полем. Характеристики такого поля не змінюються з часом.

З іншого боку на будь-який рухомий заряд збоку магнітного поля діє сила.

● **Силовою характеристикою** магнітного поля є **вектор магнітної індукції** $\vec{B}$**.** Визначається через силу, що діє з боку магнітного поля на елемент струму (закон Ампера), на рухомий заряд (сила Лоренца), або за допомогою обертального моменту, що діє з боку магнітного поля на елементарний контур зі струмом.

Допоміжною характеристикою магнітного поля є **вектор напруженості** $\vec{H}$**.** Магнітна індукція $\vec{B}$ зв'язана з напруженістю магнітного поля $\vec{H}$ співвідношенням

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} \qquad (16.1)$$

де μ_0 – магнітна стала; В системі одиниць СІ $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м; $\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$,

де с – швидкість світла у вакуумі.; μ – магнітна проникність середовища; для вакууму $\mu=1$ (для повітря приймають $\mu \approx 1$).

Одиниці вимірювання:

- одиницею вимірювання магнітної індукції у системі одиниць СІ є тесла ($\text{Тл} = \frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}} = \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} = \frac{\text{Вб}}{\text{м}^2}$)**.** В системі одиниць Гауса магнітна індукція вимірюється в гаусах (Гс): 1Тл=10^4 Гс;
- одиницею вимірювання напруженості магнітного поля є А/м.

● **Силова лінія (лінія індукції) магнітного поля** – лінія, дотична до якої в кожній точці співпадає за напрямом з вектором магнітної індукції в цій точці. Лінії магнітного поля завжди замкнені внаслідок вихрового характеру магнітного поля.

● **Вектор індукції магнітного поля точкового заряду**

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q\left[\vec{v} \cdot \vec{r}\right]}{r^3}, \qquad (16.2)$$

де $\vec{v}$ – вектор швидкості заряду; $\vec{r}$ – радіус-вектор, проведений від заряду до точки поля, в якій визначається $\vec{B}$; μ_0 – магнітна стала.

Вектор магнітної індукції $\vec{B}$ перпендикулярний як до вектора швидкості, так і до радіус-вектора.

Силові лінії магнітного поля точкового заряду – концентричні кола з центром у заряду.

● **Елемент лінійного струму**. Якщо електричний струм тече по нескінченно тонкому (у фізичному сенсі) провіднику, цей струм називають лінійним. Добуток лінійного струму на елемент $d\vec{l}$ провідника, по якому тече струм, носить назву елемента лінійного струму – $Id\vec{l}$. Тут вектор $d\vec{l}$ співпадає за напрямом зі струмом в провіднику. Кожний елемент лінійного струму створює магнітостатичне поле.

● **Закон Біо-Савара-Лапласа** визначає магнітну індукцію $d\vec{B}$ поля, створеного елементом dl лінійного струму I :

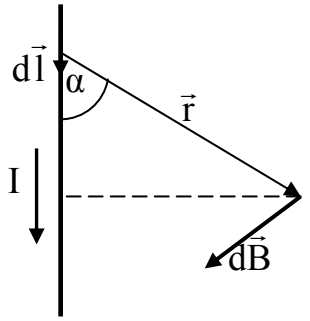


Рис.16.1

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0\mu}{4\pi} \cdot \frac{I\left[d\vec{l} \cdot \vec{r}\right]}{r^3} \qquad (16.3)$$

або

$$dB = \frac{\mu_0\mu I \sin\alpha}{4\pi r^2} \cdot dl, \qquad (16.4)$$

де $d\vec{B}$ – магнітна індукція поля, яке утворює елемент провідника $d\vec{l}$ зі струмом I; $\vec{r}$ – радіус-вектор, проведений від цього елемента провідника до точки, що розглядається; α – кут між радіусом-вектором і напрямком струму у даному елементі (рис.16.1).

Тоді для магнітної індукції поля лінійного провідника кінцевої довжини за принципом суперпозиції полів

$$\vec{B} = \int_L d\vec{B} = \int_L \frac{\mu_0\mu}{4\pi} \cdot \frac{I\left[d\vec{l} \cdot \vec{r}\right]}{r^3}. \qquad (16.5)$$

● **Принцип суперпозиції:** вектор індукції магнітного поля, створеного декількома джерелами, дорівнює векторній сумі магнітних індукцій, створених кожним із джерел поля при відсутності інших.

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{N} \vec{B}_i. \qquad (16.6)$$

● **Магнітна індукція полів**, створених провідниками різної конфігурації, знаходиться інтегруванням формули (16.5):

а) Індукція магнітного поля прямолінійного відрізку MN провідника зі струмом I в точці A, положення якої визначається кутами α_1 і α_2 та відстанню r_0 від точки до провідника (рис.16.2):

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi r_0}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right). \quad (16.7)$$

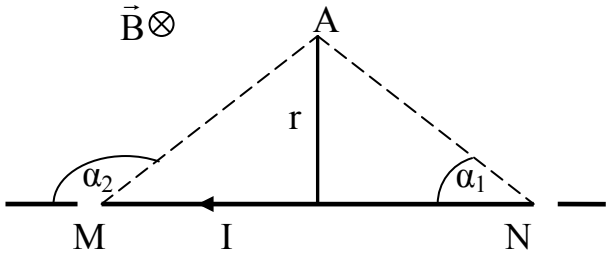


Рис.16.2

б) Поле прямого нескінченного провідника зі струмом I на відстані r_0 від нього (тобто при $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = \pi$ у формулі (16.7)):

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi r_0}. \quad (16.8)$$

Силові лінії магнітного поля – концентричні кола, центри яких лежать на провіднику.

в) Магнітне поле на осі колового струму радіуса R на відстані z від центра

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{2}\frac{R^2 I}{(z^2 + R^2)^{3/2}}, \quad (16.9)$$

звідки у центрі кола (z = 0)

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2R}. \quad (16.10)$$

Вектор магнітної індукції в центрі кола і точках на його осі направлений вздовж осі і його напрям зв'язаний з напрямом струму правилом правого свердлика.

Магнітна індукція в центрі дуги кола довжиною L, по якій тече струм I:

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi}\frac{IL}{R^2}, \quad \text{де R – радіус кола.} \quad (16.10а)$$

Контур зі струмом можна охарактеризувати магнітним моментом $\vec{p}_m$

Магнітний момент $\vec{p}_m$ плоского контуру, якого обтікає струм I, дорівнює

$$\vec{p}_m = I\vec{S} = IS\vec{n}, \quad (16.11)$$

де $\vec{S}$ – вектор, який чисельно дорівнює площі, обмеженій контуром; напрям цього вектора співпадає з додатним напрямом нормалі $\vec{n}$ до площини контуру і зв'язаний з напрямом струму у контурі правилом правого свердлика.

З використанням магнітного моменту магнітну індукцію поля колового струму на його осі (16.9) можна представити так:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{2\vec{p}_m}{\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}}. \quad (16.9а)$$

г) Вектор індукції магнітного поля соленоїда довжиною L з N витками направлений вздовж його вісі.

$$B = \mu\mu_0 nI \qquad (16.12)$$

де n – кількість витків на одиницю довжини, тобто n = N/L.

Поле майже все сконцентровано всередині соленоїда, є однорідним і його лінії магнітної індукції усередині соленоїда – паралельні прямі.

д) Магнітний диполь: якщо відстань r від точки ,в якій розглядається магнітне поле, набагато більша за лінійні розміри ***l*** області, в якій існує електричний струм, такий контур називають магнітним диполем. Вектор індукції магнітного поля диполя:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3(\vec{p}_m\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}_m}{r^3}\right). \qquad (16.13)$$

Якщо вектора $\vec{r}$ співпадає за напрямом з вектором $\vec{p}_m$, то $(\vec{p}_m\vec{r})\vec{r} = \vec{p}_m r^2$ і індукція магнітного поля на осі диполя має вигляд

$$\vec{B} = \frac{\mu_0\vec{p}_m}{2\pi r^3}. \qquad (16.13а)$$

● **Сила Лоренца.** На рухомий заряд q в електричному та магнітному полях діє сила Лоренца, що складається з двох компонент – електричної та магнітної сили:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\left[\vec{v}\cdot\vec{B}\right], \qquad (16.14)$$

де $\vec{v}$ – швидкість заряду.

За дією сили Лоренца на заряди можна, у принципі, визначити модулі та напрямок векторів напруженості електричного поля $\vec{E}$ та магнітної індукції $\vec{B}$ магнітного поля. Тому вираз для сили Лоренца можна розглядати як визначення характеристик електричного та магнітного полів.

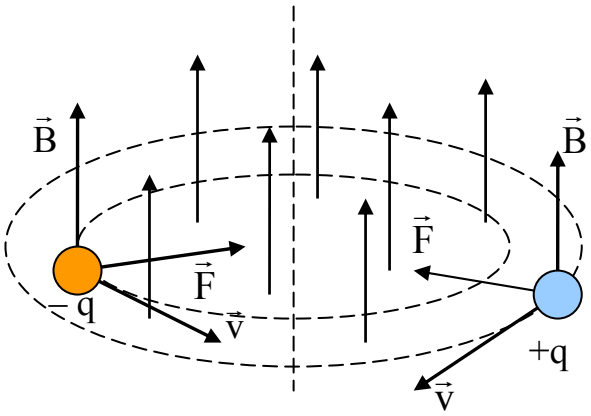


Рис. 16.3

Якщо електричне поле відсутнє, на частинку діє тільки магнітна складова, її теж зазвичай називають силою Лоренца

$$\vec{F} = q\left[\vec{v}\cdot\vec{B}\right], \text{ або } F = qvB\sin\alpha, \qquad (16.15)$$

де α – кут між напрямками швидкості частинки і індукцією магнітного поля.

Напрям сили визначається за правилом свердлика або лівої руки і залежить від знаку заряду (у випадку негативного заряду знайдений за

означеними правилами напрям слід змінити на протилежний (рис. 16.3)). З властивостей векторного добутку витікає, що сила Лоренца завжди перпендикулярна до вектора швидкості $\vec{v}$ і вектора магнітної індукції $\vec{B}$. Тому потужність P і робота A сили Лоренца завжди дорівнюють нулю:

$$P = Fv\sin\frac{\pi}{2} = 0;$$

$$A = \int Pdt = 0.$$

Звідси випливає, що дія сили Лоренца не приводить до зміни кінетичної енергії і модуля швидкості зарядженої частинки, вона змінює тільки траєкторію руху. Отже, змінювати енергію заряджених частинок можна лише за допомогою електричного поля.

Прискорення, якого надає зарядженій частинці сила Лоренца, є доцентровим (нормальним) прискоренням і при відсутності дії інших сил заряджена частинка рухається по колу або гвинтовій лінії.

● **Закон Ампера** визначає силу, що діє на елемент лінійного струму $Id\vec{l}$ з боку магнітного поля з магнітною індукцією $\vec{B}$:

$$d\vec{F} = I\left[d\vec{l}\cdot\vec{B}\right], \qquad (16.16)$$

Сила є перпендикулярною до площини, в якій лежать вектори $\vec{B}$ і $d\vec{l}$ (рис. 16.4), а її напрям визначається за правилом правого свердлика або лівої руки, її величина дорівнює

$$dF = IBdl\sin\alpha, \qquad (16.17)$$

де α – кут між напрямком струму і вектором $\vec{B}$.

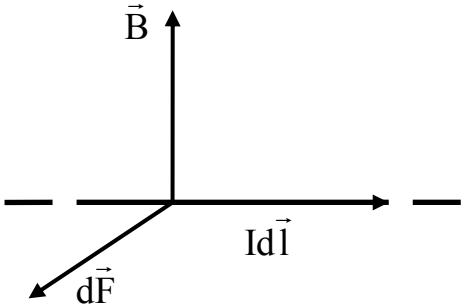


Рис. 16.4

Якщо прямолінійний провідник довжиною l знаходиться в однорідному магнітному полі під кутом α до вектора $\vec{B}$, то рівнодійну силу визначають за формулою

$$\vec{F} = I\left[\vec{l}\cdot\vec{B}\right]. \qquad (16.18)$$

В інших випадках сила, що діє на весь провідник, знаходиться інтегруванням виразу (16.16) з урахуванням зміни величин, що входять до неї.

$$\vec{F} = I\oint_L\left[d\vec{l},\vec{B}\right]. \qquad (16.19)$$

Оскільки струм утворює біля себе магнітне поле, то на інший струм у цьому полі буде діяти сила Ампера, тобто струми взаємодіють. На одиницю довжини прямого провідника зі струмом I_1 з боку прямого струму I_2, що знаходиться у вакуумі на відстані b від першого, діє сила

$$f = \frac{dF}{dl} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I_1I_2}{b}. \qquad (16.20)$$

Можна показати, що однаково направлені струми притягуються, а протилежно – відштовхуються.

Саме на основі магнітної взаємодії двох провідників зі струмами дається означення одиниці вимірювання струму – 1 ампер (А).

Струм в **один ампер** – це такий струм, який при проходженні по двох паралельних провідниках, які розташовані в вакуумі на відстані 1м один від одного викликає силу взаємодії між ними $2\cdot10^{-7}$ Н на кожний метр довжини.

● На контур зі струмом в магнітному полі також діє сила Ампера. Внаслідок дії сил Ампера на окремі ділянки контуру виникає момент сил , який повертає магнітний момент контуру у зовнішньому магнітному полі. У випадку однорідного поля на контур буде діяти **обертальний момент** $\vec{M}$, який дорівнює

$$\vec{M} = \left[\vec{p}_m\vec{B}\right], \qquad (16.21)$$

або

$$M = p_m B\sin\alpha, \qquad (16.22)$$

де $\vec{p}_m$ – магнітний момент контуру , α – кут між векторами $\vec{p}_m$ і $\vec{B}$.

. Робота сил Ампера при повороті контуру зі струмом дорівнює зміні потенціальної енергії. Цю частину потенціальної енергії контуру зі струмом можна розрахувати за формулою:

$$W_p = -\vec{p}_m\vec{B}. \qquad (16.23)$$

● **Теорема про циркуляцію вектора магнітної індукції** в інтегральній формі (закон повного струму): циркуляція вектора магнітної індукції у вакуумі уздовж довільного замкненого контуру L дорівнює добутку магнітної сталої на алгебраїчну суму струмів, які охоплюються цим контуром:

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_L. \qquad (16.24)$$

При неперервному розподілі струмів суму можна записати через густину струмів $\vec{j}$:

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0\int_S \vec{j}d\vec{S}. \qquad (16.25)$$

Електричний струм вважають додатним, коли його напрямок пов’язаний з напрямом обходу контуру правилом правої руки. Струм протилежного напрямку вважається від’ємним.

● **Потік вектора магнітної індукції** (магнітний потік) крізь поверхню S визначається інтегралом

$$\Phi_B = \int_S \vec{B}d\vec{S} = \int_S B_n dS, \qquad (16.26)$$

де $B_n = BdS\cos\alpha$ – нормальна складова вектора $\vec{B}$, α – кут між вектором $\vec{B}$ і нормаллю $\vec{n}$ до елемента площини $d\vec{S}$.

У разі плоского контуру площиною S в однорідному полі магнітний потік крізь нього надає формула

$$\Phi_B = B \cdot S\cos\alpha = B_n S. \qquad (16.27)$$

Одиниця вимірювання магнітного потоку в системі одиниць СІ – вебер (Вб).

$[\text{Вб}] = [\text{Тл} \cdot \text{м}]^2 = [\text{В} \cdot \text{с}]$.

Повний магнітний потік (потокозчеплення) крізь соленоїд або тороїд

$$\Psi = N\Phi_B, \qquad (16.28)$$

де Ф – потік через один виток, N – кількість витків соленоїда або тороїда, що щільно прилягають один до одного.

Теорема Гауса для вектора магнітної індукції: потік вектора магнітної індукції крізь замкнену поверхню дорівнює нулю.

$$\oint \vec{B}d\vec{S} = 0. \qquad (16.29)$$

Теореми про циркуляцію вектора магнітної індукції і теорема Гауса відображають вихровий характер магнітного поля та відсутність джерел і стоків.

● Робота переміщення провідника зі струмом I у магнітному полі дорівнює

$$A = I\Delta\Phi_B, \qquad (16.30)$$

де $\Delta\Phi_B$ – магнітний потік, який провідник перетинає в процесі свого руху.

Робота сил магнітного поля по переміщенню замкненого контуру з постійним струмом I дорівнює

$$A = I\Delta\Phi_B, \qquad (16.31)$$

де $\Delta\Phi_B$ – зміна магнітного потоку крізь поверхню, обмежену контуром.

16.2. Електромагнітна індукція

Тема: Електромагнітна індукція. Закон Фарадея. Індуктивність. Взаємна індуктивність.

Основні поняття і формули

● **Закон Фарадея** (основний закон електромагнітної індукції): при будь-якій зміні магнітного потоку крізь контур в ньому виникає електрорушійна сила індукції, пропорційна швидкості зміни магнітного потоку:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad (16.32)$$

де $\mathcal{E}_i$ – електрорушійна сила індукції (ЕРС).

Знак "–" означає: при зміні магнітного потоку крізь поверхню, що спирається на замкнений контур, в якому протікає струм, у контурі

виникає індукційний струм такого напрямку, що його магнітне поле протидіє зміні магнітного потоку (**правило Ленца**).

Зміна магнітного потоку може спричинятись двома різними причинами, які можуть діяти і сумісно:

1) Вектор магнітної індукції $\vec{B}$ є постійним за величиною і напрямком, а $\Phi_B(t)$ змінюється за рахунок руху провідників, наприклад, деформації провідного контуру або зміни його орієнтації відносно вектора $\vec{B}$.

2) Провідний контур нерухомий, а $\Phi_B(t)$ змінюється за рахунок зміни величини і напряму $\vec{B}(t)$.

У першому випадку ЕРС індукції виникає завдяки магнітній складовій сили Лоренца, яка діє на заряди, що рухаються разом з провідником.

В цьому випадку ЕРС індукції визначається формулою

$$\mathcal{E}_i = \frac{A}{q} = \frac{1}{q}\oint_L \vec{F}d\vec{l} = \oint_L \left[\vec{v}\vec{B}\right]d\vec{l} \qquad (16.33)$$

Якщо окрема лінійна провідна ділянка контуру (провідник) рухається в однорідному магнітному полі, величина ЕРС індукції, що виникає в ній дорівнює

$$\mathcal{E}_i = Blv\sin\alpha. \qquad (16.34)$$

Тут l – довжина провідника, v – швидкість руху провідника, α – кут між векторами $\vec{v}$ і $\vec{B}$.

У другому випадку ЕРС індукції зумовлена роботою сил вихрового електричного поля напруженістю $\vec{E}_{\text{âèõð.}}$, яке виникає в просторі при зміні магнітного поля $\vec{B}(t)$. На відміну від електростатичного поля, поле $\vec{E}_{\text{âèõð.}}$ не є потенціальним.

Величина ЕРС індукції в замкненому контурі L, спричинена вихровим електричним полем, може бути представлена у вигляді

$$\mathcal{E}_i = \oint_L \vec{E}_{\text{вихр.}}d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}d\vec{S} = -\frac{d\Phi_B}{dt}, \qquad (16.35)$$

де $\Phi_B = \int_S \vec{B}d\vec{S}$ – потік вектора магнітної індукції крізь будь-яку поверхню S, яка обмежена контуром.

У більшості випадків формули (16.33) і (16.35) об’єднують у вигляді одного закону Фарадея-Ленца (16.32). Таке формулювання є найбільш загальним, оскільки описує обидва варіанти виникнення ЕРС.

● Заряд Q, який протікає у контурі опором R при зміні магнітного потоку крізь контур на величину $\Delta\Phi_B$, може бути знайдений за формулою

$$q = \frac{\Delta\Phi_B}{R}. \qquad (16.36)$$

● **Індуктивність лінійного провідного контуру** L (коефіцієнт самоіндукції) – коефіцієнт пропорційності між силою струму I у контурі і магнітним потоком $\Phi_B(t)$, який цей струм створює крізь поверхню, що спирається на цей контур.

$$\Phi_B = LI. \qquad (16.37)$$

Індуктивність є додатною величиною; її значення у вакуумі залежить тільки від геометричних властивостей (форми і розмірів) контуру; якщо контур знаходиться у середовищі – ще й від магнітних властивостей середовища, тобто магнітної проникності μ. Одиницею вимірювання індуктивності в системі одиниць СІ є генрі (Гн); (Гн = $\frac{В \cdot с}{А}$).

Індуктивність L довгого соленоїда або тороїда пропорційна квадрату числа витків n на одиницю довжини соленоїда (тороїда), а також об'єму L соленоїда

$$L = \mu_0 \mu n^2 V = \mu_0 \mu \frac{N^2}{l} S, \qquad (16.38)$$

де N – загальна кількість витків, l – довжина соленоїда (або середньої лінії тороїда), μ – магнітна проникність осереддя соленоїда (тороїда), яка залежить від напруженості H магнітного поля.

● **ЕРС самоіндукції,** яка виникає у замкненому контурі при зміні сили струму в ньому, пропорційна швидкості зміни струму $\frac{dI}{dt}$:

$$\mathcal{E}_{si} = -L\frac{dI}{dt}. \qquad (16.39)$$

Внаслідок явища самоіндукції струм у колі з опором R і індуктивністю L змінюється наступним чином:

1) при розмиканні кола спадає за законом $I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$, (16.40)

де I_0 – струм у колі у момент вимикання при t=0, t – час, який пройшов з моменту розмикання;

2) при замиканні кола струм зростає за законом

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right), \qquad (16.41)$$

де $\mathcal{E}$ – ЕРС джерела струму, t – час після замикання кола.

● **Коефіцієнт взаємної індукції (**взаємна індуктивність) лінійних контурів L_{ji} – коефіцієнт пропорційності між магнітним потоком Φ_j, створеним у j-му контурі магнітним полем від струму I_i, який протікає по i-му контуру:

$$\Phi_j = L_{ji} I_i. \qquad (16.42)$$

Величина L_{ji} визначається формою, розмірами та взаємним розташуванням контурів. У вакуумі та середовищах з лінійною магнітною сприйнятливістю (діа- та парамагнетики) коефіцієнти взаємної індукції є симетричними за індексами:

$$L_{ji} = L_{ij}. \qquad (16.43)$$

ЕРС взаємної індукції задовольняє співвідношенню

$$\mathcal{E}_j = -L_{ji}\frac{dI_i}{dt} \qquad (16.44)$$

16.3. Змінний струм

Тема: Закон Ома для кола змінного струму. Активний та реактивний опір. Потужність змінного струму.

При зміні електричного поля в контурі змінюється його магнітне поле, що приводить до виникнення ЕРС самоіндукції $\mathcal{E}_{si}$. У відсутності феромагнітних матеріалів відповідна електрорушійна сила самоіндукції розраховується за формулою (16.39):

$$\mathcal{E}_{si} = -L\frac{dI}{dt}, \quad \text{де L – індуктивність контуру.}$$

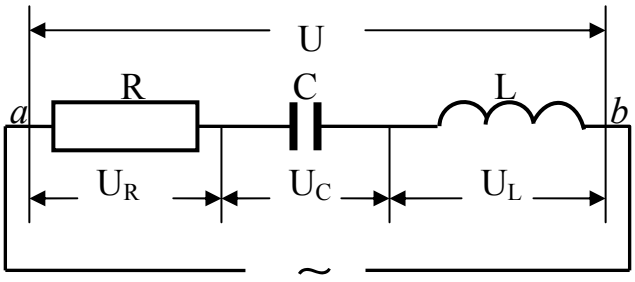


Рис. 16.5

Тоді закон Ома для замкнутого кола, яке містить послідовно з'єднані котушку індуктивності L, конденсатор електроємністю C, резистор опором R та джерело ЕРС $\mathcal{E}(t)$ (рис. 16.5) приймає вигляд

$$L\frac{dI}{dt} + IR + \frac{q}{C} = \mathcal{E}(t) \qquad (16.45а)$$

або

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = \mathcal{E}(t) \qquad (16.45б)$$

Розв'язок цього диференціального рівняння залежить від параметрів контуру L, R, C та величини діючої електрорушійної сили $\mathcal{E}(t)$.

Електричний струм, що виникає під дією ЕРС, яка змінюється за синусоїдальним законом $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_M \sin\omega t$ (16.46), за звичаєм носить назву

змінного струму. Саме така електрорушійна сила утворюється у генераторі змінного струму. У цьому разі величина струму у всіх послідовно з'єднаних елементах кола (рис. 16.5) однакова і змінюється за законом

$$I = I_M \sin \omega t, \qquad (16.47)$$

де I_M – максимальне (амплітудне) значення струму, ω – циклічна частота коливань напруги і струму у колі.

Напруга на кожному з елементів кола дорівнює, відповідно:

$$U_R = IR = I_M R \sin \omega t; \qquad (16.48а)$$

$$U_C = \frac{q}{C} = -\frac{I_M}{\omega C}\cos \omega t = \frac{I_M}{\omega C}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = I_M X_C \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right); \qquad (16.48б)$$

$$U_L = I_M \omega L \cos \omega t = I_M \omega L \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = I_M X_L \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \qquad (16.48в)$$

Тут $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$ – ємнісний опір; (16.49)

$X_L = \omega L$ – індуктивний опір. (16.50)

Сумарна напруга на ділянці *ab* дорівнює сумі напруг (16.48а) – (16.48в).

Оскільки напруги відрізняються за фазою, для їх додавання зручно скористатися методом векторних зображень, який наведено на діаграмі рис. 16.6. Користуючись теоремою Піфагора отримуємо:

$$U_M = I_M \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}.$$

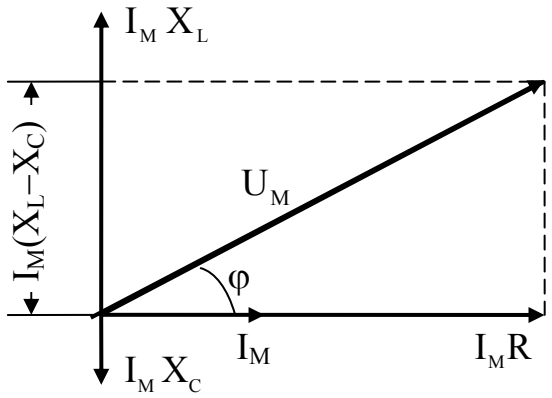


Рис. 16.6

Амплітуди коливань струму і напруги зв'язані співвідношенням (16.51), яке носить назву закону Ома для кола змінного струму:

$$I_M = \frac{U_M}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}, \qquad (16.51)$$

де $Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2}$ (16.52)

– повний опір кола змінного струму, R – активна складова опору, $X = L\omega - \dfrac{1}{C\omega}$ – реактивна складова.

Закон Ома справедливий також для ефективних або діючих значень струму $I_{еф}$ та напруги $U_{еф}$, які пов'язані з відповідними амплітудними значеннями за допомогою наступних співвідношень:

$$I_{еф}=\frac{I_0}{\sqrt{2}}; \qquad U=\frac{U_0}{\sqrt{2}} . \tag{16.53}$$

$$I_{еф}=\frac{U_{еф}}{Z}. \quad \text{де Z – повний опір кола.} \tag{16.54}$$

Ефективне або діюче значення струму $I_{еф}$ – значення постійного струму, якому за тепловою дією еквівалентний змінний струм з амплітудою I_M. Аналогічно визначається поняття ефективної або діючої напруги $U_{еф}$.

Зсув фаз між напругою і силою струму визначається співвідношенням, яке отримуємо з векторної діаграми (рис. 16.6):

$$tg\varphi=\frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R}. \tag{16.55}$$

Потужність змінного струму визначається за наступною формулою:

$$P=I_{еф}U_{еф}\cos\varphi, \tag{16.56}$$

де множник $\cos\varphi=\frac{R}{Z}=\frac{R}{\sqrt{R^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2}}$ (16.57) носить назву коефіцієнту потужності. Коефіцієнт потужності виграє важливу роль в електротехніці при розгляді задач про ефективність передачі енергії від генератора до користувача.

16.4. Магнітне поле у речовині. Енергія магнітного поля

Тема: Класифікація речовин за магнітними властивостями. Поле у речовині. Магнітна сприйнятливість, проникність. Феромагнетики. Енергія магнітного поля.

Основні поняття і формули

● Для характеристики поведінки речовини у магнітному полі вводять **намагніченість** $\vec{J}$**,** яка дорівнює магнітному моменту одиниці об'єму:

$$\vec{J}=\frac{1}{\Delta V}\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_{mi}, \tag{16.58}$$

де N – кількість частинок у фізично нескінченно малому об'ємі ΔV, $\vec{p}_{mi}$ – магнітний момент і-ої молекули.

У парамагнетиків і феромагнетиків вектор намагніченості спрямований вздовж вектора магнітної індукції поля, у діамагнетиків – проти нього.

Зв'язок між векторами намагніченості $\vec{J}$, магнітної індукції $\vec{B}$ та напруженості $\vec{H}$ надають т. з. матеріальні співвідношення

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}; \qquad (16.59)$$

$$\vec{J} = \chi\mu_0\vec{H}; \qquad (16.60)$$

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}. \qquad (16.1)$$

Тут χ – магнітна сприйнятливість речовини; μ – відносна магнітна проникність.

$$\mu = 1 + \chi. \qquad (16.61)$$

$$\mu = \frac{\vec{B}_0}{\vec{B}}, \qquad (16.62)$$

Відносна магнітна проникність показує, у скільки разів магнітна індукція $\vec{B}$ поля у речовині відрізняється від магнітної індукції $\vec{B}_0$ у вакуумі.

Для більшості речовин μ мало відрізняється від одиниці:
– для парамагнетиків $\chi > 0$, значення лежать у межах від 10^{-5} до 10^{-3}; $\mu > 1$;
– для діамагнетиків $\chi < 0$, а $\mu < 1$. За абсолютною величиною χ дуже мала ($|\chi| \approx 10^{-6}$).

Феромагнетики – сильно магнітні речовини ($\chi >> 1; \mu >> 1$), властивості пояснюються доменною структурою. Феромагнетики відрізняють такі, нехарактерні для інших магнетиків, особливості:

1. дуже великі значення магнітної проникності – до десятків тисяч;
2. залежність μ від зовнішнього магнітного поля;
3. залишкова намагніченість у відсутності зовнішнього магнітного поля;
4. неоднозначна залежність $\vec{B}$ та $\vec{J}$ від $\vec{H}$; відповідне явище задовольняє так званому закону гістерезису;
5. відповідні криві утворюють петлі гістерезису;
6. кожний феромагнетик має температуру, вище якої він перетворюється на звичайний парамагнетик. Її називають температурою Кюрі.

● **Енергія магнітного поля** лінійного контуру зі струмом

$$W = \frac{1}{2}\Phi I = \frac{1}{2}LI^2. \qquad (16.63)$$

Енергія магнітного поля системи контурів зі струмами

$$W = \frac{1}{2}\sum_{j,i} L_{ji} I_j I_i = \frac{1}{2}\sum_{j,i} L_i I_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{\substack{j,i \\ j \neq i}} L_{ji} I_j I_i \qquad (16.64)$$

Перший доданок у формулі (16.64) завжди додатний, другий може бути як додатним, так і від'ємним, але повна енергія є завжди додатною.

Об'ємна густина енергії магнітного поля дорівнює

$$w_B = \frac{1}{2}BH = \frac{B^2}{2\mu_0\mu} = \frac{\mu_0\mu H^2}{2}. \qquad (16.65)$$

Енергія поля в об'ємі V

$$W = \int_V w_B dV. \qquad (16.66)$$

16.5. Рівняння Максвелла

Тема: Система рівнянь Максвелла в інтегральній та диференціальній формах. Матеріальні співвідношення та крайові умови для векторних характеристик електричного та магнітного полів.

Усю сукупність інформації відносно електричних та магнітних полів і їх зв'язку між собою можна виразити у стислій формі рівняннями Максвелла, які утворюються із законів, що описують ці поля. Із закону Фарадея; закону повного струму з врахуванням не тільки густини струму провідності, а й струму зміщення, тобто змінного електричного поля; із теорем Гауса для потоків електричного та магнітного полів утворюється система рівнянь Максвелла в інтегральній формі, яка у Міжнародній системі одиниць (СІ) має вигляд:

$$\begin{cases} \oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\int_S \frac{d\vec{B}}{dt}d\vec{S}; & (16.67) \\ \oint_L \vec{H}d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)d\vec{S}; & (16.68) \\ \oint_S \vec{D}d\vec{S} = \int_V \rho dV; & (16.69) \\ \oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0. & (16.70) \end{cases}$$

Рівняння Максвелла у інтегральній формі пов'язують значення характеристик електричних та магнітних полів на уявному контурі та поверхні, яка натягнута на нього. Щоб отримати зв'язок між значеннями цих величин у довільній точці, треба за допомогою теореми Остроградського (15а) та теореми Стокса (16а) перейти до диференціальної форми рівнянь, яка має вигляд:

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}; & (16.67a) \\ \mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}; & (16.68a) \\ \mathrm{div}\vec{D} = \rho; & (16.69a) \\ \mathrm{div}\vec{B} = 0. & (16.70a) \end{cases}$$

Розглянемо фізичний зміст рівнянь Максвелла.

Перше рівняння виражає закон електромагнітної індукції Фарадея : вихрове електричне поле створюється змінним в часі магнітним полем. Якщо магнітне поле постійне (або відсутнє), то електричне поле стає безвихровим або потенціальним.

Друге з наведених рівнянь містить твердження, що вихрове магнітне поле створюється струмом провідності та струмом зміщення, тобто змінним електричним полем. Запис того ж рівняння в інтегральній формі – закон повного струму з урахуванням струму зміщення $I_{зм}=\int_S \vec{j}_{çi}\, d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}$.

Третє рівняння – теорема Остроградського - Гауса для електричного поля, стверджує, що витоками і стоками електричного поля є електричні заряди.

Нарешті, **четверте**, останнє з рівнянь, узагальнює факт відсутності магнітних зарядів, тобто витоків та стоків магнітного поля, завдяки чому магнітні силові лінії завжди замкнені, а потік вектора $\vec{B}$ через будь-яку замкнуту поверхню дорівнює нулю.

Рівняння Максвелла несиметричні відносно електричного і магнітного полів: в природі існують електричні заряди та струми, але немає магнітних зарядів та магнітних струмів.

Наведені вище чотири рівняння Максвелла не складають повну (замкнену) систему рівнянь електромагнітного поля, оскільки не містять властивостей середовища, в якому збуджується електромагнітне поле. Систему доповнюють, так звані, матеріальні співвідношення, які ураховують індивідуальні властивості середовища і зв'язують $\vec{B}$ і $\vec{H}$ та $\vec{D}$ і $\vec{E}$, а також густину струму $\vec{j}$ з напруженістю поля $\vec{E}$.

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}; \quad \vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}; \quad \vec{j} = \gamma\vec{E} \qquad (16.71)$$

Відповідні величини полів також мають задовольняти початковим та крайовими умовам. та ще й початковими та крайовими умовами.

Для векторів $\vec{D}$ та $\vec{E}$ на межі поділу двох діелектриків з діелектричними проникностями ε_1 і ε_2, а також векторів $\vec{H}$ і $\vec{B}$ на межі поділу двох магнетиків з магнітними проникностями μ_1 і μ_2 у випадку, коли на цій межі відсутні вільні заряди (або, відповідно, струми провідності), ці умови для нормальних і тангенціальних складових мають наступний вигляд:

$$
\begin{aligned}
&D_{n1} = D_{n2}; && B_{n1} = B_{n2};\\
&\varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2}; && \mu_1 H_{n1} = \mu_2 H_{n2};\\
&E_{\tau 1} = E_{\tau 2}; && H_{\tau 1} = H_{\tau 2};\\
&\frac{D_{\tau 1}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{\tau 2}}{\varepsilon_2}; && \frac{B_{\tau 1}}{\mu_1} = \frac{B_{\tau 2}}{\mu_2}.
\end{aligned}
\qquad (16.72)
$$

Рівняння Максвелла у диференціальній формі дозволяють отримати рівняння електромагнітної хвилі, визначити її властивості, а також швидкість її розповсюдження.

Методичні вказівки

1. Задачі з електромагнетизму на розрахунок магнітної індукції $\vec{B}$ поля, створеного струмом довільної конфігурації, розв'язують за допомогою закону Біо-Савара-Лапласа (16.3), (16.4) та принципу суперпозиції магнітних полів (16.5) $\vec{B}=\int_L d\vec{B}$ шляхом інтегрування вздовж усього провідника.

Якщо поле утворюється декількома провідниками зі струмом, то також застосовують принцип суперпозиції (16.6) $\vec{B} = \sum_{i=1}^{N} \vec{B}_i$, додаючи магнітні індукції полів окремих провідників.

Для застосування принципу суперпозиції необхідно знати напрями векторів $d\vec{B}$ або $\vec{B}_i$, які додаються. Відповідні розрахунки особливо спрощуються у деяких конкретних випадках, наприклад:

а) якщо провідник зі струмом і точка, в якій розраховується вектор $\vec{B}$ лежать в одній площині, то всі елементарні вектори $d\vec{B}$, які за законом Біо-Савара-Лапласа перпендикулярні до площини, що містить вектори $\vec{r}$ і $d\vec{l}$, мають однаковий напрям. Тоді геометричне додавання замінюється на алгебраїчне;

б) якщо магнітне поле має осьову симетрію, то в точках, які лежать на цій осі, вектор $\vec{B}$ направлений вздовж осі і його величина визначається інтегралом:

$$B = \int_L dB_z ,$$

де dB_z – складова вектора $d\vec{B}$ вздовж осі симетрії поля.

2. Теорема про циркуляцію вектора магнітної індукції (16.24) і (16.25) спрощує розрахунки магнітних полів з певною симетрією. При виборі замкненого контуру інтегрування L необхідно дотримуватися наступних рекомендацій:

1) точка, в якій визначається магнітна індукція, повинна належати контуру L;

2) внаслідок симетрії скалярний добуток $\vec{B}d\vec{l}$ вздовж ділянок контуру повинен бути постійним або на окремих ділянках навіть дорівнювати нулю.

Якщо обраний замкнений контур L співпадає з лінією магнітної індукції, то в усіх його точках B=const, а для всіх елементів контуру $\cos\left(\vec{B},d\vec{l}\right)=1$, і рівняння (16.24) набуває простого вигляду $BL=\mu_0\mu\sum_i I_i$ (16.24а).

3. Сила, яка діє на провідник зі струмом з боку заданого магнітного поля, у загальному випадку визначається тільки інтегруванням виразу для сили $d\vec{F}$, що діє за законом Ампера на елемент струму, з урахуванням напрямів векторів $d\vec{F}$ (16.19). Більш простий вираз (16.16) може використовуватися тільки для прямолінійного провідника в однорідному магнітному полі.

Якщо в задачі розглядається замкнений контур, то розрізняють два випадки:

1) магнітне поле однорідне. Тоді на контур зі струмом діє обертальний момент (див. формули (16.21), (16.22)), під дією якого контур повертається так, що кут α між векторами $\vec{p}_m$ і $\vec{B}$ зменшується. При α=0 настає стійка рівновага контуру в магнітному полі;

2) у неоднорідному полі на контур зі струмом окрім обертального моменту діє сила

$$F=p_m\frac{\partial B}{\partial x}\cos\left(\vec{p}_m,\vec{B}\right), \qquad (16.73)$$

де x – напрям найбільш швидкої зміни величини B. (Формула справедлива для невеликих за розміром контурів у полі, в якому напрями осі x і вектора $\vec{B}$ співпадають.)

4. При розв'язуванні задач на дослідження руху заряджених частинок в електричному та магнітному полі перш за все необхідно з'ясувати класичною чи релятивістською слід вважати частинку. Частинку називають класичною, якщо її швидкість набагато менша за швидкість світла у вакуумі ($v<<c$); у протилежному випадку частинка має назву релятивістської. Якщо відомою величиною є імпульс частинки p або її кінетична енергія T, то умови, за якими частинку вважають класичною, мають вигляд: $p<<mc$ або $T<<mc^2$, де mc^2– енергія спокою частинки (наприклад, для електрона mc^2=0,511МеВ).

1) Задачі на рух класичних заряджених частинок розв'язуються за законами класичної механіки, різниця полягає лише у природі сил, які діють на частинку. Для розв'язання задачі у більшості випадків необхідно записати за другим законом Ньютона рівняння руху частинки у векторній

формі, підставивши в нього у якості сили вираз (16.15) для сили Лоренца. Слід зауважити, що, хоча, за звичаєм, частинка, яка рухається в електромагнітному полі, знаходиться також у гравітаційному полі Землі, розрахунки показують, що силою тяжіння можна знехтувати навіть для слабких електричних та магнітних полів.

При переході до скалярної форми запису рівняння руху, перш за все, необхідно визначити напрям сил, які діють на частинку, ураховуючи знак зарядженої частинки. Для негативно заряджених частинок, знайдений за правилом правого свердлика або правила лівої руки напрям слід змінити на протилежний.

Слід пам'ятати, що сила Лоренца, яка діє на частинку з боку магнітного поля, завжди є перпендикулярною до напряму її руху і надає частинці нормальне прискорення, тобто змінює тільки напрям швидкості, а не її величину.

2) Рівняння руху релятивістської частинки може бути записано тільки у вигляді

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \tag{16.74}$$

де $\vec{p}$ – релятивістський імпульс частинки

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{16.75}$$

де m – масса частинки; $\vec{v}$ – її швидкість; c – швидкість світла в вакуумі.

Енергія релятивістської частинки:

а) власна енергія (енергія спокою)

$$E_0 = mc^2; \tag{16.76}$$

б) кінетична енергія T

$$T = E - E_0 = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right); \tag{16.77}$$

в) повна енергія (це співвідношення встановлює також взаємозв'язок між енергією та масою релятивістської частинки):

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{16.78}$$

Зв'язок між енергією та імпульсом релятивістської частинки:

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4; \qquad E = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}; \tag{16.79}$$

$$p^2c^2 = T\left(T + 2mc^2\right). \tag{16.80}$$

5. В явищах магнітної індукції магнітний потік може змінюватися як при русі контуру або окремих його ділянок, так і при зміні з часом величини або напрямку магнітного поля.

Якщо в задачі необхідно знайти різницю потенціалів на кінцях провідника, який рухається в магнітному полі, слід пам'ятати, що вона дорівнює ЕРС індукції в провіднику.

При визначенні ЕРС індукції, виниклої у провідному контурі, який складається з N витків, слід ураховувати, що в кожному з них виникає певна ЕРС, а для усього контуру ЕРС визначається виразом

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Psi}{dt}, \qquad (16.81)$$

де $\Psi = \sum_{i=1}^{N} \Phi_{Bi}$ – потокозчеплення. За умови рівності всіх Φ_{Bi} повний магнітний потік можна представити у вигляді $\Psi = N\Phi$ (16.82). Тоді

$$\mathcal{E}_i = -N\frac{d\Phi_B}{dt}. \qquad (16.83)$$

В однорідних магнітних полях остання формула суттєво спрощується, у зв'язку з чим більшість задач можна розбити на три типи:

1) Нерухомий контур знаходиться у змінному з часом магнітному полі. Нормаль до контуру $\vec{n}$ утворює кут α з вектором $\frac{d\vec{B}}{dt}$. У цьому випадку

$$\mathcal{E}_i = -N\frac{dB}{dt}S\cos\alpha. \qquad (16.83а)$$

2) Контур повертається в однорідному стаціонарному магнітному полі, при цьому змінюється кут α між нормаллю до контуру і вектором $\vec{B}$. У цьому випадку

$$\mathcal{E}_i = -NBS\frac{d(\cos\alpha)}{dt}.$$

Зокрема, якщо $\alpha = \omega t$,

$$\mathcal{E}_i = -NBS\frac{d(\cos\omega t)}{dt}. \qquad (16.83б)$$

3) Змінюється площина контуру. Магнітне поле – однорідне і стаціонарне. У цьому випадку

$$\mathcal{E}_i = -NB\frac{dS}{dt}\cos\alpha. \qquad (16.83в)$$

6. При наявності магнітного середовища розрахунок магнітних полів суттєво спрощується введенням у якості допоміжної характеристики магнітного поля вектора напруженості $\vec{H}$, який визначається через вектори $\vec{B}$ і $\vec{J}$ співвідношенням (16.59).

Особливість вектора $\vec{H}$ полягає в тому, що його циркуляція вздовж будь-якого замкненого контуру визначається сумою струмів, які охоплює контур, і (на відміну від циркуляції вектора $\vec{B}$) не залежить від магнітних властивостей середовища, в якому проведений контур:

$$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \oint_L Hdl\cos\left(\vec{H}, d\vec{l}\right) = \sum_i I_i . \qquad (16.84)$$

Використання виразу (16.84) суттєво спрощує розрахунок магнітних полів електромагнітних приладів.

У той же час сам вектор $\vec{H}$ не залежить від магнітних властивостей осереддя лише у випадках, коли воно є суцільним кільцем (тороїд) або нескінченно довгим стрижнем (соленоїд) (див. приклад 16.14). В інших випадках, наприклад, при наявності повітряного зазору між полюсами електромагніту напруженість поля в осередді і у повітряному зазорі – різна (див. приклад 16.15).

7. Окрім формули (16.59) зв'язок між векторами $\vec{B}$ і $\vec{H}$ установлює формула (16.1) $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$. Її використання у випадку феромагнетиків обмежується тим, що між магнітною індукцією і напруженістю поля не існує лінійної залежності, бо відносна магнітна проникність μ феромагнетику є змінною величиною, яка залежить від магнітного поля у ньому. Нелінійну залежність між векторами $\vec{B}$ і $\vec{H}$ для різних феромагнетиків можна знайти, наприклад, у довідниках у вигляді експериментальних кривих намагнічування (див. доданок). Ці криві носять назву основних кривих намагнічування, бо надають залежність $\vec{B} = f\left(\vec{H}\right)$ для феромагнетиків у відсутності залишкової намагніченості, тобто для первісно не намагнічених феромагнетиків. Отже криві намагнічування можуть використовуватися для установлення зв'язку між векторами $\vec{B}$ і $\vec{H}$, якщо відомо, що розглянутий в задачі стан феромагнетику є результатом його намагнічування. В інших випадках внаслідок гістерезису значення магнітної індукції при тій самій напруженості буде залежати від попереднього стану намагнічування феромагнетику і не є однозначним.

8. При розв'язуванні задач про коло змінного струму, слід пам'ятати, що закони послідовного і паралельного з'єднання у колі постійного струму не справджуються для ефективних значень струму $I_{еф}$, напруги $U_{еф}$ та електрорушійної сили $\mathcal{E}_{еф}$ (або амплітудних значень $I_M, U_M, \mathcal{E}_M$) змінного струму, а повний опір кола складається з активної та реактивної компонент (див. формули (16.51) – (16.54)). Величини струму, напруги, ЕРС , які визначають електричні процеси в колі та його окремих ділянках здійснюють гармонічні коливання у різних фазах (див. формули (16.55) – (16.57)). Тому додавання напруг здійснюється за правилами додавання векторних величин з урахуванням кута (зсуву фаз) між ними (див. рис.16.6).

Приклади розв'язання задач

Приклад 16.1. Знайти індукцію магнітного поля у точці, яка розташована на відстані R=5см від тонкого нескінченного провідника, по якому тече струм I=2A.

R=0,05м
I=2A
μ=1
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м

B - ?

Розв'язання

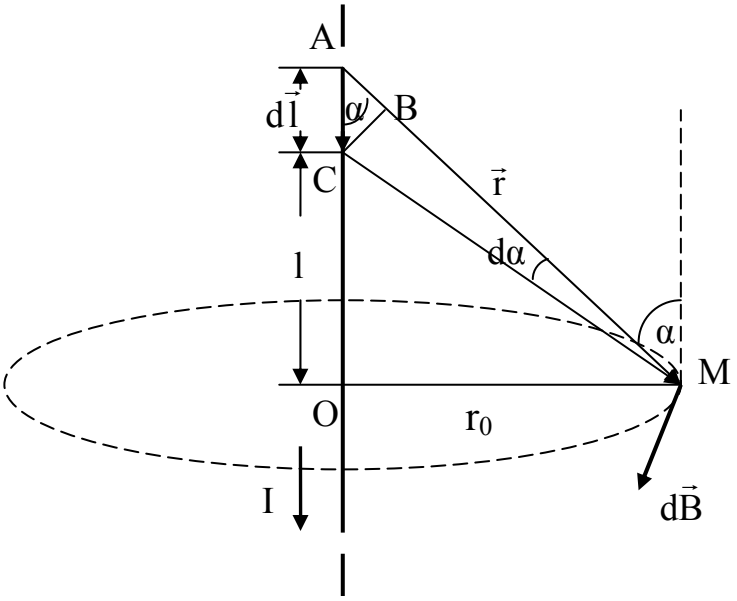


Рис. 16.7

Скористаємось законом Біо-Савара-Лапласа, щоб отримати формулу для розрахунку магнітної індукції в точці M. Виділимо на провіднику елемент dl, розташований на відстані l від точки O і на відстані r від точки M, в якій розраховується поле (рис. 16.7). Цей елемент утворює в точці M поле індукцією $d\vec{B}$, яка згідно з (16.3) спрямована перпендикулярно до площини рисунка до нас і згідно з (16.4) має величину

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\alpha}{r^2} \qquad (1)$$

Оскільки всі елементарні значення індукції магнітного поля мають однаковий напрям, повна індукція дорівнює:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\alpha}{r^2}dl \qquad (2)$$

Переходимо до однієї змінної, виразивши змінні l і r через кут α і задану відстань r_0. З рис. 16.7 маємо:

$$r = \frac{r_0}{\sin\alpha};\ \ dl = \frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{rd\alpha}{\sin\alpha} = \frac{r_0 d\alpha}{\sin^2\alpha},$$

де відрізок BC замінено елементом дуги радіусу r, яка спирається на нескінченно малий центральний кут $d\alpha$.

Підставимо вирази для dl і r в формулу (2):

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi r_0}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin\alpha d\alpha = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi r_0}(-\cos\alpha)\Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi R}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2). \qquad (3)$$

Для провідника нескінченної довжини α_1=0, α_2=π. (див.рис.16.2). За цієї умови вираз (3) приймає вигляд: $B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi R}$.

Перевірка розмірності: $[B] = \frac{Гн \cdot А}{м \cdot м} = \frac{Вб \cdot А}{А \cdot м^2} = \frac{Тл \cdot м^2}{м^2} = Тл$

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2}{2\pi \cdot 5 \cdot 10^{-2}} = 0{,}8 \cdot 10^{-5}\,Тл = 8мкТл.$$

Відповідь: B=8мкТл.

Приклад 16.2. По контуру, зображеному на рис.16.8 тече струм силою I=5A. Частина контуру AB є дугою кола радіусу R=10,0см. Визначити магнітну індукцію в точці O, яка є центром кола, якщо $\alpha = 60°$.

I=5A
R=0,1м
$\alpha = 60°$
μ=1
B - ?

Розв'язання

Згідно з принципом суперпозиції (16.6) магнітна індукція $\vec{B}$ дорівнює векторній сумі магнітних індукцій, утворених усіма елементами контуру:

$$\vec{B} = \vec{B}_{AB} + \vec{B}_{BC} + \vec{B}_{CA}. \qquad (1)$$

Обчислюємо модулі кожного з доданків.

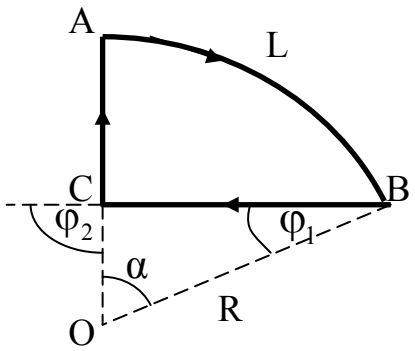


Рис. 16.8

Оскільки кут $\alpha = 60°$, дуга AB дорівнює 1/6 довжини кола, тобто $L = \frac{\pi R}{3}$. Підставляємо значення L у формулу (16.10а):

$$B_{AB} = \frac{\mu_0}{12}\frac{I}{R}. \qquad (2)$$

За формулою (16.7) визначаємо величину B_{BC}. З рис.16.8 знаходимо кути $\alpha_1 = 30°$, $\alpha_2 = 90°$. Відстань r_0 від точки до ділянки BC визначаємо з трикутника OCB: $r_0 = OC = R\sin\alpha_1 = \frac{R}{2}$. Підстановка значень у формулу (16.7) дає: $B_{BC} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi \cdot \frac{R}{2}}(\cos 30° - \cos 90°) = \frac{\sqrt{3}}{4\pi}\frac{I}{R}$. (3)

Визначення величини B_{CA} за допомогою формули (16.7) неможливо, бо відстань r_0 від точки до провідника є довжиною перпендикуляра,

проведеного від точки О до провідника, а у даному випадку точка лежить на продовженні ділянки кола СА. Однак, можна скористатися формулою (16.4), яка виражає в скалярній формі закон Біо-Савара-Лапласа.

$$dB = \frac{\mu_0 \mu I \sin\alpha}{4\pi r^2} \cdot dl.$$

Для будь-якого елемента $d\vec{l}$ провідника СА кут α, утворений цим елементом, (напрям $d\vec{l}$ збігається з напрямком струму) і радіусом-вектором $\vec{r}$, проведеним від елемента до точки О дорівнює π. Оскільки $\sin\pi = 0$, $dB = 0$ для будь-якого елемента провідника СА, і цей провідник не дає внеску в магнітну індукцію поля в точці О.

Таким чином, вираз (1) набирає вигляду

$$\vec{B} = \vec{B}_{AB} + \vec{B}_{BC}. \qquad (1a)$$

Визначаємо напрям векторів $\vec{B}_{AB}$ і $\vec{B}_{BC}$. Провідники АВ і ВС лежать в площині рисунка, тому обидва вектори є перпендикулярними до цієї площини. За правилом правого свердлика вектор $\vec{B}_{AB}$ направлений за площину рисунка, а вектор $\vec{B}_{BC}$ – від неї. Беручи другий напрям за позитивний, знаходимо: $B = B_{BC} - B_{AB}$.

З урахуванням виразів (2) і (3): $B = \left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi} - \frac{1}{12}\right)\frac{\mu_0 I}{R}$. (4)

Перевірка розмірності: $[B] = \frac{Гн \cdot А}{м \cdot м} = \frac{В \cdot с}{м^2} = Тл$.

За формулою (4) обчислюємо магнітну індукцію в точці (магнітна стала $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м). Розрахунок дає:

$$B = \left(\frac{\sqrt{3}}{4 \cdot 3{,}14} - \frac{1}{12}\right)\frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-7} \cdot 5}{0{,}1} = 3{,}43 \cdot 10^{-6} Тл.$$

Відповідь: В = 3,43мкТл.

Приклад 16.3. Два прямолінійних нескінченних провідника розташовані паралельно на відстані l=10см один від одного. По провідниках протікають однакові струми $I_1=I_2=2А$ у протилежних напрямках. Знайти індукцію магнітного поля у точці, яка віддалена від кожного провідника на відстань r=10см.

l=0,1м $I_1=I_2=2А$ r=0,1м μ=1 $\mu_0=4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м	Розв'язання. Нехай провідники розташовані перпендикулярно до площини рисунку (рис.16.9). Точка М і перерізи провідників утворюють рівнобічний трикутник зі стороною 0,1м. Тому $\alpha = 60^0$. Індукції B_1 і B_2 магнітних полів струмів I_1 і I_2, можна визначити за
B - ?	

формулою (16.8)

$$B_1 = B_2 = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r_0}.$$

За принципом суперпозиції

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2.$$

Напрямки $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$ і $\vec{B}$ показані на рис. 16.9. З рисунка випливає, що кут β також дорівнює 60^0. Це означає, що вектори $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$ і $\vec{B}$ теж утворюють рівнобічний трикутник, тому $B = B_1 = B_2$.

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2}{2\pi \cdot 0{,}1} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ (Тл)}$$

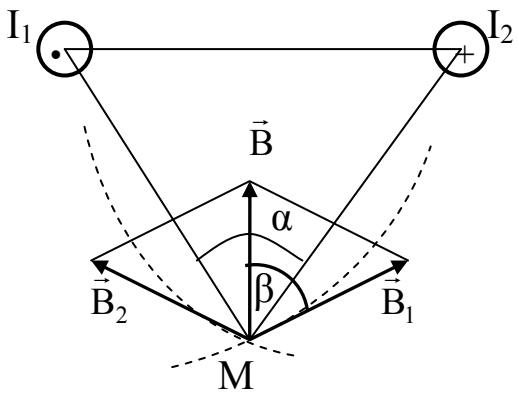


Рис. 16.9

Приклад 16.4. Вздовж двох довгих паралельних провідників, розташованих у повітрі на відстані $r_1 = 0{,}1$ один від одного, в одному напрямку проходять струми I_1= 20А та I_2=30А (рис. 16.10). 1) Визначити силу взаємодії F_l, яка діє на одиницю довжини кожного провідника; 2)роботу A_l на одиницю довжини, яку необхідно виконати для віддалення цих провідники на відстань r_2=20см? Притягуватися чи відштовхуватися будуть провідники проміж собою?

I_1=20А
I_2=301кА
r_1=0,1м
r_2=0,2м
μ=1
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м

F_l; A_l -?

Розв'язання.

Будемо вважати, що провідник зі струмом I_2 знаходиться у магнітному полі, яке утворює струм I_1. Індукція цього поля

$$B_1 = \mu_0\mu \frac{I_1}{2\pi r}.$$

Тоді на елемент dl струму I_2 діє сила Ампера (16.17):

$$dF = I_2 B_1 dl \sin\alpha,$$

або

$$dF = \mu_0\mu \frac{I_1 I_2}{2\pi r} dl \sin\alpha.$$

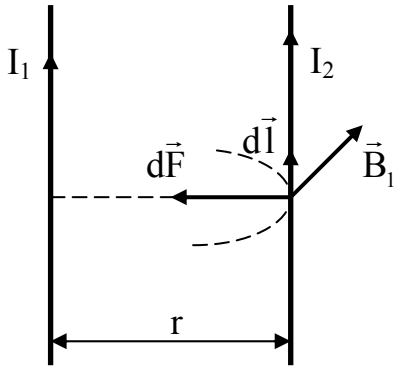


Рис. 16.10

У нашому випадку α = 90^0, μ = 1, тому на одиницю довжини припадає сила

$$F_l = \frac{dF}{dl} = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi r}.$$

Напрямок сили визначається законом (16.16). У даному випадку провідники притягуються (див.рис.16.10).

Елементарна робота dA_1, яка виконується на одиницю довжини провідників при зміні відстані між ними на dr, дорівнює

$$dA_1 = F_1 dr = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi r} dr .$$

Інтегруванням останнього виразу у межах від r_1 до r_2 знаходимо роботу $A_1 = \frac{dA}{dl}$:

$$A_1 = \int_{r_1}^{r_2} F_1 dr = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right).$$

Перевірка розмірності:

$$[F] = \frac{Гн \cdot А \cdot А}{м \cdot м} = \frac{Вб \cdot А^2}{м^2} = \frac{Тл \cdot м^2 \cdot А^2}{А \cdot м^2} = \frac{Н \cdot А}{А \cdot м} = \frac{Н}{м}.$$

$$F_1 = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 20 \cdot 30}{2\pi \cdot 0{,}1} = 1{,}2 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м}.$$

$$A_1 = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-7} \cdot 20 \cdot 30}{2 \cdot 3{,}14} \ln \frac{0{,}2}{0{,}1} = 8{,}3 \cdot 10^{-5} \text{ Дж/м}.$$

Відповідь: $F_1 = 1{,}2 \cdot 10^{-3}$ Н/м ; притягуються. $A_1 = 8{,}3 \cdot 10^{-5}$ Дж/м.

Приклад 16.5. По трьох паралельних провідниках 1, 2, 3, розташованих у вакуумі на відстані a=0,1м один від одного, течуть струми I_1, I_2, I_3. У провідників 1 та 2 напрямок струмів співпадають. Знайдіть силу, що діє на одиницю довжини кожного провідника.

Розв'язання.

I_1; I_2; I_3 $a_1 = a_2 = a_3 = a$ f_1; f_2; f_3 - ?	Провідники 1 та 2 притягуються один до одного з силою: $\left\|\overrightarrow{F_{1,2}}\right\| = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi a}$.

Провідники 1 і 3 та провідники 2 і 3, відштовхуються один від одного з силами:

$$\left|\overrightarrow{F_{1,3}}\right| = \frac{\mu_0 I_1 I_3 l}{2\pi a};$$

$$\left|\overrightarrow{F_{2,3}}\right| = \frac{\mu_0 I_2 I_3 l}{2\pi a}.$$

Рівнодійні сили, що діють на кожний з провідників, визначаються векторним додаванням (рис.16.11). Модулі сил знаходимо за теоремою

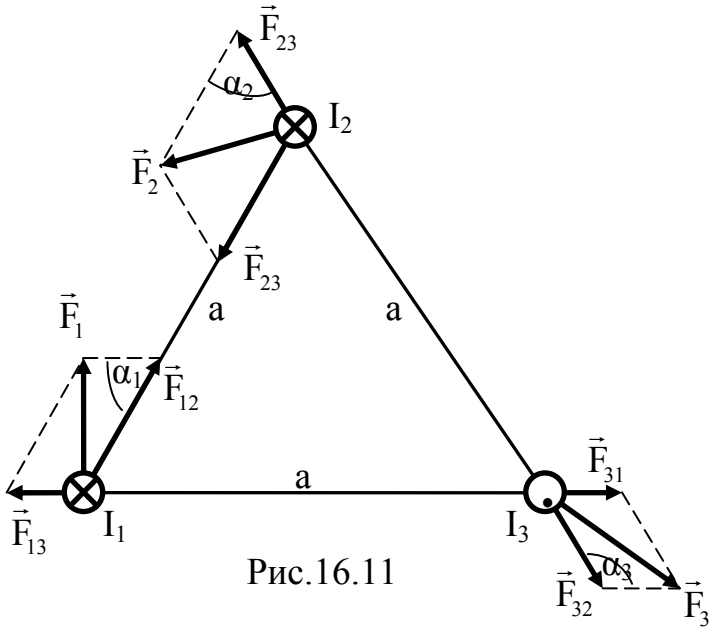


Рис.16.11

косинусів. З урахуванням того, що кути α_1, α_2, α_3 між векторами складових сил дорівнюють $\alpha_1 = \alpha_2 = 60°$, $\alpha_3 = 120°$ отримуємо

$$\left|\vec{F_1}\right| = \sqrt{\left|\vec{F_{1,2}}\right|^2 + \left|\vec{F_{1,3}}\right|^2 - \left|\vec{F_{1,2}}\right| \cdot \left|\vec{F_{1,3}}\right|}; \qquad \left|\vec{F_2}\right| = \sqrt{\left|\vec{F_{1,2}}\right|^2 + \left|\vec{F_{2,3}}\right|^2 - \left|\vec{F_{1,2}}\right| \cdot \left|\vec{F_{2,3}}\right|};$$

$$\left|\vec{F_3}\right| = \sqrt{\left|\vec{F_{1,3}}\right|^2 + \left|\vec{F_{2,3}}\right|^2 + \left|\vec{F_{1,3}}\right| \cdot \left|\vec{F_{2,3}}\right|}.$$

Сили, які діють на одиницю довжини кожного з провідників, дорівнюють:

$$f_1 = \frac{\left|\vec{F_1}\right|}{l} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}\sqrt{I_2^2 + I_3^2 - I_2 \cdot I_3}; \qquad f_2 = \frac{\left|\vec{F_2}\right|}{l} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi a}\sqrt{I_1^2 + I_3^2 - I_1 \cdot I_3};$$

$$f_3 = \frac{\left|\vec{F_3}\right|}{l} = \frac{\mu_0 I_3}{2\pi a}\sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_1 \cdot I_2}.$$

Приклад 16.6. З дроту довжиною *l* виготовлено три контури: квадратний, коловий та у вигляді рівнобічного трикутника. Знайти обертальний момент, що діє на кожен з контурів в однорідному магнітному полі з індукцією $\vec{B}$. По дроту тече струм I. Площина кожного контуру становить кут β з напрямком магнітного поля.

B; *l*; I; β	Розв'язання.
M-?	Абсолютне значення обертального моменту, діючого на замкнений контур зі струмом: $\left|\vec{M}\right| = \left|\vec{B}\right|\left|\vec{S}\right| I \sin\alpha$,

де: $\left|\vec{S}\right| = S \cdot \left|\vec{n}\right|$, S – площа контуру, α – кут між напрямком магнітного поля $\vec{B}$ та нормаллю $\vec{n}$ до площини контуру.

Якщо площина контуру становить кут β з напрямком магнітного поля, то кут між нормаллю до площини та напрямком магнітного поля $\alpha = 90^\circ - \beta$ та $\sin\alpha = \cos\beta$.

Якщо периметр квадрата рівний *l*, то його сторона дорівнює $l/4$.

Отже, площа квадратного контуру становить $S_1 = \dfrac{l^2}{16}$.

Площа колового контуру: $S_2 = \pi r^2 = \pi\left(\dfrac{l}{2\pi}\right)^2 = \dfrac{l^2}{4\pi}$.

Площа трикутного контуру: $S_3 = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{36}$.

Обертальні моменти, які діють на кожний з контурів, дорівнюють відповідно:

$$\left|\overrightarrow{M_1}\right| = \frac{1}{16} BIl^2 \sin\beta; \qquad \left|\overrightarrow{M_2}\right| = \frac{1}{4\pi} BIl^2 \sin\beta;$$

$$\left|\overrightarrow{M_3}\right| = \frac{\sqrt{3}}{36} BIl^2 \sin\beta.$$

$$[M] = \frac{кг}{А \cdot с^2} \cdot А \cdot м^2 = \frac{кг \cdot м^2}{с^2} = Н \cdot м$$

Приклад 16.7. Протон, який пройшов різницю потенціалів U=500В, влетів у однорідне магнітне поле перпендикулярно до ліній магнітної індукції. Визначити радіус траєкторії протона. Індукція магнітного поля B=0,5Тл.

U=500 В
B=0,5Тл
$\alpha = 90°$
$m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг
q=$1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл

R - ?

Розв'язання.

На протон діє сила Лоренца (16.15). Оскільки кут між швидкістю $\vec{v}$ та індукцією $\vec{B}$ дорівнює 90^0 $(\sin\alpha = 1)$, то сила Лоренца є доцентровою і змушує протон рухатись по колу. Згідно з другим законом Ньютона

$$\vec{F}_Л = m\vec{a}_n, \text{ або } qvB = \frac{mv^2}{R},$$

звідки

$$R = \frac{mv}{qB} \qquad (1)$$

де $m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг – маса протона, q=$1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл – заряд протона.

Швидкість v знайдемо, скориставшись зв`язком між роботою електричного поля по переміщенню протона зі зміною його кінетичної енергії

$$qU = W_{K2} - W_{K1}.$$

Вважаючи початкову швидкість протона рівною нулю, маємо

$$qU = \frac{mv^2}{2}, \text{ звідки } v = \sqrt{\frac{2qU}{m}} \qquad (2)$$

Підставимо (2) у (1) і отримаємо

$$R = \frac{m\sqrt{2qU}}{qB\sqrt{m}} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{q}}. \qquad (3)$$

$$[R] = \frac{1}{Тл}\left(\frac{кг \cdot В}{Кл}\right)^{1/2} = \frac{м^2}{В \cdot с}\left(\frac{кг \cdot В}{Кл}\right)^{1/2} = \frac{м^2 (кг)^{1/2}}{(Дж)^{1/2} \cdot с} = \frac{м^2 (кг)^{1/2} \cdot с}{(кг)^{1/2} \cdot м \cdot с} = м$$

$$R = \frac{1}{0{,}5}\sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27} \cdot 500}{1{,}6 \cdot 10^{-19}}} = 6{,}46 \cdot 10^{-3} м = 6{,}46 мм$$

Відповідь: $R = 6{,}46$мм.

Примітка. Попередня оцінка швидкості руху протона за формулою (2) показує, що його швидкість суттєво менша за швидкість світла, тому при розв'язуванні задачі були використані закони класичної фізики.

Приклад 16.8. Визначити кінетичну енергію T електрона, який обертається в однорідному магнітному полі з магнітною індукцією B=2Тл вздовж кола радіусом R=2см.

B=2Тл R=0,02м $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл $m_0 = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг	Розв'язання.
T-?	

Перш за все дослідимо класичним чи релятивістським слід вважати електрон. Припустимо, що поведінку електрона описують закони класичної фізики. Тоді з формули (1) попереднього прикладу 16.7 швидкість електрона

$$v == \frac{qBR}{m}, \qquad (1)$$

де m – маса електрона. Кінетичну енергію електрона розраховуємо за формулою:

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{(qBR)^2}{2m_0}.$$

$$T = \frac{\left(1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10^{-2}\right)^2}{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}} = 2,25 \cdot 10^{-11} \text{Дж} = 141 \text{МеВ}$$

Знаходимо кінетичну енергію у мегаелектрон-вольтах (1МеВ=$1,6 \cdot 10^{-13}$ Дж) і порівнюємо з енергією спокою електрона $E_0 = mc^2 = 0,511$МеВ.

$$T = 141\text{МеВ} \gg 0,511\text{МеВ}.$$

Отже, електрон є релятивістським, і його поведінку описують формули спеціальної теорії відносності. Тоді кінетична енергія електрона за формулою (16.77) дорівнює

$$T = E - E_0, \qquad (2)$$

де енергія спокою електрона

$$E_0 = mc^2, \qquad (3)$$

повна енергія електрона $E = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}$. (4)

Імпульс електрона p виражаємо з формули (1):

$$p = qBR. \qquad (5)$$

Підстановка виразів (3) – (5) до формули (2) дає

$$T = c\sqrt{p^2 + m^2c^2} - mc^2 = c\sqrt{(qBR)^2 + m^2c^2} - mc^2.$$

$$T = 3 \cdot 10^8 \sqrt{\left(1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10^{-2}\right)^2 - \left(9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8\right)^2} - 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{16} =$$

$$= 1,84 \cdot 10^{-12} \text{Дж} = 11,5 \text{МеВ}.$$

Відповідь: $T = 1{,}84 \cdot 10^{-12}$ Дж $= 11{,}5$ МеВ.

Приклад 16.9. В однорідному магнітному полі з індукцією B рівномірно обертається з частотою ν рамка площиною S. Вісь обертання лежить у площині рамки і перпендикулярна до ліній індукції (рис. 16.12). Визначити максимальну ЕРС індукції, яка виникає в рамці.

B, ν, S

$\mathcal{E}_{i\,max}$ -?

Розв'язання.

При рівномірному обертанні плоскої рамки в однорідному магнітному полі магнітний потік, який пронизує рамку, змінюється з часом за законом:

$$\Phi_B = BS\cos\omega t,$$

де S – площина рамки, B – магнітна індукція поля, $\omega = 2\pi\nu$ – кутова швидкість обертання рамки.

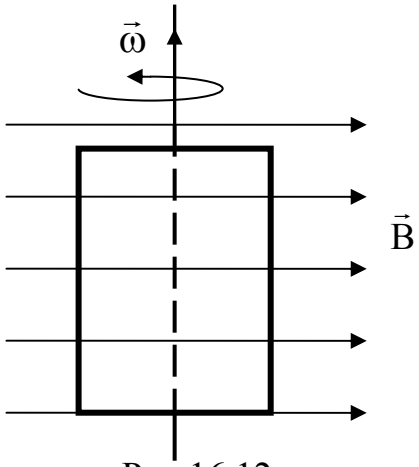


Рис.16.12

Згідно закону Фарадея для електромагнітної індукції (16.32)

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\left(BS\cos\omega t\right)}{dt} = BS\omega\sin\omega t.$$

Максимальне значення ЕРС індукції досягається при $\sin\omega t = 1$, тобто

$$\mathcal{E}_{i\,max} = BS\omega = 2\pi\nu BS.$$

Приклад 16.10. Замкнена на коротко котушка діаметром d=10см, яка має 250 витків, знаходиться в магнітному полі, індукція якого зростає від B_1=2Тл до B_2=6Тл протягом часу $\Delta t = 0{,}1$ с. Визначити середнє значення ЕРС індукції в котушці, якщо площини витків перпендикулярні до силових ліній поля.

d=0,1м
N=250
B_1=2Тл
B_2=6Тл
$\Delta t = 0{,}1$ с
α=0

$\langle \mathcal{E}_i \rangle - ?$

Розв'язання.

ЕРС індукції знаходимо із співвідношення

$$\left|\langle \mathcal{E}_i \rangle\right| = N\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}. \qquad (1)$$

Потік крізь виток, з урахуванням того, що кут α між лініями магнітної індукції та нормаллю до площини витків дорівнює 0, визначаємо за формулою $\Phi_B = BS$. Оскільки потік змінюється тільки за рахунок зміни магнітної індукції поля, $\Delta\Phi_B = \Delta B \cdot S = \left(B_2 - B_1\right)S$, де площина витка $S = \frac{\pi d^2}{4}$. Тоді $\Delta\Phi_B = \left(B_2 - B_1\right)\frac{\pi d^2}{4}$. (2)

Підстановка виразу $\Delta\Phi_B$ до формули (1) дає: $|\mathcal{E}_i| = \frac{N\pi d^2}{4}\frac{(B_2 - B_1)}{\Delta t}$.

$$[\mathcal{E}_i] = \frac{м^2}{с}\cdot\frac{В\cdot с}{м^2} = В$$

$$|\langle\mathcal{E}_i\rangle| = \frac{250\cdot 3{,}14\cdot 0{,}1^2(6-2)}{4\cdot 0{,}1} = 78{,}5\,В.$$

Приклад 16.11. Дротяна рамка у формі квадрата зі стороною а знаходиться в магнітному полі з індукцією $\vec{B}$, лінії якої перпендикулярні до площини рамки. Який заряд протече у рамці, якщо її витягнути в одну лінію, потягнувши за протилежні кути? Опір рамки дорівнює R.

B=const
S_1
S_2=0
$\alpha=0^\circ$
R; a
q-?

Розв'язання

Заряд, який протікає за час dt у контурі виражаємо через струм: $dq = Idt$ (1). Струм у замкненому контурі за законом Ома для повного кола виражаємо через ЕРС індукції $\mathcal{E}_i$ та опір R: $I = \frac{\mathcal{E}_i}{R}$ (2). Величину електрорушійної сили індукції надає закон Фарадея (16.32): $|\mathcal{E}_i| = \frac{d\Phi_B}{dt}$ (3). Вирази (2) та (3) використовуємо для визначення dq і далі інтегруванням знаходимо заряд q:

$$dq = \frac{|\mathcal{E}_i|}{R}dt = \frac{1}{R}\frac{|d\Phi_B|}{dt}dt = \frac{|d\Phi_B|}{R}.$$

$$q = \int_0^q dq = \frac{1}{R}\int_{\Phi_1}^{\Phi_2}|d\Phi_B| = \frac{1}{R}|\Phi_{B2} - \Phi_{B1}| = \frac{|\Delta\Phi_B|}{R}. \qquad (4)$$

За умовою задачі зміна магнітного потоку відбувається тільки за рахунок зміни площини контуру від значення $S_1 = a^2$ до $S_2 = 0$. Отже $\Delta\Phi_B = Ba^2$ і величина заряду, що пройшов у контурі при зміні його площини дорівнює $q = \frac{B\Delta S}{R}$.

Примітка. Зверніть увагу на ту обставину, що, на відміну від індукційного струму, величина заряду, який протікає у контурі, залежить від величини зміни магнітного потоку, а не від швидкості, з якою змінюється цей магнітний потік.

Приклад 16.12. У коротко замкнену котушку всувають магніт: один раз – швидко, другий – повільно. а) Чи однаковий заряд проходить у котушці у першому і другому випадках? б) Чи буде однаковою робота,

яку виконує сила з боку руки, яка всуває магніт, проти електромагнітних сил? в) Чи однакова кількість теплоти виділиться у котушці?

Розв'язання.

а) Заряд, який пройде по котушці, буде однаковим в обох випадках, бо не залежить від швидкості зміни магнітного потоку (див. попередній приклад).

б) Більша робота виконується при швидкому переміщенні магніту, оскільки робота дорівнює $A = q \cdot \mathcal{E}_i$, де $\mathcal{E}_i$ – величина ЕРС індукції, яка буде більшою в цьому випадку.

в) Кількість виділеного тепла також буде більшою у першому випадку. Заряди, які протікають по котушці однакові. Струм $I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$ – більший у першому випадку, оскільки в першому випадку зміна магнітного потоку відбувається за менший час. Таким чином, кількість теплоти, які виділяється в котушці $Q = I^2 R\Delta t = IR\Delta q$ буде більшою у першому випадку.

Приклад 16.13. За який час t після замикання електричного кола, яке містить опір R=10 Ом і індуктивність L=0,1Гн, струм у ньому досягне значення $I = 0{,}9 I_{max}$?

R=10Ом L=0,1Гн $I = 0{,}9 I_{max}$	Розв'язання При замиканні кола в ньому окрім ЕРС джерела струму $\mathcal{E}$ внаслідок зміни струму виникає ЕРС самоіндукції, яка за формулою (16.39) дорівнює $\mathcal{E}_{si} = -L\frac{dI}{dt}$. За законом Ома для повного кола
t - ?	

$$I = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{E}_{si}}{R} = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{L}{R}\frac{dI}{dt}.$$

Тобто струм у колі є розв'язком неоднорідного рівняння

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{\mathcal{E}}{L}. \qquad (1)$$

Методом розділенням змінних знаходимо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = 0$:

$$\frac{dI}{I} = \frac{R}{L} dt; \quad \ln I = -\frac{R}{L} t + C,$$ де C – константа інтегрування.

$$I_1 = Ce^{-\frac{R}{L}t}. \qquad (2)$$

Окремий розв'язок неоднорідного рівняння (1) представляємо у вигляді:

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R}. \qquad (3)$$

Загальний розв'язок рівняння (1) є сумою виразів (2) і (3):

$$I = I_1 + I_2 = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\varepsilon}{R}.$$

Константу C знаходимо за початковою умовою, згідно з якою I=0 при t=0: $C = -\frac{\varepsilon}{R}$. Після підстановки константи отримуємо: $I = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$. (4)

Максимальне значення струму досягається при установленні в колі постійного струму, тобто при $t \to \infty$. З формули (4) при $t \to \infty$ отримуємо $I_{max} = \frac{\varepsilon}{R}$. Тоді $I = I_{max}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$. Розв'язання останнього рівняння відносно часу t дає:

$$t = -\frac{L}{R}\ln\left(1 - \frac{I}{I_{max}}\right).$$

Перевірка розмірності: $[t] = \left[\frac{Гн}{Ом}\right] = \left[\frac{В \cdot с \cdot А}{А \cdot В}\right] = с$

$$t = -\frac{0,1}{10}\ln(1 - 0,9) = 0,023с$$

Відповідь: t=23мс.

Приклад 16.14. По соленоїду з не намагніченим залізним осереддям пустили струм силою I=2,5А. Соленоїд має n=10 витків на кожний сантиметр довжини. Обчислити індуктивність соленоїду, а також енергію магнітного поля в осередді, якщо площа його перерізу S=4,0см^2, а довжина l = 30см.

I=2,5А n=10^3м$^{-1}$ S=$4 \cdot 10^{-4}$ м^2 l = 0,3м	Розв'язання Згідно з умовою задачі довжина соленоїда l більше ніж у десять разів перевищує його діаметр. Такий соленоїд називають нормальним, нехтують крайовими ефектами і поле всередині соленоїда вважають однорідним.
L; W-?	

Індуктивність соленоїда за формулою (16.38) дорівнює $L = \mu_0\mu n^2 V = \mu_0\mu n^2 lS$ (1), де μ – магнітна проникність осереддя соленоїда, яка залежить від напруженості H магнітного поля.

Оскільки $\mu_0\mu = \frac{B}{H}$ (2), визначимо величини напруженості H і магнітної індукції B, які характеризують магнітне поле в осередді.

З формул (16.12) і (16.1) випливає

$$H = nI = 2,5 \cdot 10^3 \text{ А/м}.$$

Магнітну індукцію поля в осередді знаходимо з кривої намагнічування заліза (див. доданок): B = 1,45Тл.

Користуючись знайденими значеннями B і H та формулою (1) з залученням співвідношення (2) обчислюємо індуктивність L:

$$L = \frac{B}{H} n^2 l S.$$

$$[L] = \frac{Тл \cdot м^{-2} \cdot м \cdot м^2}{А \cdot м^{-1}} = \frac{Тл \cdot м^2}{А} = \frac{В \cdot с \cdot м^2}{м^2 \cdot А} = Гн;$$

$$L = \frac{1,45 \cdot 10^6 \cdot 0,3 \cdot 4 \cdot 10^{-4}}{2,5 \cdot 10^3} = 0,070 = 7,0 \cdot 10^{-2}\,Гн.$$

Використовуючи значення індуктивності та сили струму в обмотці соленоїда за формулою (16.63) визначаємо енергію магнітного поля:

$$W = \frac{1}{2} L I^2.$$

$$[W] = Гн \cdot А^2 = \frac{В \cdot с}{А} \cdot А^2 = В \cdot А \cdot с = Дж;$$

$$W = \frac{7,0 \cdot 10^{-2} \cdot 2,5^2}{2} = 0,22\,Дж.$$

Такий самий результат можна отримати застосуванням формул (16.65) для об'ємної енергії магнітного поля $W = w_B V = \frac{BH}{2} l S$.

Примітка. Внаслідок явища гістерезису використовувати основну криву намагнічування для визначення величин B, H або μ можливо лише у випадку намагнічування феромагнетику, який попередньо знаходився у розмагніченому стані.

Приклад 16.15. Тороїд з залізним осереддям, довжина якого вздовж середньої лінії кільця дорівнює l_1=1,0м, має повітряний зазор l_2=5мм. Після виключення струму в обмотці тороїда залишкова індукція в зазорі дорівнює B=4,5мТл. Визначити залишкову намагніченість J осереддя, а також напруженість поля H_1 у залізі.

l_1=1,0м $l_2 = 5 \cdot 10^{-3}$ м $B = 4,5 \cdot 10^{-3}$Тл	Розв'язання
J; H_1-?	

У даному випадку, на відміну від попередньої задачі, було б невірним для визначення H скористатися кривою намагнічування заліза. Намагніченість заліза є результатом його неповного розмагнічування, а криві намагнічування і розмагнічування внаслідок явища гістерезису не співпадають.

Скористаємося теоремою про циркуляцію вектора $\vec{H}$, обравши у якості контуру інтегрування середню лінію тороїда l. Оскільки повітряний зазор в тороїді є вузьким, розсіюванням ліній магнітної індукції в зазорі можна знехтувати. З урахуванням замкненості ліній вектора $\vec{B}$ зрозуміло,

що крізь будь-який переріз тороїда, в тому числі крізь переріз у повітряному зазорі, проходить такий самий магнітний потік Φ_B. А оскільки площа S будь-якого перерізу однакова, також однакові магнітні індукції в будь-якій точці контуру l:

$$B_1 = B_2 = B = \frac{\Phi_B}{S} = 4{,}5 \cdot 10^{-3}\,\text{Тл}.$$

Магнітні індукції в залізі і повітряному зазорі мають однакові значення, а магнітні проникності цих речовин різні, тоді напруженості магнітного поля в них також мають різні значення H_1 і H_2. За теоремою про циркуляцію вектора $\vec{H}$ (16.84) при відсутності струму в обмотці, тобто при I=0, маємо:

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 = 0. \qquad (1)$$

У повітряному зазорі величини H_2 і B зв'язані співвідношенням (16.1) , де μ_2=1. Звідки $H_2 = \frac{B}{\mu_0}$. Підставляємо це значення в (1) і отримуємо напруженість магнітного поля в залізі:

$$H_1 = -H_2 \frac{l_2}{l_1} = -\frac{B}{\mu_0} \cdot \frac{l_2}{l_1}, \qquad (2)$$

де $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнітна стала.

Знак «–» у формулі показує, що вектори $\vec{H}_1$ і $\vec{B}$ у намагніченому залізі при відсутності струму в обмотці направлені протилежно (відповідні ділянки петлі гістерезису лежать у другій та четвертій чвертях).

Залишкову намагніченість заліза знаходимо за допомогою формули (16.59):

$$\vec{J} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H}_1,$$

або, ураховуючи протилежні напрями векторів $\vec{H}_1$ і $\vec{B}$, у скалярній формі

$$J = \frac{B}{\mu_0} + H_1.$$

Підстановка в останній вираз абсолютного значення H_1 з формули (2) дає:

$$J = \frac{B(l_1 + l_2)}{\mu_0 l_1}. \qquad (3)$$

З формул (2) та (3) знаходимо шукані величини:

$$H_1 = -\frac{4{,}5 \cdot 10^{-3}}{12{,}56 \cdot 10^{-7}} \cdot \frac{5 \cdot 10^{-3}}{1{,}0} = -17{,}9\,(\text{А/м});$$

$$J = \frac{4{,}5 \cdot 10^{-3}\left(1{,}0 + 5 \cdot 10^{-3}\right)}{12{,}56 \cdot 10^{-7} \cdot 1{,}0} = 3{,}6 \cdot 10^{3}\,(\text{А/м})$$

Приклад 16.16. При дослідах з двома жорстко зв'язаними між собою контурами було знайдено, що при тій самій швидкості зміни сили струму в першому контурі ЕРС індукції в другому контурі дорівнювала у вакуумі $\mathcal{E}_{02}$=2В, а у рідині, магнітні властивості якої вивчалися, $\mathcal{E}_2$=2,00252В. Визначити магнітну сприйнятливість рідини.

$\mathcal{E}_{02}$=2В $\mathcal{E}_2$=2,00252В $\chi_m - ?$	Розв'язання ЕРС взаємної індукції яка виникає у другому контурі при зміні сили струму в першому згідно з формулою (16.44) дорівнює

$$\mathcal{E}_2 = -L_{21}\frac{dI_1}{dt}, \qquad (1)$$

де L_{21} – взаємна індуктивність контурів.

У випадку, коли обидва контури знаходяться в однорідному ізотропному середовищі, їх взаємна індуктивність пропорційна відносній магнітній проникності μ середовища і залежить від форми, розмірів та взаємного положення контурів.

Згідно з умовою задачі контури жорстко зв'язані, тобто під час вимірювань ЕРС змінювалась тільки за рахунок зміни магнітної проникності середовища. Тому можна вважати, що відношення отриманих значень ЕРС пропорційно відношенню магнітної проникності середовищ:

$$\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_{02}} = \frac{\mu}{\mu_{вак}}, \qquad (2)$$

де μ та $\mu_{вак}$ – магнітні проникності рідини та вакууму відповідно. Оскільки для вакууму $\mu_{вак} = 1$, вираз (2) набуває вигляду

$$\mu = \frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_{02}}. \quad (3)$$

За формулою (16.61) магнітна сприйнятливість речовини дорівнює

$$\chi_m = \mu - 1.$$

Замінюємо μ її виразом із співвідношення (3), і отримуємо

$$\chi_m = \frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_{02}} - 1.$$

Обчислення дає: $\chi_m = 0{,}0126$.

Примітка. Метод, про який йде мова у розглянутому прикладі, є одним з методів експериментального визначення магнітної сприйнятливості рідин. Він оснований на тому, що взаємна індуктивність двох контурів прямо пропорційна відносній магнітній проникності середовища.

Приклад 16.17. До електричної мережі напругою U=220В і частотою ν=50Гц підключено котушку опором R=100 Ом, яка споживає потужність P=200Вт. Знайти струм I, який протікає через котушку, а також її індуктивність L, якщо зсув фаз між напругою і струмом φ=60°.

Розв'язання.

В умовах задачі йдеться про ефективні значення струму і напруги. Оскільки потужність змінного струму (16.56)

$$P = I_{еф} U_{еф} \cos\varphi .$$

$$I_{еф} = \frac{P}{U_{еф} \cdot \cos\varphi} = \frac{200}{220 \cdot 0{,}5} = 1{,}82А$$

Повний опір ділянки кола (16.52) з урахуванням того, що C=0,

$$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \qquad (1)$$

З іншого боку, згідно з формулою (16.54), повний опір

$$Z = \frac{U_{еф}}{I_{еф}} \qquad (2)$$

Порівняємо (1) і (2): $\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{U_{еф}}{I_{еф}}$.

Розв'язуємо останнє рівняння відносно L. Ураховуючи, що $\omega = 2\pi\nu$, отримуємо: $L = \frac{\sqrt{U_{еф}^2 - I_{еф}^2 R^2}}{2\pi\nu I_{еф}}$.

$$[L] = \frac{\left(В^2 - А^2 \cdot Ом^2\right)^{1/2}}{А \cdot с^{-1}} = \frac{В \cdot с}{А} = Гн$$

$$L = \frac{\sqrt{(220)^2 - (1{,}82 \cdot 100)^2}}{1{,}82 \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 50} = 0{,}022Гн = 22мГн$$

Відповідь: I=1,82 А, L=22 мГн.

Задачі для самостійного розв'язування

16.1. Знайти напруженість H магнітного поля у центрі кругового витка радіуса R=5 см, через який тече струм I=1A.

16.2. Дротяний провідник має форму квадрата за стороною a=10см. По провіднику тече струм силою I=5A. Знайти магнітну індукцію B у центрі квадрата.

16.3. Нескінченний провідник зігнули під прямим кутом. По провіднику протікає струм I=10A. Знайти індукцію магнітного поля B у точці, яка розташована на бісектрисі цього кута і віддалена від вершини на відстань l=20 см.

16.4. Два прямолінійних провідника зі струмами I_1=I_2=1A розташовані у вакуумі паралельно на відстані a=10см. Знайти напруженість магнітного

поля H у точці, яка віддалена від кожного з провідників на відстань a=10см. Розглянути випадки: а) струми напрямлені однаково; б) струми напрямлені протилежно.

16.5. Визначити магнітну індукцію на осі тонкого дротяного кільця радіусом R=4 см, по якому проходить струм I=10 А, в точці, розташованій на відстані d=10 см від центра кільця.

16.6. Знайти індукцію магнітного поля на осі кругового витка радіуса R=5см на відстані h=10см від його центра. По витку тече струм I=1А.

16.7. Два кругових контури розташовані у взаємно перпендикулярних площинах так, що вони мають спільний центр. Знайти магнітну індукцію B у центрі витків, якщо вони мають однаковий радіус R=5 см і струм у витках теж однаковий I=1А.

16.8. Два нескінченні дротяні провідники зі струмами I_1=60А і I_2=20А схрещені під прямим кутом. Відстань між провідниками a=20см. Визначити індукцію магнітного поля B у точці, яка однаково віддалена від кожного з провідників.

16.9. Соленоїд довжиною l=20см має N=1000 витків. Знайти індукцію магнітного поля B у середині соленоїда при струмі в ньому I=5А.

16.10. Знайти напруженість H усередині соленоїда, яким тече струм I=2А. Соленоїд зроблено з дроту діаметром d=1 мм так, що витки щільно прилягають один до одного.

16.11. Два нескінченні тонкі провідники зі струмами I_1=10А і I_2=5А розташовані паралельно на відстані a=5см. Струми напрямлені однаково. Визначити магнітну індукцію B у точці, яка віддалена від першого провідника на відстань r_1=4 і від другого – на відстань r_2=3 см.

16.12. Визначити магнітну індукцію B поля, утвореного відрізком провідника довжиною l=20 см зі струмом I=10 А, в точці, яка рівновіддалена від кінців провідника і знаходиться на відстані R=4 см від його середини.

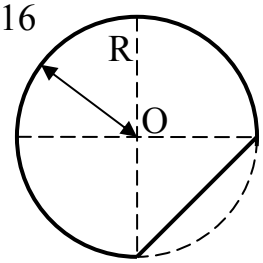
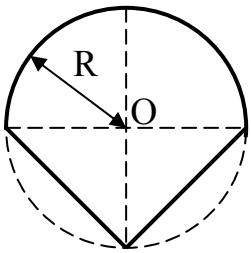
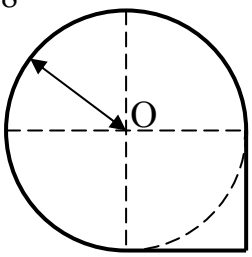
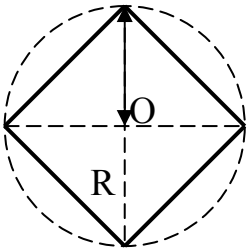
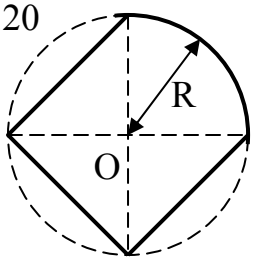
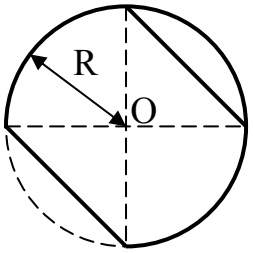
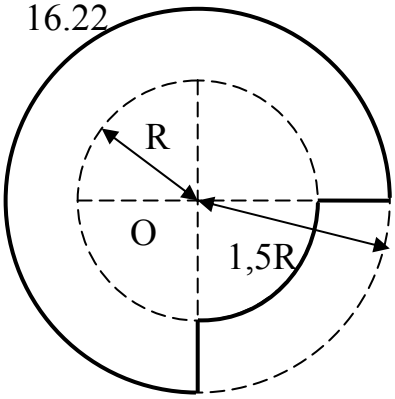
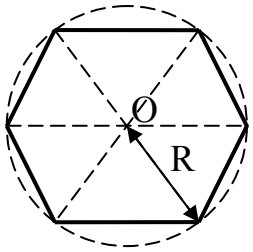
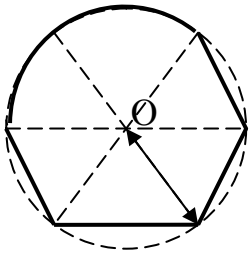
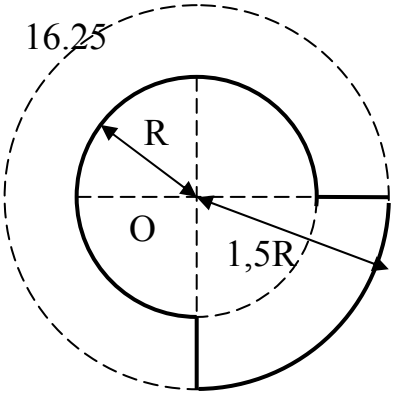
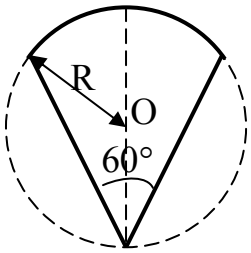
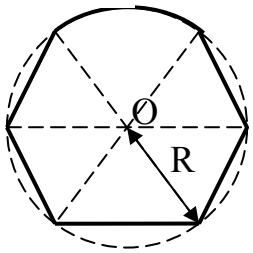
16.13. Визначити магнітну індукцію B у центрі кругового витка радіусом R=20 см, якщо його магнітний момент P_m=5 А·м^2.

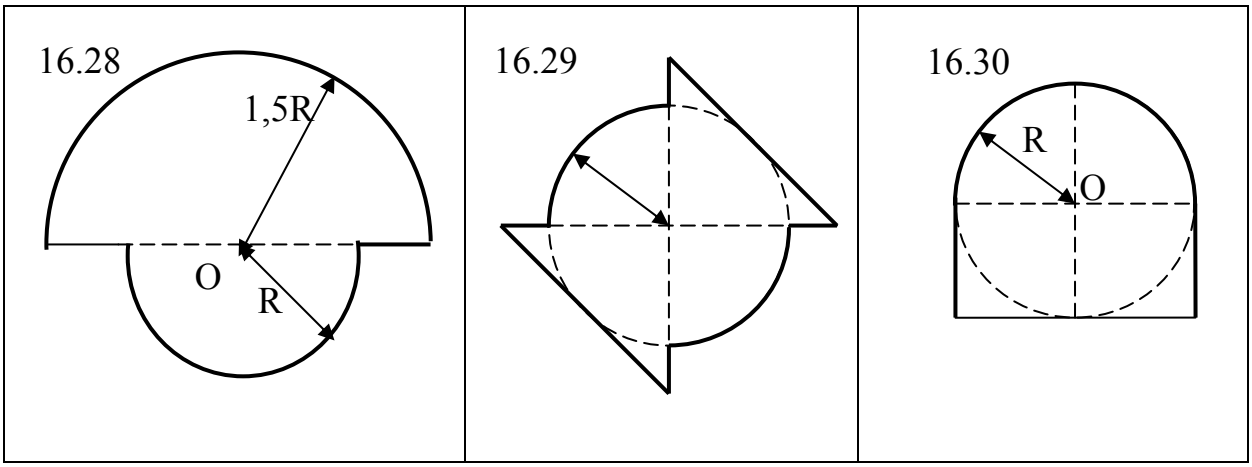
16.14. Довжина соленоїда l=20 см, магнітний потік через соленоїд Ф=10мкВб. Знайти магнітний момент P_m соленоїда.

16.15. Визначити момент сили M, який діє на виток зі струмом I=20А, вміщений у однорідне магнітне поле індукцією B=0,5Тл. Радіус витка R=20см, площина витка складає з лініями індукції φ=30°.

16.16–16.30*. Вздовж контуру, виготовленого з тонкого дроту, тече струм I=1А. Визначити індукцію магнітного поля, створеного цим струмом в точці O. Контур обирають відповідно номеру задачі з таблиці 16.1. Радіус R=10см. Струм обтікає контур за годинниковою стрілкою.

Таблиця 16.1.

16.16 	16.17 	16.18 
16.19 	16.20 	16.21 
16.22 	16.23 	16.24 
16.25 	16.26 	16.27 



16.31. В однорідному магнітному полі з індукцією $B = 0{,}1$Тл розміщена квадратна рамка площиною $S = 25$ см^2. Нормаль до площини рамки складає з напрямом магнітного поля кут 60º. Визначити момент сил, що діють на рамку з боку магнітного поля, якщо по ній проходить струм $I = 1$А.

16.32. В однорідному магнітному полі з індукцією $B = 0{,}5$ Тл знаходиться прямокутна рамка зі струмом I=1 А, площина якої паралельна лініям магнітній індукції. Довжина рамки $a = 8$ см, ширина $b = 5$ см, кількість витків у рамці N=100. Визначити: 1) магнітний момент рамки; 2)обертальний момент, який діє на рамку.

16.33. Частина прямолінійного провідника зі струмом I=20А довжиною l=40см знаходиться у однорідному магнітному полі індукцією B=0,2Тл. Провідник розташовано перпендикулярно до ліній магнітного поля. Яка сила діє на провідник з боку магнітного поля?

16.34. Два прямолінійні провідника довжиною l=2м кожен розташовані паралельно на відстані a=10см. По провідниках протікають струми $I_1 = I_2 = 10$А. Визначити силу F взаємодії між провідниками.

16.35. Два прямолінійних паралельних провідника розташовані на відстані a_1=10см. По провідниках у однаковому напрямку протікають струми I_1=10А і I_2=30А. Яку роботу А треба виконати, щоб відстань між провідниками збільшити удвічі?

16.36. Провідник довжиною l=20см рухається рівномірно у магнітному полі індукцією B=0,5мТл. Швидкість провідника v=20м/с і напрямлена перпендикулярно до ліній індукції. Чому дорівнює різниця потенціалів U на кінцях провідника?

16.37. Металевий провідник довжиною l=10см рухається у однорідному магнітному полі індукцією B=0,5Тл. Через провідник тече струм I=1А. За час t=10с на переміщення провідника виконана робота A=0,1Дж. Визначити швидкість v переміщення провідника.

16.38. Електрон, прискорений різницею потенціалів U=1кВ, потрапляє у однорідне магнітне поле індукцією B=1мТл під прямим кутом до ліній

індукції. Знайти магнітний момент P_m, утворений еквівалентним круговим струмом.

16.39. Електрон, прискорений різницею потенціалів U=300В, влітає в однорідне магнітне поле перпендикулярно до ліній магнітної індукції. Індукція магнітного поля B=2мТл. Знайти радіус траєкторії електрона.

16.40. Електрон, прискорений різницею потенціалів U=1кВ, влітає в однорідне магнітне поле індукцією B=2мТл перпендикулярно до ліній індукції. Знайти тангенціальне a_τ і нормальне a_n прискорення електрона.

16.41. Електрон влітає в однорідне магнітне поле індукцією B=1мТл перпендикулярно до ліній індукції. Знайти період T обертання електрона.

16.42. Протон і електрон влітають в однорідне магнітне поле під прямим кутом до ліній магнітної індукції. У скільки разів період обертання електрона відрізняється від періоду обертання протона?

16.43. Протон, прискорений різницею потенціалів U=200В, влетів в однорідне магнітне поле під кутом α=45° до ліній індукції. Індукція B=20мТл. Визначити радіус R і крок h траєкторії протона.

16.44. Електрон влітає у схрещені під прямим кутом однорідні електричне (E=1,2 кВ/м) та магнітне (B=1мТл) поля і далі рухається прямолінійно. Визначити швидкість v, з якою електрон влетів у електромагнітне поле.

16.45. α- частинка влітає в однорідне магнітне поле індукцією B=0,2Тл під кутом α=30° до ліній поля і рухається по гвинтовій лінії радіусом R=2см. Визначити (у електрон-вольтах) кінетичну енергію W α-частинки. (Маса α- частинки $m=6{,}64\cdot10^{-27}$ кг.)

16.46. Електромагнітне поле утворене однорідними магнітним (B=10мТл) і електричним (E=1кВ/м) полями, розташованими так, що їх силові лінії напрямлені однаково. Електрон влітає в електромагнітне поле у напрямку силових ліній зі швидкістю $v=1{,}2\cdot10^5$ м/с. Знайти повне прискорення електрона.

16.47. Електрон, прискорений різницею потенціалів U=2кВ, влітає в магнітне поле соленоїда під кутом α=60° до його осі. Число витків соленоїда N=1000, його довжина l=20 см, струм у соленоїді I=1A. Знайти крок гвинтової лінії траєкторії електрона.

16.48. Протони прискорюються в циклотроні в однорідному магнітному полі з індукцією B=1,2 Тл. Максимальний радіус кривизни траєкторії протонів складає R=40 см. Визначити кінетичну енергію протонів в кінці прискорення.

16.49. Стрижень довжиною l=1м обертається в однорідному магнітному полі індукцією B=20мТл, виконуючи протягом t=1хв. N=120 повних обертів. Вісь обертання перпендикулярна до стрижня, проходить через його кінець і співпадає з напрямком індукції $\vec{B}$. Визначити ЕРС індукції ε, яка виникає на кінцях стрижня.

16.50. Круговий виток діаметром d=16см обертається у однорідному магнітному полі індукцією B=2Тл. Вісь обертання перпендикулярна до площини витка, проходить через його центр і збігається за напрямком з лініями $\vec{B}$. Знайти середнє значення ЕРС індукції, яка виникає у витку, якщо магнітне поле зменшується до нуля за час t=5мс.

16.51. Дротяна рамка квадратної форми зі стороною a=12,5см рівномірно обертається у однорідному магнітному полі, індукція якого B=1Тл. Вісь обертання розташована у площині рамки і складає кут α=45° з напрямком ліній індукції. Кутова швидкість обертання ω=20 рад/с. Знайти максимальне значення ЕРС індукції ε_{imax} у рамці.

16.52. В однорідному магнітному полі з магнітною індукцією B=0,2 Тл рівномірно з частотою n=600 хв$^{-1}$. обертається рамка, яка містить N=1200 витків, які щільно прилягають один до одного. Площина рамки S=100 см^2. Вісь обертання лежить в площині рамки і перпендикулярна лініям магнітної індукції. Визначити максимальну ЕРС, яка виникає у рамці.

16.53. Соленоїд діаметром d=4 см, який має N=500 витків, поміщений в магнітне поле, індукція якого змінюється зі швидкістю 1мТл/с. Вісь соленоїда складає з вектором магнітної індукції кут α=45°. Визначити ЕРС індукції, яка виникає в соленоїді.

16.54. Визначити індуктивність кола, якщо при зміні струму за законом $I = (1 - 0,2t)$ А, у ньому виникає ЕРС самоіндукції $\mathcal{E}_{si}$=40мВ.

16.55. Квадратна дротяна рамка вміщена у однорідне магнітне поле індукцією B=50мТл під кутом α=30° до ліній поля. Сторона рамки a=3,5см, опір R=10Ом. Який заряд q пройде крізь переріз рамки, якщо зникне магнітне поле?

16.56. Круговий дротяний виток площею S=8см^2 і опором R=2Ом вміщено у однорідне магнітне поле індукцією B=0,25Тл. Нормаль $\vec{n}$ витка збігається за напрямком з вектором $\vec{B}$. Який заряд пройде крізь переріз витка, якщо виток повернути на кут α=90°?

16.57. Визначити силу струму I у колі через t=0,01с після розмикання. Опір кола R=10Ом, індуктивність L=0,05Гн. Сила струму до розмикання I_0=20А.

16.58. Котушку індуктивністю L=0,6 Гн вмикають до джерела струму. Визначити опір котушки, якщо за час t=3 с сила струму у котушці досягає 80% максимального значення.

16.59. Електричне коло складається з котушки опором R=20Ом і індуктивністю L=1,73Гн, підключеної до джерела струму. Визначити в який момент часу t після відімкнення джерела і замикання котушки на коротко струм I у колі зменшитися у 2 рази.

16.60. Котушка індуктивністю L=0,15Гн і опором R=10Ом підключається до джерела струму. Через який час після підключення струм у колі набуде значення, яке дорівнює половині від максимально можливого?

16.61.–16.67*. Котушка індуктивністю L=0,2Гн и опором R_1=1Ом і резистор опором R_2=4Ом з'єднані паралельно та підключені до джерела, ЕРС якого $\mathcal{E}$=24В, за допомогою вимикача К (рис.16.13). В деякий момент часу коло розмикають. Визначити величину, яка указана у таблиці 16.2 для відповідного номера задачі. Внутрішнім опором джерела струму знехтувати.

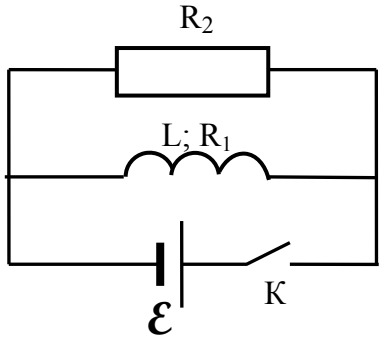


Рис. 16.13

16.68.–16.74*. Котушку індуктивністю L=0,4Гн і опором 0,5Ом в деякий момент часу підключили послідовно з опором R_2=0,5Ом до джерела, ЕРС якого $\mathcal{E}$=24В (рис. 16.14). Визначити величину, яка указана у таблиці 16.2 для відповідного номера задачі. Внутрішнім опором джерела струму знехтувати.

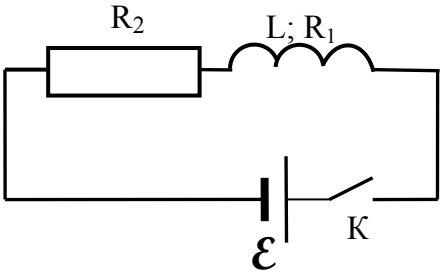


Рис. 16.14

Таблиця 16.2.

Номер задачі	Величина, яку необхідно визначити
16.61	Напругу на опорі R_2 за 0,1 с після вимикання джерела
16.62	Струм у опорі R_2 за 0,1 с після вимикання джерела
16.63	Енергію магнітного поля в котушці за 0,1с після вимикання джерела
16.64	Час, за який сила струму в котушці зменшиться у 3 рази
16.65	ЕРС самоіндукції в котушці 0,1с після вимикання джерела
16.66	Кількість теплоти, яка виділиться у резисторі R_2 протягом 0,1 с.
16.67	Час, за який магнітна індукція в котушці зменшиться у 2 рази.
16.68	Силу струму у колі за 0,1с після його замикання.
16.69	Напругу на опорі R_2 за 0,1 с після замикання кола.
16.70	Напругу на котушці R_1 за 0,1 с після замикання кола.
16.71	Енергію магнітного поля в котушці за 0,1с після замикання кола.
16.72	Час, за який сила струму в колі досягне половини максимального значення.
16.73	Кількість теплоти, яка виділиться у резисторі R_2 протягом 0,1 с.
16.74	Час, за який магнітна індукція в котушці досягне половини максимального значення.

16.75. Індуктивність соленоїда L=1,2мГн. Скільки витків має цей соленоїд, якщо при струмі I=1A магнітний потік крізь соленоїд Ф=2,5мкВб?

16.76. Соленоїд діаметром D=5см намотано з дроту діаметром d=0,5мм так, що витки щільно прилягають один до одного. Індуктивність соленоїда L=1мГн. Скільки витків N має соленоїд. Осердя відсутнє.

16.77. Залізне осереддя знаходиться в однорідному магнітному полі напруженість якого H=2кА/м. Визначити індукцію магнітного поля в осередді і магнітну проникність заліза. Явище гістерезису не ураховувати.

16.78. На сталеве кільце намотано в один шар N=500 витків дроту. Середній діаметр кільця d=20см. Знайти індукцію магнітного поля у сталі і магнітну проникність сталі, якщо сила струму в обмотці: 1) 0,5A; 2) 1A; 3)2,5A. Провести аналогічні розрахунки для залізного та чавунного кільця.

16.79. Скільки ампер-витків на 1см необхідно для того, щоб отримати магнітний потік $Ф_B$=500мкВб у залізному осередді замкненого соленоїда (тороїда), якщо переріз осереддя дорівнює S=5см^2?

16.80. Соленоїд складається з N=800 витків і має діаметр d=5см. Крізь обмотку протікає струм I=2,5A. Соленоїд має залізне осердя. Індуктивність соленоїда за таких умов L=0,5Гн. Визначити магнітну проникність μ залізного осердя.

16.81. Визначити енергію магнітного поля котушки, яка містить N=120витків, якщо при струмі I=5A магнітний потік в ній дорівнює $\Phi_1 = 2,5 \cdot 10^{-3}$ Вб.

16.82. Соленоїд довжиною l=0,5м і діаметром d=1,6см має індуктивність L=0,18мкГн. Який струм I треба пропустити крізь соленоїд для того, щоб об'ємна густина енергії всередині соленоїда дорівнювала W_0=1,2мДж/м^3?

16.83. Довгий соленоїд індуктивністю L=4 мГн містить N=600 витків. Площа поперечного перерізу соленоїда S=20 см^2. Визначити магнітну індукцію поля в середині соленоїда, якщо сила струму в соленоїді дорівнює 6A.

16.84. Соленоїд намотано на залізне осереддя, площа поперечного перерізу якого S=5 см^2. При силі струму I=5A магнітний потік $Ф_B$=200мкВб. Визначити кількість витків, яка припадає на одиницю довжини соленоїда.

16.85. Соленоїд індуктивністю L=0,2Гн і опором R=90Ом підключений до джерела з напругою U=170sinωt, В. Визначити амплітудне значення струму, який тече крізь соленоїд.

16.86. Електричне коло складається з конденсатора ємністю C=18мкФ і активного опору R=100Ом. Ефективне значення прикладеної напруги U=120В; частота ν=50Гц. Визначити величину струму I у колі; cosφ; потужність P струму.

16.87. Конденсатор підключено до мережі змінного струму, частота якого ν=50Гц, а амплітудне значення напруги U=400В. Ефективне значення струму у колі I=2A. Знайти ємність C конденсатора.

16.88. У мережі змінного струму напругою U=220В і частотою ν=50Гц підключені послідовно конденсатор (C=35,4мкФ), активний опір (R=100Ом) і індуктивність (L=0,7Гн). Визначити струм I у колі та напругу на конденсаторі; активному опорі і індуктивності.

Тести

Вибрати вірну відповідь:

1.Силовою характеристикою магнітного поля є

1. магнітний момент
2. вектор намагніченості
3. магнітна індукція
4. індуктивність

2. Не залежить від магнітних властивостей речовини, в якій створено магнітне поле,

1. магнітна індукція поля
2. напруженість магнітного поля
3. магнітний потік
4. вектор намагніченості

3. Заряджена частинка, яка рухається, утворює

1. електричне поле 2. магнітне поле 3. обидва поля

4. Магнітний момент контуру зі струмом залежить від:

1. орієнтації рамки
2. струму у контурі
3. площини поверхні, яка обмежена контуром
4. магнітної індукції поля
5. усіх перелічених величин

5. **Установити відповідність** між величиною та одиницею її вимірювання в СІ:

1. магнітний момент контуру зі струмом	А. Вб (вебер);
2. магнітна індукція	Б. А/м;
3. напруженість магнітного поля	В. Тл (тесла)
4. магнітний потік	Г. Гн (генрі)
5. індуктивність	Д. $А·м^2$

Вибрати вірну відповідь:

6. Момент сил, який діє на контур (рамку) зі струмом у магнітному полі, залежить від

1. орієнтації рамки
2. струму у контурі
3. площини поверхні, яка обмежена контуром
4. магнітної індукції поля
5. усіх перелічених факторів

7. Момент сил, який діє на рамку зі струмом у магнітному полі дорівнює нулю, якщо

1. кут між силовими лініями і нормаллю до рамки дорівнює 0^0
2. площина рамки паралельна силовим лініям магнітного поля
3. магнітний момент рамки зі струмом перпендикулярний силовим лініям магнітного поля
4. кут між силовими лініями і нормаллю до рамки дорівнює 90^0

8. Момент сил, який діє на рамку зі струмом у магнітному полі приймає максимальне значення, якщо

1. площина рамки перпендикулярна силовим лініям магнітного поля
2. кут між силовими лініями і нормаллю до рамки дорівнює 90^0
3. магнітний момент рамки зі струмом паралельний силовим лініям магнітного поля
4. кут між силовими лініями і нормаллю до рамки дорівнює 0^0

9. Сила Ампера, яка діє на елемент струму з боку магнітного поля, залежить від
1. орієнтації елементу провідника 2. величини струму
3. магнітної індукції поля 4. довжини провідника
5. усіх перелічених факторів

10. Сила Ампера, яка діє на елемент струму з боку магнітного поля, має максимальне значення, якщо
1. напрям елемента струму співпадає з силовими лініями поля
2. напрям елемента струму перпендикулярний до силових ліній магнітного поля
3. кут між напрямом елемента струму та силовими лініями поля дорівнює нулю
4. величина кута між напрямом елемента струму та силовими лініями поля не впливає на силу Ампера

11. Сила Лоренца, яка діє на заряджену частинку, яка рухається в магнітному полі, залежить від
1. напряму руху частинки 2. величини заряду
3. швидкості руху частинки 4. магнітної індукції поля
5. усіх перелічених факторів

12. **Установити відповідність** між напрямом руху частинки в однорідному магнітному полі та формою траєкторії.

Напрям руху	Траєкторія
1. під гострим кутом до ліній магнітної індукції	А. коло
2. перпендикулярно до ліній магнітної індукції	Б. еліпс
3. вздовж ліній магнітної індукції	В. коло
	Г. пряма лінія

Вибрати вірну відповідь:

13. Сила Лоренца, що діє на заряджену частинку, яка рухається в магнітному полі, дорівнює нулю, якщо
1. напрям руху частинки співпадає з силовими лініями поля
2. напрям руху частинки перпендикулярний до силових ліній магнітного поля
3. кут між напрямом руху частинки та силовими лініями поля дорівнює 90^0
4. величина кута між напрямом руху частинки та силовими лініями поля не впливає на силу Лоренца

14.Якщо сила Лоренца, яка діє на позитивно заряджену частинку, дорівнює половині максимальної, швидкість руху частинки напрямлена
1. вздовж ліній магнітної індукції поля
2. під кутом 30^0 до ліній магнітної індукції поля
3. під кутом 45^0 до ліній магнітної індукції поля
4. перпендикулярно до ліній магнітної індукції поля

15. Закон Біо-Савара-Лапласа у скалярній формі має вигляд:

1. $B = \mu\mu_0 H$ 2. $\oint\limits_S d\vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ 3. $B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi}\int\limits_L \frac{\sin\alpha dl}{r^2}$ 4. $B = \frac{\mu\mu_0 I}{2r}$

16. Магнітний потік через деякий контур залежить від
1. площини поверхні, яка обмежена контуром 2. магнітної індукції поля
3. орієнтації контуру в магнітному полі 4.справедливим є все перелічене.

17. **Установити відповідність** між формулою та її змістом

1. Магнітна індукція поля провідника із струмом у формі кола в центрі кола
2. Магнітна індукція поля провідника із струмом у формі кола на осі на відстані *a* від площини кола
3. Магнітна індукція поля, створеного прямолінійним провідником нескінченної довжини зі струмом I, на відстані *r* від провідника
4. Магнітна індукція поля на осі соленоїда нескінченної довжини
5. Магнітна індукція поля, створеного рухомим зарядом

Формула:

А. $B = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi r}$ Б. $B = \mu_0 \mu n I$ В. $B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q\left[\vec{v}\vec{r}\right]}{r^3}$ Г. $B = \frac{\mu_0 \mu I}{2r}$ Д. $B = \frac{\mu_0 \mu I R^2}{2\left(a^2 + R^2\right)^{3/2}}$

Вибрати вірну відповідь:

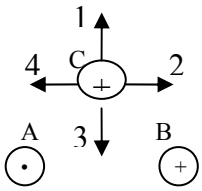
18. Магнітний потік через замкнену поверхню залежить
    1. від форми поверхні 2. від магнітної індукції поля
    3. від орієнтації замкненої поверхні 4. дорівнює нулю
19. Лінії магнітної індукції (силові лінії магнітного поля)
    1. є паралельними прямими 2. ніколи не замикаються самі на себе
    3. завжди замкнені 4. починаються і закінчуються на нескінченності
20. Величина електрорушійної сили індукції визначається
    1. за законом Біо-Савара-Лапласа 2. за законом Ампера
    2. за законом Фарадея 4. за формулою сили Лоренца
21. Індуктивність соленоїда залежить від
    1. наявності осереддя 2. розміру витка
    3. кількості витків 4. справедливим є все, вище перелічене
22. При внесенні сталевого осереддя у соленоїд його індуктивність
    1. зменшується 2. збільшується 3. не змінюється
23. Індуктивність контуру, який знаходиться у вакуумі, залежить від
    1. сили струму у контурі
    2. магнітного потоку, який пронизує контур
    3. матеріалу провідника, з якого зроблений контур
    4. форми і розмірів контуру
24. Величина індукційного струму, який виникає в замкненому провідному контурі залежить від
    1. магнітного потоку, який пронизує контур
    2. зміни магнітного потоку, який пронизує контур
    3. швидкості зміни магнітного потоку, який пронизує контур
    4. серед наведених немає вірної відповіді
25 Залежність між ЕРС індукції та швидкістю зміни магнітного потоку є
    1. прямо пропорційною 2. обернено пропорційною 3. експоненціальною
    4. прямо пропорційною квадрату швидкості зміни магнітного потоку
26. Енергія магнітного поля соленоїда при збільшенні сили струму в ньому в 3 рази
    1. збільшиться у 3 рази 2. збільшиться у 9 разів
    3. зменшиться у 3 рази 4. зменшиться у 9 разів
27. Використовують для виготовлення а)постійних магнітів; б) електромагнітів
    1. м'які феромагнетики 2. жорсткі феромагнетики
    3. обидва види феромагнетиків 4. ані жодний з них

28. **Установити відповідність** між видом магнетику та його характеристиками магнітних властивостей:

1. діамагнетики	А..	$\chi > 0; \mu > 1$
2. феромагнетики	Б.	$\chi < 0; \mu < 1$
3. парамагнетики	В.	$\chi >> 0; \mu >> 1$

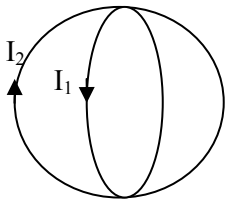
Вибрати вірну відповідь:

29. На рисунку показані перерізи трьох прямих нескінчених провідників (А, В та С), по яких течуть однакові за величиною струми. Напрям сили, що діє на провідник С з боку магнітних полів провідників А та В при заданих напрямах струмів співпадає з напрямом вектора



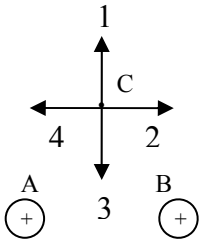
1. 1 2. 2 3. 3 4. 4

30. Два контури приблизно рівного діаметра підвішені так, що можуть обертатися відносно вертикальної осі. Якщо по них пропустити струми у заданих на рисунку напрямах, внаслідок магнітної взаємодії контури



1. розмістяться в одній площині так, що струми в них будуть текти в одному напрямі
2. розмістяться у взаємно перпендикулярних площинах так, що струми в них будуть текти в одному напрямі
3. розмістяться в одній площині так, що струми в них будуть текти у протилежних напрямах
4. розмістяться у взаємно перпендикулярних площинах так, що струми в них будуть текти у протилежних напрямах

31. На рисунку показані перерізи двох прямих нескінчених провідників зі струмами (А та В), однаковими за величиною. Напрям вектора магнітної індукції у точці С магнітного поля провідників А та В при заданих напрямах струмів співпадає з напрямом вектора



1. 1 2. 2 3. 3 4. 4

32. Електрон, протон і α-частинка (ядро гелію) влітають з однаковою швидкістю в однорідне магнітне поле. Коло найменшого радіуса описує

1. електрон 2. протон
3. α-частинка 4. радіуси траєкторій частинок однакові

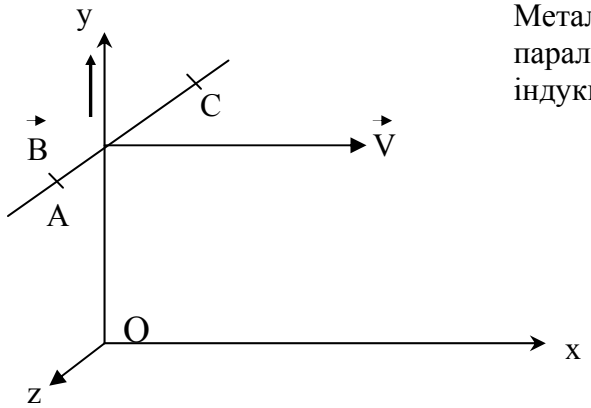
33. Два електрони рухаються в однорідному магнітному полі по колу, причому радіус кола першого електрона у два рази більший за радіус другого кола ($R_1/R_2 = 2$).. Для швидкостей цих частинок справедливе співвідношення:

1. $v_1/v_2 = 4$ 2. $v_2/v_1 = 2$ 3. $v_1/v_2 = 2$ 4. $v_1 = v_2$

34. Два електрони рухаються в однорідному магнітному полі по колу, причому радіус кола першого електрона у два рази більший за радіус другого кола ($R_1/R_2 = 2$).Для періодів обертання цих частинок справедливе співвідношення:

1. $\frac{T_1}{T_2} = 4$ 2. $\frac{T_2}{T_1} = 2$ 3. $\frac{T_1}{T_2} = 2$ 4. $T_1 = T_2$

35.



Металевий дріт АС рухається у магнітному полі паралельно площині XOZ. Лінії магнітної індукції В напрямлені вздовж осі у.

1. Точки А і С мають однакові потенціали;
2. Потенціал точки А вищий за потенціал точки С;
3. Потенціал точки С вищий за потенціал точки А.

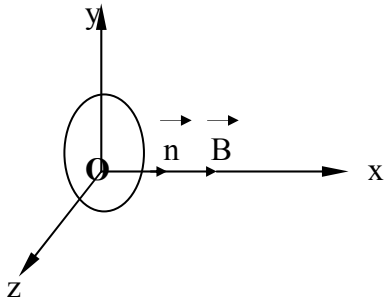
36. За 0,5 с магнітний потік, який пронизує контур, збільшився від 1Вб до 5Вб. Значення ЕРС індукції, що виникає при цьому в контурі, дорівнює:

1. 8 В 2. 6 В 3. 4 В 4. 2 В 5. 1 В

.

37. Дротяне кільце міститься у магнітному полі перпендикулярно до ліній магнітної індукції В. У кільці виникає електрорушійна сила

1. при зміні магнітної індукції В
2. при обертанні кільця навколо осі ОУ
3. при обертанні кільця навколо осі ОХ



38. Два стрижня однакової довжини обертаються у однорідному магнітному полі з однаковою кутовою швидкістю. Вісь обертання співпадає з напрямком індукції $\vec{B}$, перпендикулярна до стрижнів і проходить у першого стрижня через його кінець, у другого – через середину. Для ЕРС індукції E_i, що виникає у стрижнях, справедливе відношення:

1. $\frac{E_{i1}}{E_{i2}} = 2$ 2. $\frac{E_{i1}}{E_{i2}} = \frac{1}{2}$ 3. $\frac{E_{i1}}{E_{i2}} = 4$ 4. $\frac{E_{i1}}{E_{i2}} = \frac{1}{4}$

39. Із кільцевого контуру радіуса R , який знаходиться в однорідному магнітному полі, зробили квадратний без зміни периметра. Як і у скільки разів зміниться магнітний потік, який пронизує контур?

1. зменшиться у $\frac{4}{\pi}$ разів 2. збільшиться у $\frac{4}{\pi}$ разів 3. не зміниться

40. **Установити відповідність** між властивістю електромагнітного поля та рівнянням Максвелла, яке її відображує

1. відсутність у природі магнітних зарядів
2. вихровий характер електричного поля, утвореного змінним магнітним полем
3.. можливість утворення магнітного поля електричним
4. вихровий характер електричного поля, утвореного змінним магнітним полем

А. $\oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\oint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$ Б. $\oint_S d\vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ В $\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \int \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}$ Г. $\oint_S d\vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV$

Частина IV. КОЛИВАННЯ ТА ХВИЛІ. ОПТИКА.

Розділ 17. Коливальні та хвильові процеси

Тема: Характеристики коливальних процесів. Гармонічні коливання. Диференціальне рівняння гармонічних коливань і його розв'язки. Фізичні задачі, що приводять до рівняння гармонічних коливань: пружний маятник, фізичний та математичний маятник. Вільний коливальний контур. Згасаючі коливання., їх диференціальне рівняння та його розв'язок. Фізичні задачі, що приводять до рівняння згасаючих коливань: пружний маятник при наявності опору середовища: коливальний контур при наявності омічного опору. Вимушені коливання системи. Диференціальне рівняння вимушених коливань та його розв'язок. Електричне коло з послідовно з'єднаними опором, конденсатором, котушкою індуктивності та джерелом ЕРС, яка змінюється за гармонічним законом. Явище резонансу. Додавання когерентних коливань. Биття. Додавання взаємно перпендикулярних коливань однакової частоти.

Розповсюдження коливань у пружному середовищі. Рівняння плоскої біжучої монохроматичної хвилі. Хвильове рівняння. Звук та його характеристики. Ефект Допплера в акустиці. Стоячі хвилі. Електромагнітні хвилі та їх властивості.

Основні поняття і формули

У природі часто зустрічаються явища, яким в тій чи іншій мірі притаманна періодичність, процеси, в яких деяка система багаторазово відхиляється від положення рівноваги і знов повертається до нього. Подібні процеси об'єднуються під загальною назвою «коливання» незалежно від того, яка саме фізична величина періодично змінюється, і допускають однаковий математичний опис за допомогою диференціальних рівнянь того самого виду. Саме тому питання, які пов'язані з вивченням коливань та хвиль будь-якої фізичної природи (механічні чи електромагнітні) виділені в окремий розділ.

17.1. Кінематика і динаміка коливального руху

● **Коливаннями** називають процеси (зміни стану або руху), які повторюються у часі в тій чи іншій степені.

Розрізняють коливання:

- механічні (маятник, струни, механізм годинника, частини будівель і т. ін.);
- електромагнітні (змінний електричний струм, вектори напруженості електричного та магнітного полів електромагнітної хвилі);
- електромеханічні (мембрани телефонів)

Система, що здійснює коливання носить назву **коливальної** .

● **Вільні** коливання – коливання**,** які здійснюються при відсутності змінної зовнішньої дії внаслідок відхилення системи від стану рівноваги. При відсутності втрат енергії (тобто сили тертя, опору, омічного опору у коливальному контурі) вільні коливання називають **власними коливаннями** системи.

● Коливання називають **періодичними**, якщо значення фізичних величин, які характеризують коливальну систему, повторюються через рівня проміжки часу. Найменший проміжок часу, який задовольняє цій умові, має назву **періоду** T. Тобто при періодичних коливаннях залежність змінної величини S від часу задовольняє умові

$$S(t \pm T) = S(t).$$

Кількість повних коливань, яка здійснюється за одиницю часу називають **частотою** коливань ν, а за 2π одиницю часу – **циклічною частотою** ω:

$$\nu = \frac{1}{T} \quad (17.1а); \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad (17.1б);$$

$$\omega = 2\pi\nu . \qquad (17.2)$$

● **Гармонічним** називають коливання, яке здійснюється за законом синусу або косинусу:

$$S(t) = A\sin(\omega t + \varphi_{01}), \qquad (17.3а)$$

або

$$S(t) = A\cos(\omega t + \varphi_{02}). \qquad (17.3б)$$

Тут $A = S_{max} = const$ – **амплітуда** коливань, яка дорівнює максимальному значенню величини $S(t)$, $\varphi = \omega t + \varphi_0$ – фаза коливання; $\varphi_0 = \varphi(0)$ – початкова фаза коливань. Рівняння (17.3а) і (17.3б) рівноправні, але відрізняються значенням початкової фази.

● **Диференціальне рівняння власних гармонічних коливань:**

$$\frac{d^2S}{dt^2} + \omega_0^2 S = 0. \qquad (17.4)$$

Його розв'язок можна представити у стандартному вигляді (17.3а) або (17.3б):

$$S(t) = \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \qquad (17.5)$$

Сталі інтегрування A і φ_0 можуть бути визначені, якщо відомі початкові умови, наприклад значення функції S та її першої похідної в початковий момент часу t=0.

● **Гармонічний осцилятор** – коливальна система, яка здійснює періодичні коливання і використовується у якості точної або наближеної моделі в багатьох задачах класичної та квантової фізики. Прикладами гармонічного осцилятора є: **пружний, фізичний і математичний**

маятники, а також **коливальний контур** (при малих струмах та напругах).

● **Пружний маятник** – вантаж маси m, закріплений на абсолютно пружній пружині з жорсткістю k, який здійснює гармонічні коливання під дією пружної сили $F = -kx$ (рис. 17.1), де x – зміщення кульки від стану рівноваги.

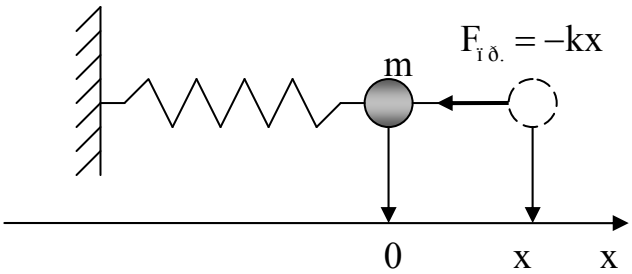


Рис. 17.1

Рівняння руху такої системи (II закон Ньютона) має вигляд:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \text{або} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Лінійний гармонічний осцилятор здійснює коливання за законом

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0) \qquad (17.6)$$

з циклічною частотою власних коливань ω_0 і періодом T_0:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (17.7); \qquad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (17.7a)$$

Швидкість матеріальної точки, яка здійснює гармонічні коливання за законом (4.6), дорівнює $v = \frac{dx}{dt} = A\omega_0\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$; (17.8)

Її **прискорення**: $a = \frac{dv}{dt} = -A\omega_0^2\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ (17.9)

Коливання швидкості випереджають за фазою коливання змішення на $\pi/2$, коливання прискорення – на π.

Кінетична енергія системи, яка здійснює гармонічні коливання за законом (17.6): $W_к = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega_0^2A^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)$. (17.10)

Потенціальна енергія: $W_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega_0^2A^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)$. (17.11)

Значення кінетичної та потенціальної енергії здійснюють гармонічні коливання відносно значення $kA^2/4$ з частотою $2\omega_0$.

Повна енергія: $W = \frac{m\omega_0^2A^2}{2} = \frac{kA^2}{2}$. (17.12)

● **Фізичний маятник** – тверде тіло довільної форми, що здійснює коливання під дією сили тяжіння відносно нерухомої горизонтальної осі, яка не проходить через центр мас і має назву осі маятника (рис. 17.2).

Гармонічні коливання фізичного та математичного маятників здійснюються під дією квазіпружної сили, роль якої виграє сила тяжіння.

Квазіпружною називають не пружну за своєю природою силу, якій притаманні ті самі властивості, що має пружна сила, тобто: 1) її величина є пропорційною лінійному або кутовому зміщенню тіла від положення рівноваги; 2) вона завжди направлена до положення рівноваги.

При відхиленні маятника від вертикалі виникає обертальний момент $M = -mgl\sin\alpha$, який повертає маятник у положення рівноваги. Рівняння руху маятника (на основі закону динаміки обертального руху) має вигляд:

$$I\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mgl\sin\alpha,$$

де I – момент інерції маятника відносно осі коливань O; l – відстань від точки підвісу O до центра мас маятника C.

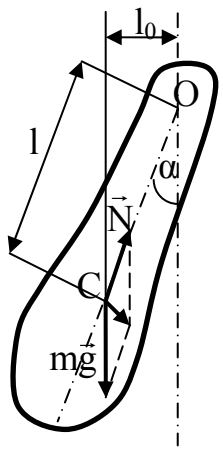


Рис. 17.2

При невеликих кутах відхилення ($\alpha \simeq 6°$) $\sin\alpha \approx \alpha$. Обертальний момент $M \approx -mgl\alpha$ виграє роль квазіпружної сили, і рівняння переходить у рівняння гармонічних коливань:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mgl}{I}\alpha = 0.$$

Його розв'язок: $\alpha(t) = \alpha_0\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ (17.13)

Циклічна частота власних коливань маятника ω_0 і період T_0:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I}} \quad (17.14); \qquad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}} \quad (17.14a)$$

Сталі інтегрування α_0 і φ_0 можуть бути визначені з відомих початкових умов.

● **Математичний маятник –** ідеалізована система, яка складається з маси, зосередженій в одній точці (матеріальної точки), яка підвішена на невагомій нерозтяжній нитці (рис. 17.3).

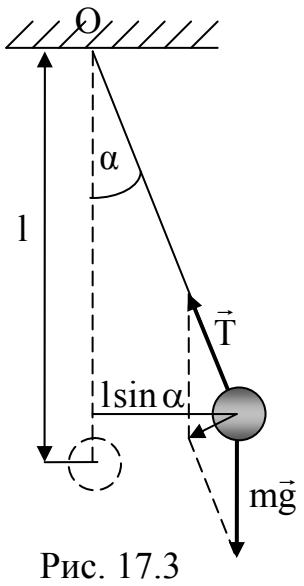


Рис. 17.3

З урахуванням того, що момент інерції математичного маятника визначається за формулою $I = ml^2$ формули (17.14) і (17.14a) для циклічної частоти власних коливань ω_0 і періоду T_0 набувають вигляду

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (17.15); \qquad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (17.15a)$$

● **Вільний коливальний контур** –електричне коло, яке складається із зарядженого конденсатора C та котушки індуктивності L (рис.17.4).

Рівняння власних коливань заряду на обкладинках конденсатора, записане на основі II правила Кірхгофа, має вигляд:

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{1}{LC}q=0.$$

Його розв'язком є вираз

$$q=q_0\sin\left(\omega_0 t+\varphi_0\right). \qquad (17.16)$$

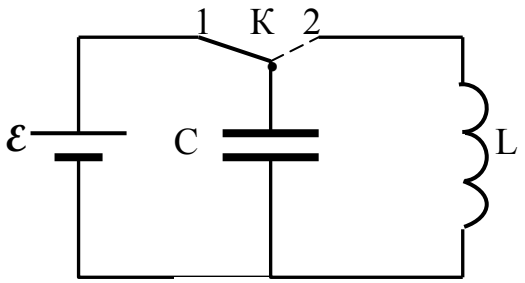


Рис. 17.4

Циклічна частота ω_0 і період T_0 власних коливань визначаються за формулами: $\omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}}$; (17.17) $T_0=2\pi\sqrt{LC}$. (17.17а)

Зрозуміло, що напруга U на обкладинках конденсатору і сила струму I у контурі також змінюються за гармонічним законом:

$$U=\frac{q_0}{C}\sin\left(\omega_0 t+\varphi_0\right)=U_0\sin\left(\omega_0 t+\varphi_0\right). \qquad (17.18)$$

$$I=\frac{dq}{dt}=q_0\omega\cos\left(\omega_0 t+\varphi_0\right)=I_0\sin\left(\omega_0 t+\varphi_0\right). \qquad (17.19)$$

● **Вільні згасаючі коливання** – вільні коливання із згасаючою амплітудою. Зменшення амплітуди є результатом витрат енергії внаслідок наявності в реальній фізичний системі тертя, опору середовища, омічного опору. Диференціальне рівняння згасаючих коливань:

$$\frac{d^2S}{dt^2}+2\beta\frac{dS}{dt}+\omega_0^2S=0. \qquad (17.20)$$

Його розв'язок: $S=S_0\,e^{-\beta t}\sin\left(\omega t+\varphi_0\right)$. (17.21)

Тут $S_0=A(0)$ – значення амплітуди в початковий момент часу t = 0; $A(t)=A(0)e^{-\beta t}=S_0\,e^{-\beta t}$ (17.22) – значення амплітуди в момент часу t; ω – частота коливань; φ_0 – початкова фаза коливань; β – коефіцієнт згасання.

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}; \quad (17.23) \qquad T=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}. \quad (17.23а)$$

Згасаючі коливання не є періодичними, однак, величина S приймає нульові, максимальні та мінімальні значення через однакові проміжки часу. Тому величини ω і T називають відповідно **умовною циклічною частотою і умовним періодом.**

Час релаксації τ – проміжок часу, за який амплітуда коливань зменшується в "e" разів: $\frac{S_0\,e^{-\beta t}}{S_0\,e^{-\beta(t+\tau)}}=e^{\beta\tau}=e$. Звідки $\beta\tau=1$.

Таким чином **коефіцієнт згасання β** є величиною, оберненою часу релаксації τ: $\beta = \frac{1}{\tau}$.

Де**кремент згасання** – відношення амплітуд в моменти часу, які відрізняються на умовний період: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{S_0 e^{-\beta t}}{S_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T}$.

Логарифмічний декремент згасання – натуральний логарифм відношення амплітуд в моменти часу, які відрізняються на умовний період.

$$\delta = \ln\frac{A_1}{A_2} = \ln e^{\beta T} = \beta T. \qquad (17.24)$$

З урахуванням співвідношення між β і часом релаксації τ отримуємо:

$$\delta = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e},$$

де N_e – кількість коливань, за яку амплітуда зменшується в "e" разів.

Добротність коливальної системи – безрозмірна фізична величина Q, яка дорівнює добутку 2π на відношення енергії коливань W(t) до збитку цієї енергії за умовний період коливання:

$$Q = \frac{2\pi W(t)}{W(t) - W(t+T)} = 2\pi\frac{A^2(t)}{A^2(t) - A^2(t+T)} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\beta T}}.$$

При малих значеннях β можна покласти $e^{-2\beta T} = 1 - 2\beta T$. Тоді, з урахуванням $T \approx T_0$, добротність коливальної системи дорівнює

$$Q = \frac{\pi}{\delta} = \frac{\pi}{\beta T_0} = \frac{\omega_0}{2\beta}. \qquad (17.25)$$

● **Вимушені коливання** – коливання, які виникають у будь-якій системі під впливом змінної зовнішньої дії (змінної сили, змінної ЕРС и т. ін.), яка періодично поповнює енергію коливальної системи. У випадку, коли зовнішня сила змінюється за гармонічним законом $F = F_0 \sin\omega t$, диференціальне рівняння вимушених коливань є неоднорідним:

$$\frac{d^2S}{dt^2} + 2\beta\frac{dS}{dt} + \omega_0^2 S = f_0 \sin\omega t. \qquad (17.26)$$

В установленому режимі коливань розв'язок цього рівняння має вигляд:

$$S = S_0 \sin(\omega t + \varphi).$$

Таким чином, частота вимушених коливань системи збігається з частотою зміни примусової сили; сталі інтегрування S_0 (амплітуда) і φ (початкова фаза) залежать від співвідношення між частотою вимушених та власних коливань системи та коефіцієнта згасання β і можуть бути визначені через параметри коливальної системи за початковими умовами (див. таблицю 17.1.)

● **Резонанс** – явище різкого зростання амплітуди вимушених коливань при наближенні частоти примусової сили до $\omega_{рез.}$.

Диференціальні рівняння та вирази для відповідних параметрів у випадку згасаючих та вимушених механічних (пружний маятник) та електромагнітних (коливальний контур) коливань наведені у таблиці 17.1.

Таблиця 17.1.

Вільні (згасаючі) коливання			
механічні		електромагнітні	
Диференціальне рівняння	$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{r}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=0$ $\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0$	Диференціальне рівняння	$\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dq}{dt}+\frac{1}{LC}q=0$ $\frac{d^2q}{dt^2}+2\beta\frac{dq}{dt}+\omega_0^2q=0$
Маса	m	Індуктивність	L
Жорсткість	k	Обернена величина ємності	$\frac{1}{C}$
Коефіцієнт опору	r	Омічний опір	R
Зміщення	$x=x_m e^{-\beta t}\sin(\omega t+\varphi_0)$	Заряд	$q=q_0 e^{-\beta t}\sin(\omega t+\varphi_0)$
Власна частота пружного маятника	$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$	Власна частота коливального контуру	$\omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}}$
Період власних коливань	$T_0=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	Період власних коливань	$T_0=2\pi\sqrt{LC}$
Циклічна частота згасаючих коливань	$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}=$ $=\sqrt{\frac{k}{m}-\left(\frac{r}{2m}\right)^2}$	Циклічна частота згасаючих коливань	$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$ $=\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}$
Коефіцієнт згасання	$\beta=\frac{r}{2m}$ r –коефіцієнт опору	Коефіцієнт згасання	$\beta=\frac{R}{2L}$ R – омічний опір
Логарифм.. декремент згасання	$\delta=\beta T=\frac{\pi r}{\sqrt{mk}}$	Логарифм . декремент згасання	$\delta=\beta T=\pi R\sqrt{\frac{C}{L}}$
Добротність пружного маятника	$Q=\frac{\pi}{\delta}=\frac{1}{r}\sqrt{mk}$	Добротність коливального контуру	$Q=\frac{\pi}{\delta}=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

Вимушені коливання			
механічні		електромагнітні	
Диференціальне рівняння	$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{r}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=$ $=\frac{F_0}{m}\cos\omega t;$ $\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=$ $=\frac{F_0}{m}\cos\omega t.$	Диференціальне рівняння	$\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dq}{dt}+\frac{1}{LC}q=$ $=\frac{\mathcal{E}_0}{L}\sin\omega t$ $\frac{d^2q}{dt^2}+2\beta\frac{dq}{dt}+\omega_0 q=$ $=\frac{\mathcal{E}_0}{L}\cos\omega t.$
Зміщення	$x=A\sin(\omega t+\varphi)$	Заряд	$q=q_0\sin(\omega t+\varphi)$
Амплітуда	$A=\frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}$ $=\frac{F_0}{\omega\sqrt{r^2+\left(\omega m-\frac{k}{\omega}\right)^2}}$	Амплітуда	$q_0=\frac{\mathcal{E}_0/L}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}=$ $=\frac{\mathcal{E}_0}{\omega\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$ $I_0=\frac{\mathcal{E}_0/L}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}=$ $=\frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$
Початкова фаза коливань	$tg\varphi=\frac{\omega_0^2-\omega^2}{2\beta\omega}$	Початкова фаза коливань	$tg\varphi=\frac{\omega_0^2-\omega^2}{2\beta\omega}=\frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R}$
Резонансна частота	$\omega_{рез.}=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$	Резонансна частота (резонанс заряду та напруги) Резонансна частота (резонанс струму)	$\omega_{рез.}=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$ $\omega=\omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}}$

17.2. Додавання коливань

● **Додавання коливань** – визначення закону результуючого коливання, зокрема його амплітуди та початкової фази.

Додавання двох коливань довільних напрямків може бути зведеним до двох випадків: додавання коливань одного напрямку та додавання взаємно перпендикулярних коливань.

● **Додавання двох коливань однакової частоти та одного напрямку.**

При додаванні двох однаково напрямлених гармонічних коливань $x_1=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$ і $x_2=A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$ однакової частоти утворюється гармонічне коливання тієї ж частоти з амплітудою

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)} \qquad (17.27)$$

і початковою фразою φ_0, яка визначається із співвідношення

$$\mathrm{tg}\varphi_0=\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}. \qquad (17.27a)$$

Окремі випадки.

1) Різниця фаз коливань дорівнює нулю або парній кількості π, тобто $\varphi_2-\varphi_1=2\pi m$, де $m=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$. Тоді $\cos(\varphi_2-\varphi_1)=1$ і з формули (17.27) отримуємо $A=A_1+A_2$, тобто амплітуда результуючого коливання дорівнює сумі амплітуд коливань, що додаються (коливання є синфазними).

2) Різниця фаз коливань дорівнює непарній кількості π, тобто $\varphi_2-\varphi_1=(2m+1)\pi$, де $m=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$. Тоді $\cos(\varphi_2-\varphi_1)=-1$ і $A=|A_1-A_2|$. Амплітуда результуючого коливання дорівнює різниці амплітуд коливань, що додаються (коливання у протилежних фазах).

● **Додавання двох коливань одного напрямку близьких за частотою.**

При складанні двох коливань з рівними амплітудами та близькими частотами $x_1=A\cos\omega t$ і $x_2=A\cos(\omega+\Delta\omega)t$ $(\Delta\omega<<\omega)$ утворюється коливання, яке можна розглядати як гармонічне коливання з частотою ω та амплітудою $A_б$, що змінюється за періодичним законом:

$$x=A_б\cos\omega t;$$

$$A_б=\left|2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t\right|. \qquad (17.28)$$

Періодичні зміни амплітуди коливання, які виникають при додаванні двох гармонічних коливань з близькими частотами, мають назву **биття**.

● **Додавання двох коливань одного напрямку, що мають кратні циклічні частоти ω, 2ω, 3ω, …**

При додаванні гармонічних коливань одного напряму і кратних частот отримують періодичне негармонічне коливання, період якого $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Його амплітуда $A(t)$ та початкова фаза $\varphi_0(t)$ можуть бути визначені методом векторних діаграм.

Відповідно будь-яке складне періодичне коливання можна представити у вигляді суми гармонічних коливань з циклічними частотами, які є кратними **основній** циклічній частоті $\omega = \frac{2\pi}{T}$, тобто розкласти в ряд Фур'є:

$$S(t) = f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t\right),$$

де
$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t)\cos k\,\omega t\,dt,\ k = 0,1,2,...$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t)\sin k\,\omega t\,dt,\ k = 0,1,2,...$$

Такий розклад називають гармонічним аналізом складного періодичного коливання. Члени ряду з циклічними частотами ω, 2ω, 3ω,… називають відповідно першою, другою і т. ін. гармоніками. Їх сукупність утворює спектр коливань $S(t)$. Періодичні коливання мають **дискретний** (лінійчатий) спектр.

● Неперіодичні коливання можна представити як результат накладання гармонічних коливань, частоти яких приймають значення у деякому інтервалі (у загальному випадку від 0 до ∞), за допомогою інтегралів Фур'є:

$$S(t) = f(t) = \int_0^{\infty}\left[a(\omega)\cos k\omega t + b(\omega)\sin k\omega t\right]d\omega,$$

де
$$a(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos k\,\omega\xi\,d\xi;$$

$$b(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sin k\,\omega\xi\,d\xi.$$

Спектр неперіодичних коливань, за звичаєм є **суцільним**.

● **Додавання взаємно перпендикулярних коливань однакової частоти.**

Рівняння руху коливань $x = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$; $y = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$ задають рівняння траєкторії у параметричній формі (параметр – час t). Після виключення параметру рівняння траєкторії має вигляд:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1A_2}\cos\Delta\varphi = \sin^2\Delta\varphi, \text{ де } \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1. \qquad (17.29)$$

Це рівняння еліпса, вісі якого не приведені до осей координат. При тому рух точки обмежений значеннями координат $x = \pm A_1$; $y = \pm A_2$.

Окремі випадки.

1) Початкові фази коливань однакові: $\varphi_1 = \varphi_2$; $\Delta\varphi = 0$; $\cos\Delta\varphi = 1$; $\sin\Delta\varphi = 0$. Рівняння (17.29) приймає вигляд:

$$y = \frac{A_2}{A_1}x. \qquad (17.30)$$

Це рівняння прямої, яка проходить через початок координат. Кут нахилу прямої надає умова $\mathrm{tg}\alpha = \frac{A_2}{A_1}$, тобто пряма проходить у першій та третій чверті координатної площини. Такі коливання носять назву **лінійно поляризованих** коливань.

2) Початкова різниця фаз дорівнює π: $\Delta\varphi = \pi$; $\cos\Delta\varphi = -1$; $\sin\Delta\varphi = 0$. Рівняння траєкторії у цьому випадку:

$$y = -\frac{A_2}{A_1}x. \qquad (17.31)$$

– рівняння прямої, що проходить через початок координат у другій та четвертій чверті координатної площини ($\mathrm{tg}\alpha = -\frac{A_2}{A_1}$). Коливання є **лінійно поляризованим.**

В обох випадках амплітуда результуючого коливання дорівнює

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

3) Початкова різниця фаз дорівнює π/2: $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$; $\cos\Delta\varphi = 0$; $\sin\Delta\varphi = 1$. Рівняння (17.29) приймає вигляд:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1 \qquad (17.32)$$

– рівняння еліпса, вісі якого приведені до координатних осей. Такі коливання називають **еліптично поляризованими.** Напрям руху точки вздовж траєкторії – за годинниковою стрілкою.

У випадку $\Delta\varphi = \frac{3\pi}{2}$ отримуємо подібне рівняння траєкторії, але рух вздовж неї відбувається проти годинникової стрілки.

При $A_1 = A_2 = A$ рівняння (17.32) переходить у рівняння кола (коливання циркулярно-поляризовані):

$$x^2 + y^2 = A^2. \qquad (17.32a)$$

17.3. Хвилі та їх характеристики. Пружні хвилі. Звук.

● **Хвильовий процес** або **хвиля** – процес розповсюдження коливань у будь-якому середовищі. Головна властивість усіх хвиль – перенос енергії без переносу речовини.

Розрізняють **повздовжні** та **поперечні** хвилі. У **повздовжній** хвилі напрям коливань збігається з напрямом розповсюдження хвилі. Хвиля є **поперечною**, якщо напрям коливань є перпендикулярним до напряму розповсюдження хвилі.

Періодичність коливань у кожній точці за часом надає циклічна частота ω, періодичність коливань у просторі – **довжина хвилі λ.**

Довжина хвилі λ – відстань між двома точками, різниця фаз коливань яких дорівнює 2π. Це відстань, на яку розповсюджується коливальний процес (хвиля) за один період коливань T:

$$\lambda = vT. \qquad (17.33)$$

Фронт хвилі – геометричне місце точок, до яких дійшов хвильовий процес. У залежності від форми поверхні фронту хвилі розрізняють плоскі, сферичні, циліндричні та більш складні хвилі.

Фазова поверхня – геометричне місто точок, які коливаються в однаковій фазі.

У кожний момент часу фронт хвилі займає певне положення у просторі і переміщується з часом із певною швидкістю, а фазових поверхонь можна провести скільки завгодно. В однорідному середовищі напрям розповсюдження є перпендикулярним до фронту хвилі.

● **Пружні хвилі** виникають у будь-якому пружному середовищі при наявності джерела коливань.

Повздовжні пружні хвилі виникають у середовищі в будь-якому агрегатному стані; поперечні пружні хвилі – тільки в твердих тілах та на поверхні рідини.

Рівняння плоскої біжучої хвилі, що розповсюджується вздовж осі OX, має вигляд:

$$\xi = A\sin\omega(t - \frac{x}{v} + \varphi_0) \quad (17.34) \quad \text{або} \quad \xi = A\cos\omega(t - \frac{x}{v} + \varphi_0') \quad (17.34a),$$

де ξ – зміщення точки з координатою x у момент часу t; v – швидкість (фазова) хвилі, φ_0 та φ_0' - початкові фази коливань.

З використанням співвідношення $\omega = \frac{2\pi}{T}$ та формули (17.33) рівнянню (17.34) можна надати інший вигляд:

$$\xi = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = A\cos\left(\omega t - kx\right), \qquad (17.34б)$$

де $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – хвильове число, або $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{n}$. Тут $\vec{k}$ – хвильовий вектор, $\vec{n}$ – нормаль до хвильової поверхні.

Зв'язок між різницею фаз $\Delta\varphi$ коливань двох точок біжучої хвилі та різницею ходу, тобто різницею Δx відстаней цих точок від джерела коливань

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x.$$

У випадку, коли швидкість хвилі є однаковою в усіх напрямках, а джерело – точковим, хвиля є сферичною. Амплітуда коливань при цьому навіть при відсутності поглинання зменшується з відстанню $\sim\frac{1}{r}$. Рівняння сферичної хвилі: $\xi = \frac{A}{r}\cos\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right)$.

Рівняння плоскої біжучої хвилі (17.34), (17.34а) є розв'язками диференціального рівняння

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} = \frac{1}{v^2}\frac{d^2\xi}{dt^2}, \qquad (17.35)$$

яке має назву **хвильового рівняння**.

У загальному випадку хвильове рівня має вигляд:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{d^2\xi}{dt^2}, \qquad (17.36)$$

За допомогою оператора Лапласа $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ хвильовому рівнянню можна надати вигляду:

$$\Delta\xi = \frac{1}{v^2}\frac{d^2\xi}{dt^2}. \qquad (17.36а)$$

Будь-яка функція, яка задовольняє рівнянню (17.36), описує деяку хвилю. Притому, корінь квадратний з величини, оберненої до коефіцієнту $\frac{1}{v^2}$ при похідній за часом , є фазовою швидкістю хвилі.

● Внаслідок інтерференції хвиль амплітуда досягає максимального значення при виконанні умови

$$\Delta = |x_2 - x_1| = 2m\frac{\lambda}{2} \quad (m = 0,1,2,3,...) \qquad (17.37)$$

і мінімального значення за умовою

$$\Delta = |x_2 - x_1| = (2m+1)\frac{\lambda}{2} \quad (m = 0,1,2,3,...). \qquad (17.38)$$

● **Стоячі хвилі** – коливальний процес, який виникає при накладанні двох зустрічних хвиль однакової частоти та амплітуди.

Рівняння стоячої хвилі:

$$\xi = 2A\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x)\cos\omega t. \qquad (17.39)$$

У виразі (17.39) до фази коливань не входить координата, тому його можна представити у вигляді

$$\xi = A^*\cos\omega t, \quad \text{де} \quad A^* = 2A\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x) \qquad (17.39a)$$

є сумарною амплітудою коливань, яка залежить від координати.

Пучності стоячої хвилі – точки, де координати задовольняють умові $\frac{2\pi}{\lambda}x = \pm m\pi, (m = 0,1,2,...)$ і амплітуда приймає максимальне значення $A^* = 2A$. Координати пучностей:

$$x_{\text{пучн.}} = \pm m\frac{\lambda}{2}. \qquad (17.40)$$

В точках, які задовольняють умові $\frac{2\pi}{\lambda}x = \pm(2m+1)\frac{\pi}{2}, (m = 0,1,2,...)$, сумарна амплітуда дорівнює нулю $A^* = 0$. Це **вузли** стоячої хвилі. Координати вузлів:

$$x_{\text{вузл.}} = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{4}. \qquad (17.41)$$

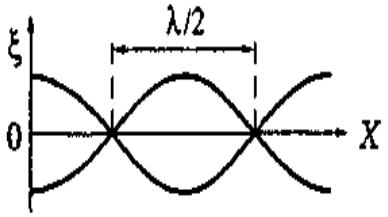


Рис. 17.5

Довжиною стоячої хвилі $l_{\text{ст.}}$ називають відстань між сусідніми вузлами або пучностями (рис. 17.5). Таким чином,

$$l_{\text{ст.}} = \frac{\lambda}{2}. \qquad (17.42)$$

Стоячі хвилі практично виникають при відбитті хвилі від перепони внаслідок інтерференції біжучої та відбитої хвилі. Якщо середовище, від якого відбувається відбиття, має меншу густину, фаза коливання не змінюється і на границі утворюється пучність. При відбитті від середовища з більшою густиною фаза коливання змінюється на протилежну, і на границі утворюється вузол.

На відміну від біжучої хвилі у стоячій хвилі **не відбувається перенос енергії** коливального руху, оскільки падаюча та відбита хвилі однакової амплітуди несуть однакову енергію у протилежних напрямах.

● Фазова та групова швидкості.

У рівнянні (17.34) швидкість хвилі v є швидкістю розповсюдження фази хвилі – **фазовою швидкістю**. Для синусоїдальної хвилі швидкість переносу енергії дорівнює фазовій швидкості. Але синусоїдальна хвиля не несе ніякої інформації, будь-який сигнал – це негармонічна модульована хвиля. При розв'язанні деяких задач можна отримати, що фазова швидкість є більшою за швидкість світла. У цьому немає парадоксу, оскільки фазова швидкість не є швидкістю переносу енергії, яка не може бути більшою за швидкість світла.

Сигнал згідно з теоремою Фур'є можна представити у вигляді суперпозиції гармонічних хвиль з частотами у деякому інтервалі $\Delta\omega$.

Принцип суперпозиції: при розповсюдженні декількох хвиль в середовищі, властивості якого не змінюються під впливом збуджень, що утворює хвиля, кожна з них розповсюджується так, ніби інші хвилі відсутні.

Суперпозиція хвиль, які мало відрізняються за частотою, тобто задовольняють умові $\Delta\omega << \omega_0$, та займає в кожний момент часу обмежену область простору, носить назву **хвильового пакету** або **групи хвиль** (рис.17.6).

Швидкість, з якою пересувається центр пакету (точка з максимальним значенням амплітуди, носить назву **групової швидкості u.**

При відсутності у середовищі **дисперсії,** тобто залежності фазової швидкості від частоти, усі плоскі хвилі, які утворюють пакет, розповсюджуються з однаковою фазовою швидкістю v.

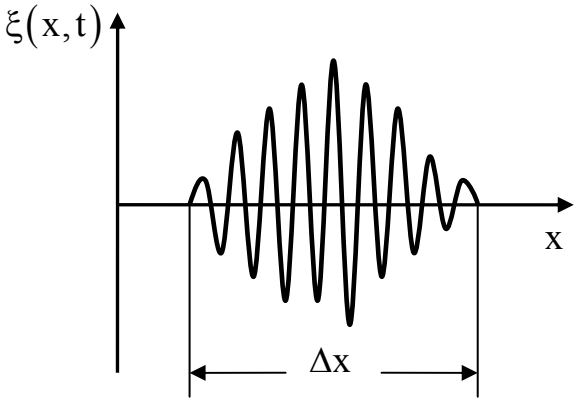


Рис. 17.6

У дисперсійному середовищі кожна хвиля має свою швидкість, разом з рухом самого пакету відбувається рух горбів у самому пакеті, пакет змінює свою форму, розпливається з часом. У цьому випадку групова швидкість пакету u відрізняється від фазової швидкості v, дорівнює

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda},$$

і може бути як більшою, так і меншою за v.

● **Звукові (акустичні) хвилі** – пружні хвилі з коливаннями в діапазоні 16Гц – 18 кГц, які сприймаються вухом людини. Коливання з частотами, меншими за 16Гц мають назву інфразвукових, більші за 18 кГц – ультразвукових.

Повздовжні звукові хвилі пов'язані з деформаціями стиску та розтягу, тому їх швидкість залежить від пружних властивостей середовища.

Швидкість повздовжніх хвиль у тонких стрижнях: $v_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$,

де E – модуль Юнга, ρ – густина речовини.

Швидкість поперечних хвиль у тонких стрижнях: $v_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$,

де G – модуль зсуву.

Швидкість повздовжніх v_l та поперечних хвиль v_t у твердих тілах можна визначити за формулами:

$$v_l = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}},$$

$$v_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}},$$

де λ, μ – пружні сталі для даного матеріалу (величини, які мають назву коефіцієнтів Ламе).

Швидкість звуку у газах $v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$,

де $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ – коефіцієнт Пуассона, M – молярна маса газу, p і ρ – тиск та густина газу, не збуреного хвилею.

● Вектор густини потоку енергії S (енергія, яка переноситься за одиницю часу крізь одиничну площадку, яка є перпендикулярною до напряму розповсюдження хвилі) дорівнює:

$$S = \frac{dW}{ds_{\perp} \cdot dt} = w \cdot v, \qquad (17.43)$$

де w – об'ємна густина енергії поля, v – швидкість хвилі.

Інтенсивність хвилі I – середнє значення модуля потоку енергії: $I = \langle S \rangle$.

Об'єктивні та суб'єктивні характеристики звуку наведені в таблиці 17.2.

Таблиця 17.2.

Характеристики звукових хвиль	
Об’єктивні характеристики	Суб’єктивні характеристики
Частота звука ν (Гц)	**Висота звука** – визначається суб’єктивно “на слух“ і залежить від частоти звука; зростає при зростанні частоти.
Акустичний спектр – суцільний (у деякому інтервалі присутні коливання усіх частот) або лінійчатий (присутні відокремлені одна від одної певні частоти).	**Тембр звука** – визначається характером акустичного спектру та розподілом енергії між певними частотами.
Інтенсивність (сила) звука – середня за часом енергія, яка переноситься звуковою хвилею в одиницю часу через одиничну площадку, перпендикулярну до напряму розповсюдження хвилі (вектор густини потоку енергії (див. формулу (17.43)) визначається за допомогою амплітуди звукового тиску: $I = \frac{(\Delta p_0)^2}{2\nu\rho}$, де ρ– густина газу. Одиниця вимірювання в СІ: Вт/м^2. Амплітуда звукового тиску Δp_0 і амплітуда швидкості u_0 частинок у звуковій хвилі зв’язані співвідношенням $\Delta p_0 = \nu\rho u_0$. Об’єктивна оцінка гучності за виміряним значенням інтенсивності – **рівень інтенсивності звука L:** $L = \lg\left(I/I_0\right)$, де I – інтенсивність даного звуку, $I_0=10^{-12}$Вт/м^2 – інтенсивність звука на порозі чутності при стандартній частоті ν=1000Гц. Вимірюється в белах (Б) та децибелах (дБ). 1дБ=0,1Б. Рівень інтенсивності звука у децибелах ; $L = 10\lg\left(I/I_0\right)$.	**Гучність звука** – пов’язана з інтенсивністю звука; залежить від частоти та зростає за логарифмічним законом зі зростом інтенсивності. Фізіологічна характеристика звука – **рівень гучності.** Обчислюється за формулою $L_N = 10\lg\left(I_N/I_0\right)$, де I_N – інтенсивність звука частоти ν = 1000Гц, рівної гучності з досліджуваним звуком. Вимірюється у фонах (фон). 1фон – гучність звука в 1000 Гц (частота стандартного чистого тону), якщо його рівень інтенсивності дорівнює 1дБ.

● **Ефект Допплера в акустиці** – зміна частоти коливань, які сприймаються приймачем, при відносному русі джерела цих коливань і приймача. Частота коливань, що сприймаються приймачем, у випадку, коли джерело звуку та приймач рухаються вздовж однієї прямої зі швидкостями $v_{дж.}$ і $v_{пр.}$ визначається за формулою:

$$\nu = \nu_0 \frac{\left(v \pm v_{пр.}\right)}{v \mp v_{дж.}}, \qquad (17.44)$$

де ν_0 – частота коливань джерела; знак «+» у чисельнику відповідає наближенню приймача до джерела, знак «–» – його віддаленню від джерела; у знаменнику знак «+» відповідає віддаленню джерела від приймача, знак «–» – наближенню до приймача.

У загальному випадку

$$\nu = \nu_0 \frac{1 + \frac{v_{пр.}}{v}\cos\theta_2}{1 + \frac{v_{дж.}}{v}\cos\theta_1}, \qquad (17.45)$$

де θ_1 та θ_2 – відповідно кути, утворені напрямом векторів швидкості джерела та приймача звуку з радіусом вектором $\vec{R}$, проведеним від приймача до джерела.

17.4. Електромагнітні хвилі та їх властивості.

● **Електромагнітна хвиля** – процес розповсюдження електромагнітних коливань у просторі.

Вектори напруженості $\vec{E}$ та $\vec{H}$ електромагнітного поля задовольняють хвильовим рівнянням:

$$\Delta\vec{E} = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu}\,\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}; \qquad \Delta\vec{H} = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu}\,\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}. \qquad (17.46)$$

Фазова швидкість електромагнітної хвилі

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \qquad (17.47)$$

де $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 2{,}99792458 \cdot 10^8$ – швидкість світла у вакуумі; ε_0 та μ_0 – електрична та магнітна сталі; ε та μ – відповідно, відносна електрична та магнітна проникність середовища.

Величину $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ називають абсолютним показником заломлення середовища.

З урахуванням останнього маємо

$$v = \frac{c}{n}; \qquad n = \frac{c}{v}. \tag{17.48}$$

Від рівнянь (17.46) можна перейти до рівнянь

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial^2 t} \quad \text{та} \quad \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial^2 t}, \tag{17.49}$$

де індекси *y* та *z* підкреслюють лише те, що вектори $\vec{E}$ та $\vec{H}$ направлені вздовж взаємно перпендикулярних осей *y* та *z*.

Рівнянням (17.49) задовольняють, зокрема, плоскі монохроматичні електромагнітні хвилі (хвилі певної, строго визначеної частоти), які описують рівняння

$$E_y = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0) \text{ та } H_z = H_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0),$$

де E_0 та H_0 – відповідно, амплітуди напруженості електричного і магнітного полів хвилі; ω – циклічна частота; $k = \frac{\omega}{v}$ – хвильове число; φ_0 – початкова фаза коливання в точці з координатою x=0.

Властивості електромагнітних хвиль:

- вектори $\vec{E}$, $\vec{H}$ і $\vec{v}$ є взаємно перпендикулярними та утворюють праву трійку векторів (рис. 17.7);
- електромагнітне поле є поперечним;
- електрична та магнітна складові розповсюджуються в одному напрямі;
- вектори $\vec{E}$ і $\vec{H}$ коливаються в однаковій фазі;

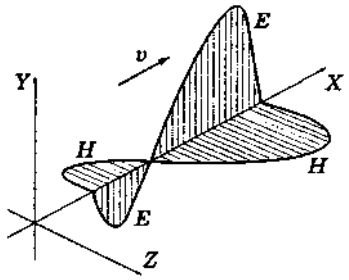


Рис. 17.7

- в будь-який момент часу значення векторів $\vec{E}$ і $\vec{H}$ пов'язані співвідношенням:

$$\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H;$$

- вектор густини потоку енергії електромагнітного поля хвилі (вектор Умова - Пойнтінга):

$$\vec{S} = \left[\vec{E} \cdot \vec{H}\right].$$

Інтенсивність електромагнітної хвилі дорівнює

$$I = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}\frac{E_0^2}{2} = \frac{\varepsilon_0}{\mu} c\sqrt{\varepsilon\mu}\frac{E_0^2}{2} = \frac{\varepsilon_0}{\mu} cn\frac{E_0^2}{2},$$

де $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ – швидкість світла у вакуумі; $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ - абсолютний показник заломлення середовища, в якому розповсюджується електромагнітна хвиля.

Для хвилі, яка розповсюджується у не феромагнітному середовищі (μ мало відрізняється від одиниці)

$$I = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c n E_0^2,.$$

Отже $I \sim E_0^2$.

Методичні вказівки.

1. Закон гармонічного коливання може бути записаний двома способами, які базуються на зв'язку між синусом і косинусом:

$$\cos\alpha = \sin(\alpha + \pi/2); \quad \sin\alpha = \cos(\alpha - \pi/2).$$

Тому зміщення, швидкість та прискорення того самого гармонічного коливання, яке описується формулами (17.6), (17.8), (17.9) можна записати у вигляді:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi'); \qquad (17.6a)$$

$$v(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi'), \qquad (17.8a)$$

$$a(t) = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi') = -\omega_0^2 x, \qquad (17.9a)$$

де $\varphi' = \varphi_0 - \pi/2$.

2. З формул для зміщення, швидкості та прискорення при гармонічному коливанні випливає, що максимальному значенню зміщення та прискорення відповідає нульова швидкість і навпаки. Притому прискорення завжди направлено протилежно зміщенню, тобто до положення рівноваги.

3. При розв'язуванні задач, в яких необхідно визначити фізичні величини, які характеризують гармонічні коливання найпростіших коливальних систем (математичного, фізичного та пружного маятників) слід чітко розуміти, що період (частота) власних коливань визначається тільки параметрами системи, а амплітуда і початкова фаза залежать від того, яким способом систему вивели із стану рівноваги, тобто від початкових умов. Для визначення амплітуди і початкової фази, може бути заданим, наприклад, зміщення від положення рівноваги, швидкість у початковий момент і т. ін.

4. Якщо тіло здійснює коливання під дією квазіупружної сили або декількох пружних чи квазіупружних сил, то для визначення частоти власних гармонічних коливань достатньо отримати рівняння коливань та привести його до вигляду, який надається формулою (17.4). Коефіцієнт при змінній, яка описує коливальний процес, надає вираз для ω_0^2 (див. приклад 17.7).

У деяких випадках диференціальне рівняння, яке описує механічні або електромагнітні коливання, зручно отримати за допомогою закону збереження енергії (див. приклад 17.9).

5. Якщо коливання не є малими, формули (17.14) – (17.15а), які визначають циклічну частоту та період гармонічних коливань математичного або фізичного маятників не справджуються, необхідно ураховувати ангармонізм коливань. Наприклад, період коливань математичного маятника у цьому разі визначається за формулою $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\alpha\right)$, де α – кут відхилення маятника від вертикалі.

6. При додаванні коливань одного напряму та однакової частоти, якщо їхня кількість перевищує 2 (n>2), амплітуду та початкову фазу результуючого коливання можна визначити шляхом послідовного використання (n-1) разів формул (17.26) і (17.27). Більш слушним у цьому випадку є метод векторних діаграм (див. приклади 17.3 та 17.4).

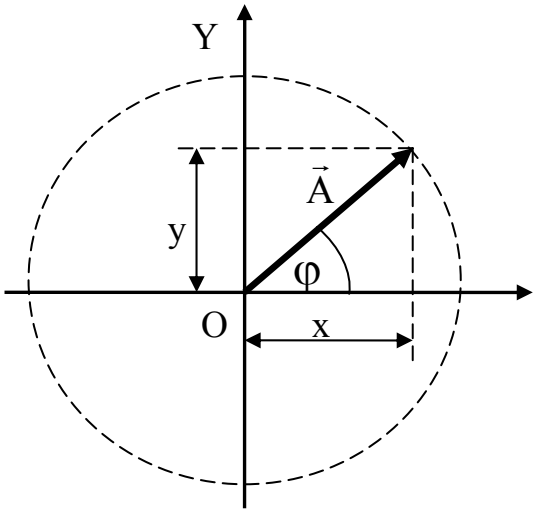


Рис. 17.8

Суть методу полягає в тому, що гармонічне коливання представляють у вигляді вектора $\vec{A}$ на площині XOY, (рис. 17.8). Модуль вектора дорівнює амплітуді коливань A, а кут з віссю OX дорівнює $\varphi = \omega t + \varphi_0$. Із часом кут φ збільшується, і вектор $\vec{A}$ рівномірно обертається навколо точки O з кутовою швидкістю ω. При цьому проекції вектора на координатні осі змінюються за гармонічним законом:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0);$$
$$y = A\sin(\omega t + \varphi_0).$$

7. Опір середовища завжди приводить до зменшення частоти коливань: циклічна частота згасаючих коливань, як це витікає з виразу (17.22), завжди менша за циклічну частоту власних коливань ω_0. Але у багатьох задачах, коли коливання згасають дуже повільно, тобто виконується умова $\beta^2 << \omega_0^2$, впливом опору можна знехтувати і вважати $\omega \approx \omega_0$; $T \approx T_0$.

8. Внаслідок однакової структури рівнянь методи розв'язання задач на електромагнітні коливання подібні до тих, що використовуються при розгляді механічних коливань. При тому, як видно з таблиці 17.1, заряд q відповідає зміщенню x, омічний опір R – коефіцієнту опору середовища r, індуктивність L – масі m, ємність C – величині, оберненій коефіцієнту квазіупружної сили k.

Кінетичній і потенціальній енергії пружного маятника (див. формули (17.10), (17.11)) у випадку коливального контуру відповідають значення енергії магнітного поля соленоїда $W_{магн.} = \frac{LI^2}{2}$ та електричного поля конденсатора $W_{ел.} = \frac{q^2}{2C}$. Повна енергія електромагнітних коливань $W = \frac{LI_0^2}{2} = \frac{Lq_0^2\omega_0^2}{2} = \frac{q_0^2}{2C}$.

9. Якщо у формулі $I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$, яка надає зв'язок між амплітудою струму та ЕРС при вимушених коливаннях у контурі, замінити амплітудні значення ефективними значеннями $I_{еф.} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} I_{еф.}$ та $\mathcal{E}_{еф.} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}}$, то отримуємо закон Ома для кола змінного струму:

$$I_{еф.} = \frac{\mathcal{E}_{еф.}}{Z}, \text{ де } Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

10. Слід розрізняти рівень інтенсивності звуку L та рівень гучності L_N. Рівень інтенсивності L є об'єктивною характеристикою звука, його значення не залежить від звукового відчуття. Рівень гучності L_N, як суб'єктивна характеристика звука залежить не тільки від інтенсивності звуку I, але й від його частоти, оскільки вухо людини має різну чутливість до звуків різної частоти. Так для частоти ν = 1000Гц рівень гучності L_N у фонах дорівнює рівню інтенсивності L в децибелах. Однак, для інших, особливо високих, частот $L_N \neq L$. У такому разі для розрахунку рівня гучності використовують к**риві рівної гучності**, які надають залежність інтенсивності звука від частоти при постійному рівні гучності.

Якщо в задачі, яка зв'язана з визначенням рівня гучності звука, не надається його частота, мають на увазі, що йдеться про звук, частота якого є близькою до стандартної частоти ν = 1000Гц.

Приклади розв'язання задач

Приклад 17.1. Матеріальна точка здійснює гармонічні коливання за законом синуса. Записати рівняння коливань при наступних параметрах: A=10см; T=0,3с; φ_0=0. За який час матеріальна точка проходить першу половину амплітуди? другу половину амплітуди? Визначити середню швидкість та середнє прискорення на кожній з ділянок.

A=0,1 м T=0,3с φ_0=0 $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \frac{A}{2}$	Розв'язання. Закон гармонічного коливання має вигляд (див.(17.6)): $x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ або, з урахуванням виразу (17.1б), який надає зв'язок між періодом та циклічною частотою
t_1; t_2; $\langle v_1 \rangle$; $\langle v_2 \rangle$; $\langle a_1 \rangle$; $\langle a_2 \rangle$ – ?	

$$x(t) = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right), \qquad (1)$$

тобто $$x(t) = 0{,}1\sin\frac{20\pi}{3}t. \qquad (2)$$

Час, витрачений на проходження першої половини амплітуди, знаходимо з умови $x(t_1) = \frac{A}{2}$ (3). Підстановка умови (3) у формулу (1) дає $\frac{A}{2} = A\sin\frac{2\pi}{T}t_1$. Звідки дістаємо: $\frac{2\pi}{T}t_1 = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

$$t_1 = \frac{T}{12} = \frac{0{,}3с}{12} = 0{,}025с.$$

При визначенні t_1 ми скористалися тим, що в окремому випадку, коли точка починає рухатися з положення рівноваги, зміщення та пройдений точкою шлях співпадають. Ця умова не виконується на другій половині амплітуди. Тому час t_2 знайдемо як різницю часу t', який витрачається на проходження відстані, рівній амплітуді коливання, та часу t_1. За період T точка проходить шлях, рівний чотирьом амплітудам, тому $t' = \frac{T}{4}$.

$$t_2 = \frac{T}{4} - t_1 = \frac{T}{4} - \frac{T}{12} = \frac{T}{6}; \qquad t_2 = \frac{0{,}3с}{6} = 0{,}05с.$$

За означенням середньої швидкості $\langle v \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Звідки

$$\langle v_1 \rangle = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = \frac{A/2}{t_1} = \frac{0{,}05м}{0{,}025с} = 2\frac{м}{с}; \qquad \langle v_2 \rangle = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} = \frac{A/2}{t_2} = \frac{0{,}05м}{0{,}05с} = 1\frac{м}{с}.$$

За означенням середнього прискорення $\langle a \rangle = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ (4), де $\Delta v = v - v_0$.

У першому випадку $\Delta t = t_1$; $v_0 = v(0) = v_{max} = A\omega = A\frac{2\pi}{T}$;

$$v = v(t_1) = A\omega\cos\omega t_1 = A\frac{2\pi}{T}\cos\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{12} = A\frac{2\pi}{T}\cos\frac{\pi}{6}.$$

Підстановка значень до формули (4) дає:

$$\langle a_1\rangle = A\frac{2\pi}{T\cdot t_1}\left(\cos\frac{\pi}{6}-1\right) = \frac{0{,}1\text{м}\cdot 6{,}28}{0{,}3\text{с}\cdot 0{,}025\text{с}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right) = -11{,}2\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

У другому випадку $\Delta t = t_2$; кінцева швидкість відповідає максимальному зміщенню і дорівнює нулю ($v = 0$); $v_0 = v(t_1) = A\frac{2\pi}{T}\cos\frac{\pi}{6}$.

$$\langle a_2\rangle = \frac{1}{t_2}\left(0 - A\frac{2\pi}{T}\cos\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{0{,}1\text{м}\cdot 6{,}28}{0{,}05\cdot 0{,}3\text{с}}\frac{\sqrt{3}}{2} = -36{,}3\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Відповідь: $x(t) = 0{,}1\sin\frac{20\pi}{3}t$; $t_1 = \frac{T}{12} = 0{,}025\text{с}$; $t_2 = \frac{T}{6} = 0{,}05\text{с}$; $\langle v_1\rangle = 2\frac{\text{м}}{\text{с}}$; $\langle v_2\rangle = 1\frac{\text{м}}{\text{с}}$; $\langle a_1\rangle = -11{,}2\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; $\langle a_2\rangle = -36{,}3\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Приклад 17.2. Матеріальна точка здійснює гармонічні коливання за законом косинуса. Повна енергія коливання дорівнює $W = 40\text{мкДж}$; максимальна сила, яка діє на точку F_{max}=2мН. Записати рівняння цього коливання, якщо період $T = 1\text{с}$. Початкова фаза φ_0= 0.

$W = 4\cdot 10^{-5}$ Дж $F_{max} = 2\cdot 10^{-3}$ Í T=1c $\varphi_0 = 0$	Розв'язання. Рівняння гармонічного коливання має вигляд: $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$. (1) Треба знайти циклічну частоту ω і амплітуду A. Згідно з (17.1б) $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi\frac{\text{рад}}{\text{с}}$. (2)
x(t) - ?	

За другим законом Ньютона величина максимальної сили дорівнює $F_{max} = ma_{max}$, де a_{max} – максимальне прискорення точки. З формули (17.9) витікає, що величина максимального прискорення точки $a_{max} = A\omega^2$. Тоді $F_{max} = mA\omega^2$. (3)

Повна енергія точки (17.12) $W = \frac{\omega^2 A^2 m}{2}$. (4)

Розв`язуючи сумісно (3) і (4), знайдемо A: $A = \frac{2W}{F_{max}}$. $[A] = \frac{\text{Дж}}{\text{Н}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{Н}} = \text{м}$.

Знаходимо числове значення амплітуди: $A = \frac{2\cdot 4\cdot 10^{-5}}{2\cdot 10^{-3}} = 0{,}04\text{м}$.

Записуємо рівняння (1) з урахуванням того, що $\varphi_0 = 0$: $x = 0{,}04\cos 2\pi t$.

Відповідь: $x = 0{,}04\cos 2\pi t$.

Приклад 17.3. На горизонтальну сталеву мембрану, яка здійснює вимушені коливання з амплітудою x_0=0,1мм, насипаний дрібний пісок. Визначити частоту коливань мембрани, за якою піщинки почнуть підстрибувати на мембрані. Чому дорівнюватиме в момент відриву кінетична енергія піщинки масою m=0,2мг?

$x_0=10^{-4}$м $m=0,2\cdot10^{-6}$ кг	Розв'язання.
ν-? W_k-?	

Для опису коливань мембрани скористаємося моделлю гармонічного осцилятора. Початок координат зв'яжемо зі станом стійкої рівноваги мембрани, вісь OX направимо вертикально вверх. Нехай в початковий момент часу мембрана починає рухатися уверх. Тоді рівняння коливань (закон руху мембрани) має вигляд:

$$x = x_0 \sin\omega t .$$

Відповідно, швидкість і прискорення дорівнюють:

$$v_x = x_0\omega\cos\omega t; \qquad a_x = -x_0\omega^2\sin\omega t .$$

Тут ω – циклічна частота коливань, яка зв'язана з частотою ν співвідношенням $\omega = 2\pi\nu$.

Вважаючи піщинку матеріальною точкою, запишемо рівняння її руху на підставі другого закону Ньютона:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N},$$

де m – маса піщинки, N – реакція мембрани.

У проекції на вісь OX з урахуванням того, що до моменту відриву піщинки від мембрани їх прискорення є однаковими, отримуємо:

$$ma_x = -mg + N .$$

Таким чином, рівняння, які описують рух системи «мембрана-піщинка» мають вигляд

$$x = x_0 \sin 2\pi\nu t; \qquad (1)$$

$$v_x = 2\pi\nu x_0 \cos 2\pi\nu t; \qquad (2)$$

$$a_x = -4\pi^2\nu^2 x_0 \sin 2\pi\nu t; \qquad (3)$$

$$ma_x = -mg + N. \qquad (4)$$

У момент відриву $t = t_1$ сила тиску піщинки на мембрану і, відповідно, реакція мембрани N=0. З рівняння (4) отримуємо: $ma_x = -mg$, тобто

$$a_x = -g . \qquad (5)$$

Нехай значення координати та швидкості в цей момент мають значення x_1 та v_1. Тоді рівняння (1) – (3) з урахування співвідношення (5) приймають вигляд:

$$x_1 = x_0 \sin 2\pi\nu t_1; \qquad (1a)$$

$$v_1 = 2\pi\nu x_0 \cos 2\pi\nu t_1; \qquad (2a)$$

$$g = -4\pi^2\nu^2 x_0 \sin 2\pi\nu t_1. \qquad (3a)$$

З рівнянь (2а) і (3а), використовуючи основну тригонометричну тотожність $\sin^2 2\pi\nu t_1 + \cos^2 2\pi\nu t_1 = 1$, отримуємо:

$$\frac{v_1^2}{\left(2\pi\nu x_0\right)^2} + \frac{g^2}{\left(4\pi^2\nu^2 x_0\right)^2} = 1. \quad \text{Звідки} \quad v_1^2 = 4\pi^2\nu^2 x_0^2 - \frac{g^2}{4\pi^2\nu^2}.$$

Відповідно, кінетична енергія піщинки в момент відриву дорівнює

$$W_k = \frac{mv_1^2}{2} = \frac{m}{2}\left(4\pi^2\nu^2 x_0^2 - \frac{g^2}{4\pi^2\nu^2}\right).$$

Ураховуючи, що в будь-якій системі відліку кінетична енергія піщинки не може бути від'ємною, вираз у дужках не може приймати від'ємні значення. Звідки отримуємо співвідношення між частотою та амплітудою коливань, при виконанні якого відрив піщинки від мембрани стає можливим: $\nu \geq \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{x_0}}$.

Обчислення дає: $\nu \geq \frac{1}{2\cdot 3{,}14}\sqrt{\frac{9{,}8}{10^{-4}}} = 49{,}8 \approx 50$ (Гц)

$$W_k = \frac{0{,}2\cdot 10^{-3}}{2}\left(4\cdot 3{,}14^2\cdot 50^2\cdot 10^{-4} - \frac{9{,}8^2}{4\cdot 3{,}14^2\cdot 50^2}\right) = 1{,}2\cdot 10^{-9}\,(\text{Дж}).$$

Відповідь: $\nu_{гр} = 50$Гц; $W_k =$ 1,2нДж.

Приклад 17.4. Записати рівняння результуючого коливання, яке отримано складанням двох однаково напрямлених коливань, які відбуваються за законами $x_1 = 0{,}03\cos\left(2\pi t + \pi/2\right)$ і $x_2 = 0{,}04\cos 2\pi t$.

Розв'язання.

В результаті додавання цих коливань утворюється гармонічне коливання тієї ж частоти з амплітудою, яка надається формулою (17.26).

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

Оскільки $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi/2$ і $\cos\pi/2 = 0$,

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{(0{,}03)^2 + (0{,}04)^2} = 0{,}05\,\text{м}$$

Початкова фаза результуючого коливання визначається за формулою (17.27):

$$\text{tg}\varphi_0 = \frac{0{,}03\cdot\sin\pi/2 + 0{,}04\sin 0}{0{,}03\cdot\cos\pi/2 + 0{,}04\cos 0} = 0{,}75;$$

$$\varphi_0 = \text{arc tg}\,0{,}75 = 36^\circ = \frac{\pi}{5}.$$

Отже, $x = 0{,}05\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{5}\right)$.

Приклад 17.5. Матеріальна точка приймає участь у трьох коливаннях, які відбуваються вздовж однієї прямої за законами $x_1 = 3\cos t$; $x_2 = 2\sin\left(t + \frac{5}{6}\pi\right)$; $x_1 = 3\sqrt{3}\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$ (зміщення наведені у сантиметрах). Визначити амплітуду та початкову фазу результуючого коливання та записати його рівняння

$$x_1 = 3\cos t \text{ см}$$
$$x_2 = 2\sin\left(t + \frac{5}{6}\pi\right) \text{см}$$
$$x_1 = 3\sqrt{3}\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \text{см}$$
$$x(t) - ?$$

Розв'язання.

Усі коливання, в яких приймає участь точка, є гармонічними коливаннями однакової частоти. Отже, результуюче коливання також буде гармонічним коливанням тієї самої частоти. Амплітуду і фазу коливання можна визначити за формулами (17.26), (17.27). Але ці формули виведені для випадку, коли рівняння коливань, що додаються, виражені через однакову тригонометричну функцію – синус або косинус. Тому, перш за все, необхідно переписати рівняння другого коливання, виразивши x_2 через косинус:

$$x_2 = 2\sin\left(t + \frac{5}{6}\pi\right) = 2\cos\left(t + \frac{5}{6}\pi - \frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right).$$

Таким чином, коливання, які додаються, характеризуються наступними параметрами: амплітуди A_1= 3см; A_2= 2см; A_3= $3\sqrt{3}$ см;

циклічні частоти $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 1 \text{рад/с}$;

початкові фази $\varphi_1 = 0$; $\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$; $\varphi_3 = \frac{\pi}{2}$.

За допомогою формул (17.26), (17.27) можна додати спочатку два коливання з трьох (див. приклад 17.4). Далі, додавши до отриманого результату третє коливання, можна визначити амплітуду і початкову фазу результуючого коливання.

Інший, більш простий, спосіб розв'язання задачі полягає у використанні методу векторних діаграм. Довжину кожного вектора беремо рівною амплітуді відповідного коливання, а кут між вектором та віссю OX – початковій фазі. Довжина вектора, який є результатом додавання побудованих векторів, надає амплітуду

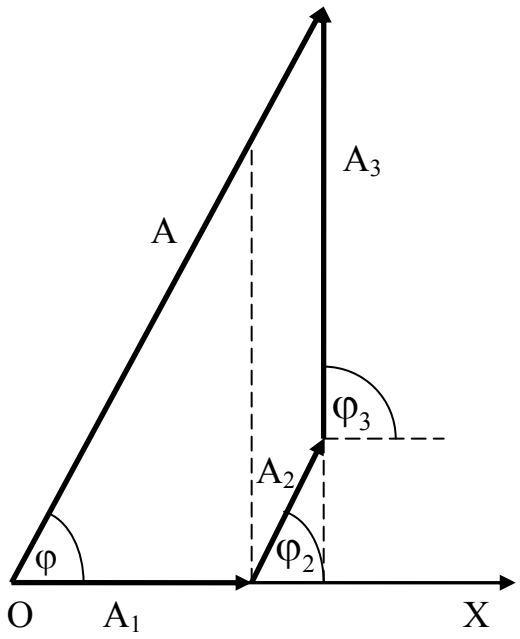


Рис. 17.9

результуючого коливання А, кут його нахилу до осі ОХ – початкову фазу φ.

На рис. 17.9 побудована векторна діаграма за даними задачі, звідки безпосередньо отримуємо:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}\,;\ \varphi = \mathrm{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}; \qquad A = \frac{A_1 + A_2\cos\varphi_2}{\cos\varphi} = \frac{3+1}{0,5} = 8\,(\text{см}).$$

Записуємо рівняння результуючого коливання: $x = 8\cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$см.

Відповідь: $x = 8\cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$см.

Приклад 17.6. Точка приймає одночасно участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях, які відбуваються за законами: $x = 2\sin\pi t$; $y = 4\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$. Знайти рівняння траєкторії точки та побудувати її графік.

Показати напрям руху точки. Визначити швидкість та прискорення точки в момент часу t_1= 1с.

$x = 2\sin\pi t$ $y = 4\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ t_1= 1с	Розв'язання. Циклічні частоти коливань є рівними, різниця фаз дорівнює $\frac{\pi}{2}$. У цьому випадку траєкторією точки є еліпс. Перепишемо друге рівняння, скориставшись формулами перетворення кутів, після чого виключімо з рівнянь час t.
$y = f(x)$-? $v(t_1)$; $a(t_1)$-?	

$$y = 4\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = 4\cos\pi t\,;$$

$$\frac{x^2}{4} = \sin^2\pi t; \qquad \frac{y^2}{16} = \cos^2\pi t;$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1. \qquad (1)$$

Рівняння (1) – канонічне рівняння еліпса з півосями a=2см і b=4см (рис.17.10). Щоб визначити напрям руху, розглянемо положення точки в момент часу t=0: $x(0) = 0;\ y(0) = 1$, тобто точка знаходиться в положенні В (рис.17.10). При зростанні часу t координати y і x приймають додатні значення, що відповідає руху точки вздовж траєкторії за годинниковою стрілкою.

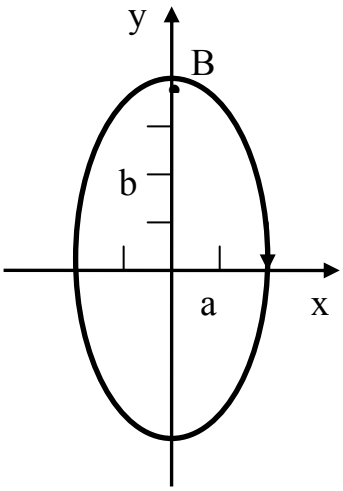


Рис. 17.10

Величину швидкості і прискорення точки виражаємо через відповідні компоненти цих векторів:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}\,; \quad (2) \qquad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}\,. \quad (3)$$

$$v_x = 2\pi\cos\pi t\,; \qquad v_y = -4\pi\sin\pi t\,;$$

$$a_x = 2\pi^2\sin\pi t\,; \qquad a_y = -4\pi^2\cos\pi t\,;$$

$$v = \sqrt{4\pi^2\cos^2\pi t + 16\pi^2\sin^2\pi t}\,; \qquad (4)$$

$$a = \sqrt{4\pi^4\sin^2\pi t + 16\pi^4\cos^2\pi t}\,. \qquad (5)$$

Підстановка значення t_1= 1с до формул (4) і (5) та обчислення дає: $v = 6{,}28\frac{м}{с}$; $a = 39{,}4\frac{м}{с^2}$.

Відповідь: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$; рух відбувається за годинниковою стрілкою.

Приклад 17.7. Знайти логарифмічний декремент згасання δ для математичного маятника довжиною l=1м, якщо за час Δt = 1хв амплітуда його коливань зменшується у два рази.

l=1м Δt = 60с $\frac{A_1}{A_2} = 2$	Розв'язання. З виразу (17.24) $\delta = \beta T$ випливає, що для визначення логарифмічного декременту треба знайти коефіцієнт згасання β і період коливань T. Запишемо амплітуду згасаючих коливань для двох моментів часу t_1 і t_2 згідно з (17.22):
δ - ?	

$$A_1 = A_0 e^{-\beta t_1}\,; \qquad A_2 = A_0 e^{-\beta t_2}\,.$$

Поділимо A_1 на A_2: $\frac{A_1}{A_2} = e^{\beta(t_2 - t_1)}$.

За умовами задачі A_1/A_2=2 і t_2–t_1=Δt, тому $2 = e^{\beta\Delta t}$.

Логарифмуємо цей вираз: $\ln 2 = \beta\Delta t$.

Звідки $\beta = \frac{\ln 2}{\Delta t} = \frac{0{,}693}{60} = 1{,}16\cdot 10^{-2}\,\frac{1}{с}$

Період коливань знайдемо за формулою (1.18) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\cdot 3{,}14\sqrt{\frac{1}{9{,}8}} = 2с$.

Таким чином $\delta = \beta T = 1{,}16\cdot 10^{-2}\cdot 2 = 2{,}32\cdot 10^{-2}$.

Відповідь: $\delta = 2{,}32\cdot 10^{-2}$.

Приклад 17.8. Знайти циклічну частоту малих коливань тонкого стриженя маси m і довжини l відносно горизонтальної осі, що проходить через точку O (рис.17.11). Жорсткість пружини k, її масою можна знехтувати. У положенні рівноваги стрижень є вертикальним.

Розв’язання.

Малі коливання стриженя у відсутності сили тертя є власними гармонічними коливаннями. Отримаємо диференціальне рівняння коливань, обравши у якості змінної, що описує коливання, кут відхилення стриженя від положення рівноваги α.

При відхиленні стриженя від вертикалі на нього діють дві сили: сила тяжіння $m\vec{g}$ та сила пружності $F_{пр.} = -kx = -kl\sin\alpha$. Вони утворюють обертальні моменти, які відповідно дорівнюють $M_{тяж.} = -mg\frac{l}{2}\sin\alpha$ (де $\frac{l}{2}$ – відстань від точки підвісу O до центра мас стриженя C) та $M_{пр.} = -kl^2\sin\alpha$.

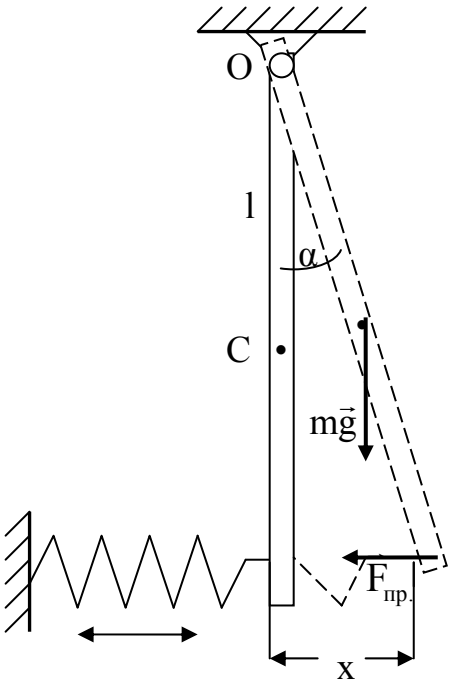


Рис. 17.11

Записуємо рівняння руху маятника на основі закону динаміки обертального руху:

$$I\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{mgl}{2}\sin\alpha - kl^2\sin\alpha, \qquad (1)$$

де $I = \frac{1}{3}ml^2$ – момент інерції стриженя відносно осі коливань O.

При малих кутах відхилення $\sin\alpha \approx \alpha$ і рівняння (1) переходить у рівняння власних гармонічних коливань:

$$\frac{1}{3}ml^2\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mgl}{2}\alpha + kl^2\alpha = 0.$$

Після ділення на коефіцієнт $\frac{1}{3}ml^2$ отримуємо: $\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \left(\frac{3}{2}\frac{g}{l} + \frac{3k}{m}\right)\alpha = 0$, (2)

де коефіцієнт при α дорівнює квадрату частоти власних гармонічних коливань ω_0^2. Тоді $\omega_0 = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{l} + \frac{3k}{m}}$. Відповідь: $\omega_0 = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{l} + \frac{3k}{m}}$.

Приклад 17.9. Тонке кільце радіуса r=0,5см здійснює малі коливання відносно положення рівноваги, перекочуючись без проковзування по внутрішній поверхні напівсферичної чашки радіуса R=5см. Визначити період коливань.

$r = 0,5\cdot10^{-2}$ м
$R = 5\cdot10^{-2}$ м
T-?

Розв’язання.

Для розв’язання задачі скористаємося законом збереження енергії. Знехтуємо силою тертя кочення, тоді сили, що діють в системі «кільце – гравітаційне поле Землі» є консервативними, і повна енергія кільця

залишається незмінною. В довільний момент часу ця енергія складається з кінетичної енергії руху центра мас кільця по колу радіуса (R–r) (див. рис.7.12); кінетичної енергії обертання кільця відносно осі, що проходить через його центр мас; потенціальної енергії кільця в гравітаційному полі Землі.

Нульовий рівень потенціальної енергії зв'яжемо з положенням центра мас кільця в положенні стійкої рівноваги. Тоді повна механічна енергія кільця дорівнює:

$$W = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} + mgh, \qquad (1)$$

де v_c – швидкість поступального руху центра мас кільця, $I = mr^2$ (2) – момент інерції кільця відносно осі, що проходить через його центр мас, ω – кутова швидкість обертання кільця відносно цієї осі, h – висота центра мас кільця над нульовим рівнем.

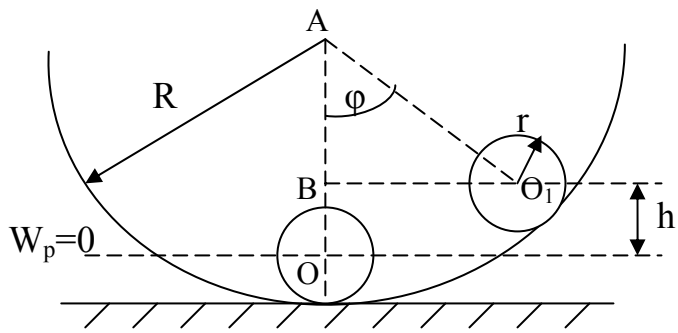


Рис.17.12.

У випадку кочення без проковзування швидкість руху центра мас кільця дорівнює швидкості обертального руху точок його поверхні відносно осі, яка проходить через центр мас. Тоді $\omega = \frac{v_c}{r}$. Швидкість руху центра мас знаходимо як похідну за часом від криволінійної координати s, тобто довжини дуги, на яку спирається кут φ: $v = s_t' = (R - r)\varphi'$. (3)

Значення h дорівнює (див. рис. 17.12):

$$h = AO - AB = (R - r)(1 - \cos\varphi) = 2(R - r)\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

Оскільки коливання відбуваються з малою амплітудою, кут φ приймає малі значення, і можна покласти $\sin\frac{\varphi}{2} \approx \frac{\varphi}{2}$. Тоді $h = \frac{(R - r)\varphi^2}{2}$ (4), а повна енергія з урахуванням виразів (2) – (4) дорівнюватиме:

$$W = m(R - r)^2\varphi_t'^2 + \frac{mg(R - r)\varphi^2}{2}. \quad (5)$$

Оскільки система є консервативною повна енергія кільця зберігається, тобто похідна від неї за часом дорівнює нулю:

$$\left(m(R - r)^2\varphi'^2 + \frac{mg(R - r)\varphi^2}{2}\right)' = 0,$$

або $$2m(R-r)^2\varphi''\varphi' + \frac{mg(R-r)2\varphi\varphi'}{2} = 0.$$

Тобто, диференціальне рівняння коливань кільця відносно положення рівноваги має вигляд:

$$\varphi'' + \frac{g}{2(R-r)}\varphi = 0.$$

Отримане рівняння є рівнянням власних гармонічних коливань, в якому коефіцієнт при φ надає квадрат циклічної частоти коливань:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{2(R-r)}}$$

Відповідно період коливань дорівнює: $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2(R-r)}{g}}$.

$T = 2\cdot 3{,}14\sqrt{\frac{2(5-0{,}5)10^{-2}}{9{,}8}} = 0{,}60$. Відповідь: T = 0,60с.

Приклад 17.10. У коливальному контурі, який складається з послідовно з'єднаних резистора опором R=14Ом, котушки індуктивністю L=1мГн і конденсатора ємністю C=0,4мкФ. Знайти, на скільки процентів відрізняється частота ω вільних коливань контуру від його власної частоти ω_0. Чому дорівнює добротність контуру?

Розв'язання.

R=14Ом
L=1мГн
C=0,4мкФ
ε_ω; Q - ?

У будь-якому реальному коливальному контурі з опором R частота вільних електромагнітних коливань ω завжди менша за власну частоту контуру ω_0.

Частоту власних електромагнітних коливань надає формула (див. табл. 17.1) $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$. (1) Частоту вільних коливань можна визначити за формулою $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ (2), де коефіцієнт згасання $\beta = \frac{R}{2L}$(3). Тобто $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$ (4) .

У задачі слід визначити величину $\varepsilon_\omega = \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0}$. (5)

Проводимо розрахунок частот за формулами (1) і (4):

$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{1\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}4\cdot 10^{-6}}} = 5\cdot 10^4$ (рад/с);

$$\omega=\sqrt{25\cdot10^8-\left(\frac{14}{2\cdot1\cdot10^{-3}}\right)^2}=4{,}95\cdot10^4\,(\text{рад/с}).$$

Перевіряємо одиницю вимірювання:

$$[\omega]=\left(\text{Гн}^{-1}\cdot\Phi^{-1}-\left(\text{Ом}\cdot\text{Гн}^{-1}\right)^2\right)^{1/2}=\left(\frac{\text{А}}{\text{В}\cdot\text{с}}\cdot\frac{\text{Кл}}{\text{В}}-\left(\frac{\text{В}}{\text{А}}\cdot\frac{\text{А}}{\text{В}\cdot\text{с}}\right)^2\right)^{1/2}=\text{с}^{-1}.$$

Підстановка значень у формулу (5) дає: $\varepsilon_\omega=\dfrac{5\cdot10^4-4{,}95\cdot10^4}{5\cdot10^4}=0{,}01=1\%$.

Добротність контуру Q виразимо через величини ω та ω_0, використавши формулу (4.25) : $Q=\dfrac{\pi}{\delta}=\dfrac{\pi}{\beta T}=\dfrac{\omega}{2\beta}=\dfrac{\omega}{2\sqrt{\omega_0^2-\omega^2}}$.

$$Q=\frac{4{,}95\cdot10^4}{2\sqrt{\left(5^2-4{,}95^2\right)\cdot10^8}}=3{,}5.$$

Відповідь: $\varepsilon_\omega=1\%$; $Q=3{,}5$.

Приклад 17.11. Рівняння незгасаючих коливань має вигляд ξ=5cos100πt(см) і поширюється зі швидкістю v=300 м/с. Знайти 1) довжину біжучої хвилі λ; 2) переміщення частинок середовища за період; 3)зміщення ξ від положення рівноваги точок, які віддалені від джерела коливань на відстані x_1=3м та x_2=4,5м у момент часу t_1=0,02с після початку коливань; 4)різницю фаз коливань указаних точок; 5) довжину стоячої хвилі, яка утворюється внаслідок інтерференції при відбитті хвилі від перепони. На якій відстані від перепони буде знаходитися найближча пучність стоячої хвилі?

$\xi = 5\cos100\pi t$ см v=300 м/с x_1=3м t_1=0,02с	Розв'язання. Довжина хвилі згідно з (17.33) λ=vT. Оскільки ω = 100π, то T = 2π/ω = 0,02 с. Тоді λ=300·0,02=6м.
$\lambda,\ \Delta\xi\big\|_{\Delta t=T};\xi_1;\ \xi_2$ -? $\Delta\varphi;\ l_{ст.};\ x_{пучн.}$-?	Переміщення частинок середовища за період, знаходимо, ураховуючи, що вони приймають участь тільки у коливальному руху. Таке переміщення за період дорівнює нулю: $\Delta\xi\big\|_{\Delta t=T}=0$.

Згідно з (4.34а) $\xi=A\cos\omega\left(t-\dfrac{x}{v}\right)$. Тому зміщення точок з координатами x_1=3м та x_2=4,5м у момент часу t_1=0,02с дорівнюють:

$$\xi_1=5\cos100\pi\left(0{,}02-\frac{3}{300}\right)=5\cos\pi=-5\,(\text{см});$$

$$\xi_2=5\cos100\pi\left(0{,}02-\frac{4{,}5}{300}\right)=5\cos\frac{\pi}{2}=0.$$

Різниця фаз коливань точок дорівнює

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \omega\left(\left(t - \frac{x_1}{v}\right) - \left(t - \frac{x_2}{v}\right)\right) = \frac{\omega(x_2 - x_1)}{v} = \frac{2\pi(x_2 - x_1)}{\lambda};$$

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{4,5-3}{6} = \frac{\pi}{2}.$$

Згідно з формулою (4.42) $l_{ст.} = \frac{\lambda}{2} = \frac{6}{2} = 3\,м.$

Якщо перепона, від якої відбувається відбиття, має меншу густину, фаза коливання не змінюється і пучність утворюється безпосередньо на границі: $x_{пучн.} = 0$.

При відбитті від середовища з більшою густиною фаза коливання змінюється на протилежну, і на границі утворюється вузол. Тоді, оскільки згідно з формулами (17.40) та (17.41) відстань між сусідніми вузлом та пучністю дорівнює $\frac{\lambda}{4}$, найближча до перепони пучність буде знаходитися на відстані $x_{пучн.} = \frac{\lambda}{4} = \frac{6}{4} = 1,5\,(м)$.

Відповідь: λ = 6м; $\Delta\xi\big|_{\Delta t=T}$ =0; ξ_1 = – 5см; ξ_2 =0; $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$; $l_{ст.} = 3\,м$; $x_{пучн.} = 0$ або $x_{пучн.} = 1,5\,м$.

Приклад 17.12. Визначити інтенсивність плоскої звукової хвилі частотою ν=1кГц, яка відповідає гучній розмові, якщо амплітуда коливань частинок повітря складає x_0= 3мкм, а швидкість звуку в повітрі v=331м/с.

$\nu = 1\cdot 10^3\,Гц$ $\tilde{o}_0 = 3\cdot 10^{-6}\,м$ v=331м/с	Розв'язання Згідно з означенням (див формулу (17.43)) $I = w\cdot v$,
I - ?	де w – об'ємна густина енергії поля звукової хвилі, v – її швидкість.

Енергія коливального руху однієї частинки дорівнює $W_1 = \frac{m_1\omega^2 x_0^2}{2}$. Енергія одиниці об'єму середовища, в якому розповсюджується хвиля, $w = nW_1$, де n – концентрація частинок. Ураховуючи, що $m_1 n = \rho$, де ρ – густина повітря, яка за нормальних умов дорівнює 1,29кг/м^3, отримуємо:

$$I = \frac{\rho\omega^2 x_0^2}{2}v = 2\pi^2\nu^2\rho x_0^2 v\ . \qquad I = 2\cdot 3,14^2\cdot 10^6\cdot 1,29\cdot 9\cdot 10^{-12}\cdot 331 = 0,076.$$

$$[I] = \frac{кг\cdot м^2\cdot м}{с^2\cdot м^3\cdot с} = \frac{Дж}{м^2 с} = \frac{Вт}{м^2}.$$

Відповідь: I = 76мВт/м^2.

Задачі для самостійного розв'язування

17.1. Написати рівняння x(t) гармонічного коливання з амплітудою A=2см, частотою ν=0,5Гц і початковою фазою $\varphi_0=\pi/6$. Знайти зміщення точки у момент часу t=0 і побудувати графік x(t) у межах двох періодів T.

17.2. Написати рівняння x(t) гармонічного коливання з амплітудою A=2см, періодом T=8с і початковою фазою $\varphi_0=\pi/4$. Побудувати графік x(t) у межах двох періодів T.

17.3. Через який час t від початку руху точка, яка здійснює гармонічні коливання за законом косинуса, відхилиться від положення рівноваги на половину амплітуди? Період коливань T=12с. Початкова фаза $\varphi_0=0$.

17.4. Через яку частку періоду швидкість точки, яка здійснює гармонічні коливання, досягне половини її максимального значення. Час відраховувати від початку руху. $\varphi_0=0$.

17.5. Рівняння коливання матеріальної точки масою m=10г має вигляд $x = 0,05\cos\left(\frac{\pi}{5}t + \frac{\pi}{2}\right)$м. Знайти максимальну силу F_{max}, яка діє на точку.

17.6. Рівняння коливання матеріальної точки масою m=10г має вигляд $x = 0,04\cos\frac{\pi}{2}t$ м. Побудувати (у межах одного періоду) графіки залежності від часу кінетичної $W_{к,}$, потенціальної W_p і повної W енергій.

17.7. Рівняння коливання матеріальної точки масою m=16г має вигляд $x = 0,05\cos\left(\frac{\pi}{5}t + \frac{\pi}{4}\right)$м. Знайти максимальний імпульс p_{max} цієї точки.

17.8. Матеріальна точка масою $m = 20$г здійснює гармонічні коливання за законом $x = 0,1\cos\left(4\pi t + \pi/4\right)$, м. Визначити повну енергію W цієї точки.

17.9. Записати рівняння гармонічних коливань матеріальної точки з періодом T=4с і початковою фазою $\varphi_0=\pi/6$, якщо її повна механічна енергія W=494мкДж і максимальне значення діючої на неї сили F_{max}=49,4мН.

17.10. Матеріальна точка здійснює гармонічні коливання з періодом T=2с. Відомо, що в початковий момент часу (t=0) її зміщення x_0=5см, а швидкість v_0=20 см/с. Записати рівняння цих коливань.

17.11. Точка масою *m*=16г здійснює гармонічне коливання з періодом T=4с і с амплітудою A=5см. Знайти імпульс точки у момент часу t, коли її зміщення від положення рівноваги дорівнюватиме x=2,5см. Початкова фаза $\varphi_0=0$.

17.12. Матеріальна точка здійснює гармонічні коливання з періодом T=2мс і амплітудою A=0,2 мм. Визначити значення середньої швидкості <v> і середнього прискорення <a> на шляху від максимального відхилення до положення рівноваги.

17.13. Знати жорсткість пружини, яка здійснює гармонічні коливання з амплітудою A=2см, якщо її максимальна кінетична енергія W_{max}=100мДж.

17.14. Написати рівняння коливання, яке отримане в результаті додавання двох гармонічних коливань одного напрямку $x_1 = 3\cos(2\pi t)$ см і $x_2 = 4\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ см.

17.15. Знайти різницю фаз двох гармонічних коливань однакової частоти ω, амплітуди A і напрямку, якщо при їх складанні утворюється коливання з такою ж частотою і амплітудою.

17.16. Знайти траєкторію точки, яка бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях $x = 3\sin\omega t$ і $y = 3\cos\omega t$. Накреслити графік.

17.17. Знайти амплітуду A і початкову фазу φ гармонічного коливання, отриманого від складання двох однаково напрямлених коливань $x_1=2\cos\left(\pi t+\frac{\pi}{2}\right)$,см і $x_1=3\cos\left(\pi t+\frac{\pi}{4}\right)$,см. Записати рівняння результуючого коливання.

17.18. Точка бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях $x = 2\sin\pi t$ і $y = 3\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$. Визначити траєкторію результуючого коливання і зобразити її на рисунку.

17.19. Написати рівняння коливання, отриманого в результаті додавання двох однаково напрямлених гармонічних коливань з однаковим періодом T=4с і однаковою амплітудою A=5см. Різниця фаз цих коливань Δφ=π/3.

17.20. Матеріальна точка бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях $x = 2\sin\pi t$ см і $y = -\cos\pi t$ см. Визначити рівняння траєкторії руху точки, побудувати графік точки і показати на ньому напрям руху точки.

17.21. Додаються два гармонічних коливання одного напрямку, рівняння яких мають вид: $x_1=3\cos 2\pi t$,см та $x_2=3\cos\left(2\pi t+\frac{\pi}{4}\right)$,см. Визначити для результуючого коливання: 1) амплітуду; 2) початкову фазу. Записати рівняння результуючого коливання.

17.22. Точка приймає участь одночасно у двох гармонічних коливаннях, які відбуваються у взаємно перпендикулярних напрямках і описуються рівняннями: $x=3\cos 2\omega t$,см і $y=4\cos(2\omega t+\pi)$, см. Визначити рівняння траєкторії точки та зобразити її у відповідному масштабі.

17.23. Точка бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях $x = 4\cos 2\pi t$ і $y = 2\sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$. Визначити траєкторію результуючого коливання і зобразити її на рисунку.

17.24. Кульку математичного маятника довжиною l=1м відхилили від положення рівноваги і відпустили. Записати рівняння коливань маятника x(t), вважаючи їх гармонічними. Тертям знехтувати. x_0=1 см.

17.25. Величина максимального відхилення математичного маятника від положення рівноваги x_{max}=2,5см, а швидкість, з якою він проходить положення рівноваги, v_{max}= 7,85см/с. Знайти період коливань T і записати рівняння коливань, вважаючи їх гармонічними.

17.26. Знати жорсткість пружини, яка здійснює гармонічні коливання з амплітудою A=2см, якщо її максимальна кінетична енергія W_{max}=100мДж.

17.27. Дві однакові пружини скріплені послідовно і здійснюють вертикальні гармонічні коливання з періодом T_1=2с. Чому дорівнюватиме період коливань T_2 цих пружин, якщо їх з'єднати паралельно?

17.28. Амплітуда згасаючих коливань маятника за час t=2 хв. зменшилась у два рази. Визначити коефіцієнт згасання β.

17.29. Амплітуда згасаючих коливань математичного маятника за час t=1 хв. зменшилась у три рази. Визначити у скільки разів вона зменшиться за 4 хвилини.

17.30. У скільки разів зменшиться амплітуда коливань математичного маятника за один період, якщо його логарифмічний декремент згасання δ=0,2?

17.31. Початкова амплітуда згасаючих коливань маятника A_0 дорівнює 3см. Через t_1 = 10с A_1= 1см. Визначити, через який проміжок часу амплітуда коливань дорівнюватиме A_2=0,3см.

17.32. Записати рівняння згасаючих гармонічних коливань, які відбуваються за законом синуса з періодом T=2с і логарифмічним декрементом згасання δ=0,2. Зміщення точки через t=0,5с від початку руху x=5см. Початкова фаза φ_0=0. Побудувати графік у межах двох періодів.

17.33. Амплітуда коливань математичного маятника довжиною *l*=1м за час t=1хв зменшилась у 2 рази. Знайти логарифмічний декремент згасання δ.

17.34. Амплітуда коливань математичного маятника довжиною *l*=0,5м за час t =2хв зменшилась у 3 рази. Знайти логарифмічний декремент згасання δ.

17.35. У скільки разів зменшиться амплітуда коливань математичного маятника за один період, якщо його логарифмічний декремент згасання δ=0,2?

17.36. Амплітуда згасаючих коливань математичного маятника за час t_1=1хв зменшилась вдвічі. У скільки разів зменшиться амплітуда коливань за час t_2=2хв.?

17.37. Математичний маятник довжиною l=25см здійснює згасаючі гармонічні коливання з логарифмічним декрементом згасання δ=0,5. За який час t повна енергія маятника зменшиться у 10 разів?

17.38. Логарифмічний декремент згасання коливань маятника δ=0,02. Визначити у скільки разів зменшиться амплітуда цих коливань після N=100 повних коливань маятника.

17.39. Коливальний контур складається з котушки індуктивністю L=30мкГн і конденсатора з площею пластини S=100см^2, відстань між якими d=0,1мм. Чому дорівнює діелектрична проникність ε середовища між пластинами, якщо контур налаштовано на довжину хвилі λ=750м?

17.40. Коливальний контур радіоприймача складається з котушки індуктивністю L=1,2мГн і конденсатора, ємність якого може змінюватись від C_1=8,9пФ до C_2=90пФ. У якому діапазоні може приймати радіостанції цей приймач?

17.41. Різниця потенціалів на обкладинках конденсатора у коливальному контурі змінюється за законом $U=50\cos 10^4\pi t$ В. Ємність конденсатора C=0,1мкФ. Знайти: період T коливань у контурі; індуктивність L контуру; довжину хвилі λ, на яку налаштовано контур.

17.42. Знайти зміщення від положення рівноваги точки, яка віддалена від джерела коливань на відстань $l=\lambda/12$ для моменту часу $t=T/6$. Амплітуда коливань A=10 см.

17.43. Знайти довжину хвилі λ, якщо зміщення точки, що відстоїть від джерела коливань на відстані l=4 см у момент часу $t=T/6$ дорівнює половині амплітуди.

17.44. Коливальний процес поширюється вздовж прямої лінії зі швидкістю v=40м/с. Частота коливань ν=5 Гц. Визначити (у радіанах і градусах) різницю фаз коливань між джерелом і точкою, яка віддалена від джерела на відстань l=3 м.

17.45. Якою буде різниця фаз $\Delta\varphi$ двох точок, які розташовані на промені поширення коливань на відстані від джерела коливань l_1=10 м і l_2=16 м відповідно. Частота коливань ν=25 Гц ,швидкість поширення коливань v=300м/с.

17.46. Знайти різницю фаз $\Delta\varphi$ коливань двох точок, розташованих на лінії поширення коливань, якщо відстань між ними дорівнює Δl=1,5 м, а довжина хвилі λ=1 м.

17.47. Дві точки знаходяться на відстані $\Delta x = 50$ см одна від одної на прямій, вздовж якої поширюється хвиля зі швидкістю v=50 м/с. Період T коливань дорівнює 0,05 с. Визначити різницю фаз коливань $\Delta\varphi$.

17.48. Визначити швидкість поширення хвилі в пружному середовищі, якщо різниця фаз $\Delta\varphi$ коливань двох точок середовища, які знаходяться на відстані $\Delta\delta$ = 10см, дорівнює $\pi/3$. Частота коливань ν=25 Гц.

17.49. Хвиля розповсюджується в пружному середовищі зі швидкістю v=100м/с, Найменша відстань Δx між точками середовища, фази коливань яких є протилежними, дорівнює 1м. Визначити частоту ν коливань.

17.50. Пружна хвиля розповсюджується вздовж прямої зі швидкістю v=20м/с. Знайти зміщення від положення рівноваги точки, яка віддалена від джерела коливань на відстань x=45м для моменту часу t=4с після початку коливань. Амплітуда коливань A=10 см.

Тестові завдання

Вибрати вірну відповідь:

1. Викликати гармонічні коливання здатні сили:

1. тяжіння та пружності 2. тертя та пружності
3. пружності та опору 4. тяжіння та опору

2. Циклічна частота точки, яка здійснює гармонічні коливання з періодом T=2 с дорівнює:

1. 3,14рад/с 2. 2рад/с 3. 6,28рад/с 4. 0,5 рад/с

3. Закон, за яким відбуваються коливання точки має вид: x = 2 sin 5t (см). Максимальне значення швидкості точки дорівнює

1. 2 см/с. 2. 10 см/с 3. 20 см/с. 4. 50 см/с.

4. Закон, за яким відбуваються коливання точки має вид: x = 2 sin 5t (см). Максимальне значення прискорення точки дорівнює:

1. 2 см/с^2 2. 10 см/с^2 3. 20 см/с^2 4. 50 см/с^2

5. Енергія коливального руху, якщо амплітуду коливання збільшити в 2 рази, а частоту зменшити у 2 рази

1. зменшиться у 2 рази 2. збільшиться у 2рази
3. збільшиться у 4 рази 4. не зміниться

6. Енергія коливального руху, якщо амплітуду коливання зменшити в 2 рази, а частоту збільшити у 4 рази:

1. зменшиться у 2 рази; 2. збільшиться у 8 разів;
3. збільшиться у 4 рази 4. не зміниться.

7. **Установити відповідність** між характером гармонічних коливань та диференціальним рівнянням, яке їх описує.

Вид гармонічного коливання	**Диференціальне рівняння**
1. власні коливання	А. mx``+ rx`+ kx=0
2. вільні (згасаючі) коливання	Б. mx``+ rx`+ kx=Fo cos ωt
3. вимушені коливання	В. mx``+ kx=0

Вибрати вірну відповідь:

8. Як змінюється резонансна амплітуда вимушених коливань, якщо при інших рівних умовах збільшити коефіцієнт загасання β?

1. зменшується 2. не змінюється
3. збільшується 4. величина β впливає тільки на резонансну частоту

9. Якщо при інших рівних умовах зменшити коефіцієнт загасання β, резонансна частота вимушених коливань

1. не змінюється 2. збільшується.
3. зменшується 4. від β залежить тільки резонансної амплітуд

10. Додаються два взаємно перпендикулярних коливання з амплітудами 3 см та 4 см і різницею фаз $\Delta\phi = \pi$. Максимальне відхилення від рівноваги точки, що приймає участь у коливаннях, дорівнює:
1. 4 см 2. 7 см 3. 12 см 4. 5 см.

11. Точка приймає участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях однакової частоти, однакової амплітуди.

Установити відповідність між різницею фаз коливань, що додаються, та характером траєкторії різницею фаз $\Delta\varphi = 2\pi$. Траєкторія точки:

Різниця фаз $\Delta\varphi$	**Характер траєкторії**
1. $\Delta\varphi = 0$	А. еліпс
2. $\Delta\varphi = \pm\pi/2$.	Б. пряма, що проходить через першу та третю чверті системи координат
3. $\Delta\varphi = \pi$.	В. коло
	Г. пряма, що проходить через другу та четверту чверті с-ми координат.

Вибрати вірну відповідь:

12. Додаються два коливання одного напрямку та періоду. Амплітуда результуючого коливання дорівнюватиме $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ при різниці фаз
1. $\Delta\varphi = 0$ 2. $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ 3. $\Delta\varphi = \pi$ 4. $\Delta\varphi = 2\pi$

13. Якщо ємність конденсатора у коливальному контурі (без опору) зменшиться у два рази, а індуктивність збільшиться у два рази, його резонансна частота:
1. зменшується у 2 рази 2. збільшується у 2 рази
3 не змінюється. 4. зменшується у 4 рази

14. Період коливань коливального контуру, у якому електроємність збільшили у чотири рази (опір не враховувати),
1. зменшився у 2 рази 2. зменшився у 4 рази
3. збільшився у 2 рази 4. збільшився у 4 рази

15. Дві хвилі від когерентних джерел надходять у деяку точку простору з різницею ходу 25 см і збуджують коливання з однаковими амплітудами $A_1=A_2=A$. Довжина хвилі 0,1 м. Амплітуда результуючого коливання у даній точці дорівнює
1. 2A 2. A 3. 0 4. A/2

16. Дві хвилі від когерентних джерел надходять у деяку точку простору з різницею ходу 30 см і збуджують коливання з однаковими амплітудами $A_1=A_2=A$. Довжина хвилі 0,2 м. Амплітуда результуючого коливання у даній точці дорівнює
1. 2A 2. 0 3. A 4. A/2

17. Безпосередньо не пов'язана з іншими характеристиками хвилі
1. частота 2. фазова швидкість
3. довжина хвилі 4. амплітуда

Розділ 18. Оптика

Тема: Елементи геометричної оптики. Закони геометричної оптики.

Оптичний діапазон електромагнітних хвиль. Часова і просторова когерентність. Інтерференція світла. Когерентні хвилі. Застосування інтерференції та засоби спостереження.

Дифракція Френеля та Фраунгофера. Дифракційна решітка. . Поляризація світла. Закон Малюса, закон Брюстера, подвійне променезаломлення. Оптичні анізотропні середовища.

Дисперсія світла. Нормальна і аномальна дисперсія. Розсіяння та поглинання світла. Розсіяння Релея.

Теплове випромінювання. Закони Віна і Стефана-Больцмана. Фотони та їх характеристики. Фотоелектричний ефект. Тиск світла. Ефект Комптона.

Основні поняття та формули

18.1 Геометрична оптика і фотометрія

Фотометрія

Потік енергії випромінювання Φ_e визначається енергією, що переноситься через дану площину за одиницю часу,

$$\Phi_e = \frac{dW}{dt}, \qquad (18.1)$$

де dW – енергія, що переноситься за час dt.

● **Світловий потік** – потік енергії, який оцінюється за зоровим сприйманням. Для інтервалу довжин хвиль $d\lambda$

$$d\Phi = V(\lambda)d\Phi_e,$$

де $V(\lambda)$ – функція видності, $d\Phi_e$ – потік енергії випромінювання.

● **Сила світла** I (характеристика точкового джерела) – світловий потік, що припадає на одиничний тілесний кут $I = \frac{d\Phi}{d\Omega}$, (18.2)

Для ізотропного джерела $I = \frac{\Phi}{\Omega} = \frac{\Phi}{4\pi}$. (18.2а)

Тілесний кут пов'язаний з плоским кутом 2θ розхилу конуса:

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos\theta).$$

● **Освітленість** $E = \frac{d\Phi_{пад}}{dS}$, (18.3)

де $d\Phi_{пад}$ – світловий потік, що падає на поверхню dS.

Для точкового ізотропного джерела $E = \frac{I}{r^2}\cos\alpha$, (18.4)

де r – відстань від джерела до поверхні, на яку падає світло, α – кут між нормаллю до поверхні і напрямом на джерело (кут падіння).

● Характеристики протяжних джерел.

Світність $$R = \frac{d\Phi_{випр}}{dS}, \qquad (18.5)$$

де $d\Phi_{випр}$ – потік, що випромінюється елементом dS поверхні в один бік. Якщо світність поверхні зумовлена її освітленістю, то

$$R=\rho E, \qquad (18.6)$$

де ρ – коефіцієнт відбиття.

Яскравість B у заданому напрямі – світловий потік, що випромінюється з одиниці видимої поверхні в межах одиничного тілесного кута в заданому напрямі, або сила світла, віднесена до одиниці видимої поверхні джерела випромінювання,

$$B = \frac{d\Phi}{d\Omega \cdot dS \cdot \cos\theta} = \frac{I}{dS \cdot \cos\theta}, \qquad (18.7)$$

де θ – кут між нормаллю до поверхні та напрямом випромінювання; $dS\cos\theta$ –видима в даному напрямі поверхня випромінювача.

В окремому випадку (закон Ламберта) яскравість є однаковою за всіма напрямами B=const. Звідки умова виконання закону Ламберта: сила світла елементарної площадки в будь-якому напрямі

$$I = I_0 \cos\theta,$$

де I_0 – сила світла в напрямі нормалі до поверхні.

Світність ламбертових (косинусних) випромінювачів

$$R = \pi B. \qquad (18.8)$$

Геометрична оптика

Закони геометричної оптики

● **Закон прямолінійного розповсюдження світла:** в однорідному середовищі світло розповсюджуються прямолінійно.

● **Закон відбивання світла.** Кут відбивання дорівнює куту падіння: $\angle i = -\angle i'$, де $\angle i$ - кут падіння, $\angle i'$ - кут відбивання. (Знак мінус указує, що кути відраховуються від нормалі у протилежних напрямах).

Падаючий, відбитий та заломлений промені лежать в одній площині з перпендикуляром до границі розділу двох середовищ, встановленим в точці падіння (див. рис. 18.1а,б).

● **Закон заломлення світла.** Відношення синуса кута падіння до синуса кута заломлення є величиною сталою для даних двох середовищ, що має назву відносного показника заломлення:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}, \qquad (18.9)$$

де i – кут падіння; r – кут заломлення; n_{21} – відносний показник заломлення середовища 2 відносно середовища 1; n_1, n_2 – абсолютні показники заломлення.

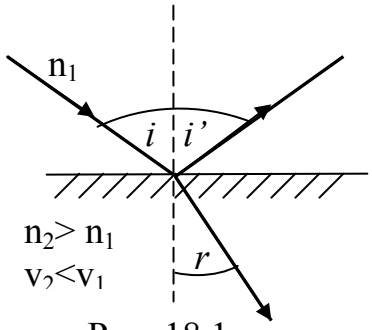


Рис. 18.1а

Абсолютний показник заломлення (показник заломлення середовища відносно вакууму) визначає оптичну густину середовища, тобто показує у скільки разів швидкість світла в середовищі менша за швидкість світла у вакуумі:

$$n = \frac{c}{v}, \qquad (18.10)$$

де c – швидкість світла в вакуумі; v – швидкість світла в даному середовищі.

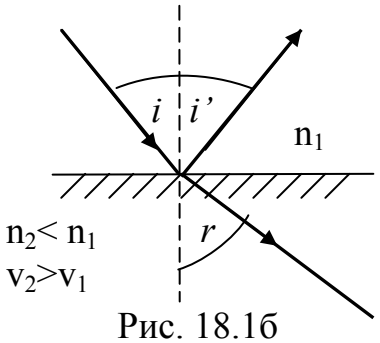


Рис. 18.1б

Відносний показник заломлення

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}, \qquad (18.11)$$

де v_1 і v_2 – швидкості світла у першому та другому середовищі відповідно.

В залежності від співвідношення швидкостей світла (абсолютних показників заломлення) в даних середовищах промінь або наближується до нормалі (рис. 18.1а), або віддаляється від неї (рис. 18.1б).

● **Закон незалежності світлових променів.** Світлові промені, поширюючись у просторі, при перетинанні не збурюють один одного.

● **Закон оборотності світлових променів.** При зміні напряму світла на протилежний промінь світла розповсюджуються тим самим шляхом, але в зворотному напрямі.

Оберненість променів випливає з закону заломлення світла:

$$\frac{\sin r}{\sin i} = \frac{n_1}{n_2} = n_{12}; \quad n_{21} = \frac{1}{n_{12}}.$$

● **Явище повного внутрішнього відбивання**

При переході світла із середовища з більшою оптичною густиною в середовище з меншою оптичною густиною ($n_2 < n_1$) при деякому куті падіння $i_{гр}$, який називають граничним кутом повного внутрішнього відбивання, заломлений промінь розповсюджується вздовж границі двох

середовищ. При збільшенні кута падіння ($i > i_{гр}$) промінь світла повністю відбивається від границі середовищ (заломлений промінь зникає) (рис. 18.2). Це явище носить назву явища повного внутрішнього відбивання).

$$\sin i_{гр} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (n_2 < n_1) \qquad (18.12)$$

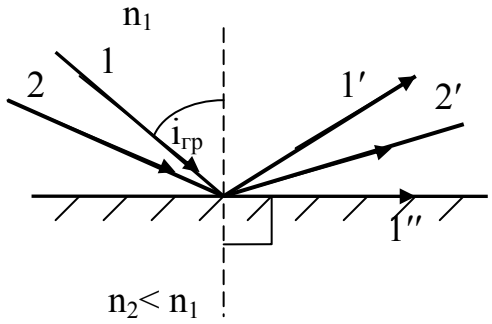


Рис. 18.2

● Оптична сила тонкої лінзи в середовищі з показником заломлення n_0

$$D = (n - n_0)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right),$$

де n – показник заломлення матеріалу лінзи; R_1, R_2 – радіуси кривизни поверхонь лінзи.

Формула тонкої лінзи $\quad D = \frac{1}{F} = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1}$,

де a_1, a_2 – відстані предмета та зображення від оптичного центра лінзи.

Значення відрізків у формулі – алгебраїчні. Відрізки, які відраховуються від центра лінзи вздовж променя, вважаються додатними, а проти променя – від'ємними.

Оптична сила D двох тонких лінз з оптичними силами D_1 і D_2, складених разом $\quad D = D_1 + D_2$.

Для сферичного дзеркала оптична сила D визначається формулою

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{2}{R} = \frac{1}{F} = D,$$

де a_1, a_2 – відстані предмета та зображення, які відраховуються від вершини дзеркала; R – радіус кривизни дзеркала; F – його фокусна відстань. Правило знаків для дзеркал таке саме, як і для лінз.

Якщо F виражене у метрах, то D буде виражене у діоптріях (дптр): 1 дптр = 1м$^{-1}$.

Поперечне лінійне збільшення у дзеркалах та лінзах $\quad k = \frac{y_2}{y_1} = \pm\left|\frac{a_2}{a_1}\right|$,

де знак „+" відповідає прямому зображенню, „–" – оберненому.

Збільшення лупи $\quad k = \frac{L}{F}$, де L – відстань найкращого бачення (L=25см); F – фокусна відстань лупи.

18.2. Хвильова оптика

Інтерференція світла.

● **Інтерференція** – перерозподіл інтенсивності світла у просторі (поява максимумів та мінімумів інтенсивності) при накладанні когерентних хвиль.

Когерентні хвилі – хвилі однакової частоти, однакової поляризації (напряму коливань), зсув фаз між якими залишається незмінним у часі.

Для отримання когерентних хвиль від звичайних джерел світа, які є некогерентними внаслідок застосовують

Умови максимуму і мінімуму при інтерференції визначаються різницею фаз $\delta\varphi$ хвиль, які збуджують коливання у даній точці простору, або їх оптичною різницею хода Δ.

● Оптична різниця ходу двох світлових хвиль – різниця їх оптичних довжин шляхів $\Delta = L_1 - L_2$. (18.13)

Оптична довжина шляху світлової хвилі – добуток її геометричної довжини шляху s в середовищі на абсолютний показник заломлення середовища n:

$$L = ns. \qquad (18.14)$$

Зв'язок між різницею фаз і оптичною різницею ходу

$$\delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta}{\lambda}, \text{ де } \lambda \text{ – довжина світлової хвилі.} \qquad (18.15)$$

У разі відбивання світла від оптично більш густого середовища фаза коливання змінюється стрибкоподібно на π, відповідна зміна оптичної різниці ходу складає $\frac{\lambda}{2}$.

● Умови інтерференційних максимумів та мінімумів, виражені через різницю фаз:

$$\delta\varphi = \pm 2m\pi \quad (m = 0,1,2,...) \text{ – умова максимуму;} \qquad (18.16)$$

$$\delta\varphi = \pm(2m+1)\pi \quad (m = 0,1,2,...) \text{ – умова мінімуму.} \qquad (18.17)$$

Ті самі умови, виражені через оптичну різницю ходу мають вигляд:

умова максимумів $\Delta = \pm m\lambda_0$ (m=0, 1, 2,...); (18.18)

умова мінімумів $\Delta = \pm(2m+1)\frac{\lambda_0}{2}$ (m=0, 1, 2,..). (18.19)

Відстань Δx між двома інтерференційними смугами на екрані, паралельному двом когерентним джерелам світла

$$\Delta x = \frac{L}{d}\lambda, \qquad (18.20)$$

де L – відстань від екрану до джерел світла, які знаходяться на відстані d один від одного (при цьому $L >> d$).

● Оптична різниця ходу світлових хвиль, відбитих від тонкої пластинки (плівки), яка розташована в повітрі (приклад 4.18, рис.4.22), дорівнює

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2}, \qquad (18.21)$$

або

$$\Delta = 2dn\cos r \pm \frac{\lambda_0}{2}, \qquad (18.21a)$$

де d – товщина пластинки, n – її показник заломлення, i – кут падіння, r – кут заломлення світла в пластинці.

Відповідно, умови максимуму та мінімуму при спостереженні інтерференції в тонких плівках у відбитому світлі мають вигляд:

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} = \begin{cases} \pm(2m-1)\dfrac{\lambda_0}{2} & -\max; \\ = \pm m\lambda_0 & -\min; \end{cases} \quad (m = 1, 2, 3, ...), \qquad (18.22)$$

де m – порядок максимуму або мінімуму.

При спостереженні інтерференції в тонких плівках у світі, який пройшов через плівку, відсутня додаткова різниця ходу $\frac{\lambda_0}{2}$, яка ураховує зміну фази коливань при відбитті одного з променів від плівки ($n_{пл.} > n_{пов.}$). Тому в цьому випадку

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} = \begin{cases} \pm m\lambda_0 & -\max; \\ \pm(2m-1)\dfrac{\lambda_0}{2} & -\min; \end{cases} \quad (m = 1, 2, 3, ...) \qquad (18.22a)$$

● При інтерференції відбитих хвиль у тонкому повітряному зазорі між плоскою скляною пластиною і притиснутої до неї плоско-опуклої лінзи (приклад 18.9, рис.18.12) спостерігаються кільця Ньютона – концентричні темні та світлі кільця, центри яких співпадають с точкою O дотику лінзи та пластини. Різниця ходу хвиль, відбитих від верхньої та нижньої поверхні зазору, дорівнює

$$\Delta = \frac{nr^2}{R} + \frac{\lambda}{2}, \qquad (18.23)$$

де r – відстань від точки спостереження до осі оптичної системи.

Радіуси світлих $r_{m_{max}}$ і темних $r_{m_{min}}$ кілець Ньютона у відбитому світлі

$$r_{m_{max}} = \sqrt{\frac{(2m-1)R\lambda}{2}}, \quad (m=1, 2, 3,\ldots); \qquad (18.24)$$

$$r_{m_{min}} = \sqrt{mR\lambda}, \qquad (m=1, 2, 3,\ldots), \qquad (18.25)$$

де m – номер кільця, R – радіус кривизни лінзи, λ – довжина світлової хвилі у речовині прошарку.

При спостереженні кілець у світлі, що пройшло через систему, положення світлих і темних кілець протилежне їх положенню у відбитому світлі:

$$r_{m_{max}} = \sqrt{mR\lambda}, \qquad (m=1, 2, 3,\ldots); \qquad (18.24a)$$

$$r_{m_{min}} = \sqrt{\frac{(2m-1)R\lambda}{2}}, \quad (m=1, 2, 3,\ldots). \qquad (18.25a)$$

Дифракція світла.

● **Дифракція** – огинання хвилями перепон, порівняних за розміром з довжиною хвилі, тобто попадання хвиль в область геометричної тіні. Явище дифракції є характерним для будь-яких хвильових процесів, і пояснюється за допомогою принципу Гюйгенса - Френеля.

● **Принцип Гюйгенса - Френеля.** Згідно цьому принципу кожну точку фронту хвилі можна розглядати як самостійне джерело вторинних напівсферичних когерентних хвиль. Картина, яка спостерігається на екрані, є результатом інтерференції цих вторинних хвиль.

Розрахунок картини від симетричного фронту хвилі спрощується застосуванням методу зон Френеля.

● **Метод зон Френеля** полягає у заміні дії первинного джерела дією вторинних джерел, які утворюються шляхом розбивання фронту хвилі на окремі ділянки (зони Френеля). Зони Френеля будують таким способом, щоб різниця ходу хвиль, які приходять від відповідних ділянок сусідніх зон у точку, де відбувається розрахунок інтенсивності світла, становила $\frac{\lambda}{2}$. Тоді хвилі збуджують у точці коливання у протилежних фазах і ослаблюють одна одну.

● При дифракції Фраунгофера (дифракції у паралельних променях) на щілині у разі нормального падіння світла:

умова максимумів інтенсивності світла

$$a\sin\varphi = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2} \qquad (m = 1, 2, 3,...), \qquad (18.26)$$

де a – ширина щілини, φ – кут дифракції.

Умова мінімумів інтенсивності світла

$$a\sin\varphi = \pm m\lambda \qquad (m = 1, 2, 3,...). \qquad (18.27)$$

● **Дифракційна ґратка –** система паралельних щілин рівної ширини, які лежать в одній площині і розділені рівними за шириною непрозорими проміжками.

Відстані між відповідними точками сусідніх щілин – **стала або період дифракційної ґратки** d:

$$d = a + b, \qquad (18.28)$$

де a – ширина непрозорої ділянки, b – ширина щілини.

Інакше, $d = \frac{1}{n}$ (18.28а), де n – кількість щілин на одиницю довжини ґратки.

При дифракції Фраунгофера на дифракційній ґратці у разі нормального падіння світла:

положення головних максимумів інтенсивності

$$d\sin\varphi = \pm m\lambda \qquad (m = 0, 1, 2, 3,...), \qquad (18.29)$$

де d – період ґратки, m – порядок головного максимуму.

Положення головних мінімумів інтенсивності збігається з положенням мінімумів при дифракції на окремій щілині

$$a\sin\varphi = \pm m\lambda \qquad (m = 1, 2, 3,...), \qquad (18.27а)$$

де a – ширина щілини.

Найвищий порядок головного максимуму, що спостерігається, у разі нормального падіння світла $m_{max} = E\left(\frac{d}{\lambda}\right)$ (18.30)

де функція $E\left(\frac{d}{\lambda}\right)$ дорівнює цілій частині числа $\left(\frac{d}{\lambda}\right)$.

Кутова та лінійна дисперсія дифракційних ґраток відповідно

$$D_\varphi = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{m}{d\cos\varphi}; \quad (18.31) \qquad D_l = \frac{\delta l}{\delta\lambda} \approx FD_\varphi, \quad (18.31а)$$

де $\delta\varphi$ - кутова відстань; δl - лінійна відстань між спектральними лініями, які відрізняються довжиною хвилі на $\delta\lambda$; F – фокусна відстань лінзи, що проектує спектр на екран.

Роздільна здатність дифракційної ґратки $R = \frac{\lambda}{d\lambda} = mN$, (18.32)

де λ, λ+dλ – довжини хвиль двох спектральних ліній, що розрізняються у спектрі.

Формула Вульфа – Бреггів для дифракції рентгенівських променів на кристалах

$$2d\sin\theta = \pm m\lambda, \qquad (18.33)$$

де θ – кут ковзання променів, що падають на кристал; d – відстань між атомними площинами кристалів.

- **Поляризація світла.**

Поляризоване світло – світло, в якому напрями коливань векторів $\vec{E}$ (світловий вектор) та $\vec{H}$ виділені або упорядковані тим чи іншим чином.

Основні види поляризованого світла:

- **лінійно (плоско) поляризоване** – світло, в якому вектор $\vec{E}$ (і вектор $\vec{H}$) коливається тільки в одному напрямі;
- **еліптично поляризоване** світло – кінець вектора $\vec{E}$ (і вектора $\vec{H}$) описує еліпс;

- **циркульно поляризоване** світло (поляризоване по колу) – кінець вектора $\vec{E}$ (і вектора $\vec{H}$) описує коло.

Світло з усіма можливими рівно ймовірними напрямами коливань світлового вектора, які неперервно та хаотично змінюють один одного, має назву **природного** (неполяризованого) світла. Якщо внаслідок зовнішнього впливу з'являється переважний напрям коливань вектора $\vec{E}$, світло частково поляризоване.

Степінь поляризації світла $P = \dfrac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$.

Площина поляризації – це площина, яка проходить через напрям коливань світлового вектора $\vec{E}$ та напрям розповсюдження хвилі (промінь).

Способи отримання поляризованого світла:

– поляризація при відбитті та заломлені світла;

– подвійне променезаломлення у природних анізотропних кристалах або за допомогою штучної анізотропії.

● **Закон Брюстера:** якщо кут падіння світлового променя на межу поділу двох середовищ дорівнює поляризаційному куту $i_Б$ (куту Брюстера) , який визначається співвідношенням

$$\operatorname{tg} i_Б = n_{21} = \frac{n_2}{n_1}, \qquad (18.34)$$

то відбитий промінь є повністю лінійно поляризованим.

Тут n_{21} – відносний показник заломлення; n_2, n_1 – абсолютні показники заломлення середовищ на межі поділу.

Відбитий промінь повністю поляризований у площині, перпендикулярній до площини падіння, заломлений – поляризований максимально, але неповністю у площині падіння.

При падінні під кутом Брюстера відбитий та заломлений проміні – взаємно перпендикулярні.

● **Подвійне променезаломлення** – розділення падаючого променя світла всередині анізотропних кристалів на два променя – **звичайний** (о) і **незвичайний** (е), які розповсюджуються, взагалі, з різними швидкостями (рис. 18.3). Швидкість розповсюдження звичайного променя і, відповідно, показник заломлення n_o не залежить від напряму розповсюдження в кристалі, тобто хвиля поводить себе в

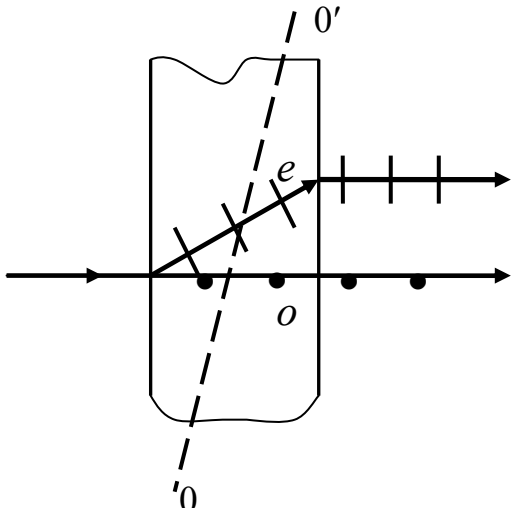


Рис. 18.3

кристалі як в ізотропному середовищі (виконується звичайний закон заломлення променів). Швидкість і показник заломлення n_e незвичайного променя залежать від напряму розповсюдження.

Напрям, вздовж якого звичайний і незвичайний промінь не розділяються на два, розповсюджуючись з однаковою швидкістю – **оптична вісь кристала.** Будь-яка площина, яка проходить через оптичну вісь – **головний переріз** або **головна площина** кристала.

Звичайна і незвичайна хвилі (промені) – лінійно поляризовані: звичайний – у напрямі, перпендикулярному до головної площини кристала, незвичайний – у головній площині (див. рис. 18.3).

● Пристрій, за допомогою якого можна отримати поляризоване світло (за звичаєм – лінійно-поляризоване), має назву **поляризатора**. Той самий пристрій, використаний для аналізу поляризації світла, називають **аналізатором**.

Площина поляризатора або **аналізатора** – площина, в якій прилад пропускає коливання вектора $\vec{E}$.

● **Закон Малюса** визначає інтенсивність поляризованого світла, яке вийшло з приладу, за допомогою якого отримують поляризоване світло.

$$I = I_0 \cos^2\alpha \ , \qquad (18.35)$$

де I та I_0 – відповідно, інтенсивність плоскополяризованого світла, що пройшло через поляризатор, та падаючого плоскополяризованого світла; α – кут між площиною поляризації падаючого світла і площиною пропускання поляризатора.

У випадку проходження природного світла крізь систему «поляризатор – аналізатор» (рис. 18.4) $I_0 = \frac{1}{2} I_{прир.}$.

Відповідно,

$$I = \frac{1}{2} I_{прир.} \cos^2\alpha, \qquad (18.35а)$$

де $I_{прир.}$ – інтенсивність природного світла, що падає на поляризатор; α – кут між площинами поляризатора і аналізатора .

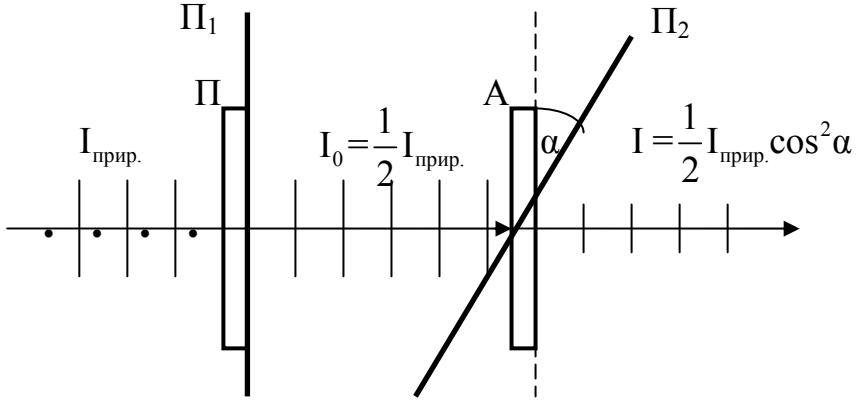


Рис. 18.4

Якщо у кожному з приладів утрати інтенсивності складають k долів від одиниці, то інтенсивність світла, яке пройшло крізь поляризатор та аналізатор обчислюється за формулою:

$$I = \frac{1}{2} I_{прир.} (1-k)^2 \cos^2\alpha. \qquad (18.36)$$

● Зовнішні впливи, під дією яких може виникати штучна анізотропія, і величини, які впливають на степінь анізотропії представлені в таблиці 18.1.

Таблиця 18.1.

Дія, яка приводить до виникнення анізотропії	**Середовище, в якому спостерігається ефект**	**Напрям оптичної осі**	**Міра анізотропії – різниця показників заломлення звичайного n_o та незвичайного n_e променів**
Поздовжня деформація (стиску або розтягу	кристали кубічної системи, скло, смоли та інші аморфні тіла	напрям деформації	$(n_o - n_e) = k\sigma$; k – константа фото пружності; σ – механічне напруження.
Електричне поле (ефект Керра)	рідини, аморфні тіла, гази	напрям електричного поля	$(n_o - n_e) = \lambda_0 B E^2$; B – стала Керра, E – напруженість зовнішнього електричного поля
Магнітне поле (ефект Коттона – Мутона)	рідини, скло, колоїди	напрям магнітного поля	$(n_o - n_e) = C\lambda_0 H^2$, C – стала Коттона – Мутона; H – напруженість зовнішнього магнітного поля

● Кут φ повороту площини поляризації оптично активними речовинами:
а) у твердих тілах $\varphi = \alpha l$ (18.37), де α – стала обертання; l – довжина шляху, який пройшло світло в оптично активній речовині;
б) у розчинах $\varphi = [\alpha] c l$ (18.38), де $[\alpha]$– питома стала обертання; c – концентрація оптично активної речовини у розчині.

18.3. Квантова теорія випромінювання. Фотони.

● **Теплове випромінювання** – випромінювання тілами електромагнітних хвиль за рахунок внутрішньої енергії.

Характеристики та закони теплового випромінювання.

Випромінювальна здатність тіла R(T) – кількість енергії, що випромінюється при заданій температурі з одиниці поверхні тіла по всім напрямкам за одиницю часу в усьому інтервалі частот:

$$R = \frac{dW}{dt \cdot ds}, \qquad [R_e] = \left[\frac{Вт}{м^2}\right]. \qquad (18.39)$$

Спектральна випромінювальна здатність тіла $r(\lambda,T)$ або $r(\nu,T)$ – відношення кількості енергії, що випромінюється при заданій температурі з одиниці поверхні тіла за одиницю часу в інтервалі довжин хвиль $(\lambda, \lambda+d\lambda)$ або інтервалі частот $(\nu,\nu+d\nu)$, до цього інтервалу:

$$r(\lambda,T)=\frac{dW_\lambda}{dt\cdot ds\cdot d\lambda}\ ; \qquad r(\nu,T)=\frac{dW_\nu}{dt\cdot ds\cdot d\nu} \tag{18.40}$$

$$\left[r(\lambda,T)\right]=\left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}\right]; \qquad \left[r(\nu,T)\right]=\left[\frac{\text{Дж}}{\text{м}^2}\right].$$

Повна випромінювальна здатність R_e пов'язана із спектральною випромінювальною здатністю r_λ співвідношенням

$$R(T)=\int_0^\infty r(\lambda,T)d\lambda.$$

Поглинальна здатність тіла a(T) показує, яку долю падаючого випромінювання поглинає тіло при заданій температурі.

Спектральна поглинальна здатність тіла $a(\lambda,T)$ або $a(\nu,T)$ – показує, яку частину падаючого випромінювання в інтервалі довжин хвиль $(\lambda, \lambda+d\lambda)$ або інтервалі частот $(\nu,\nu+d\nu)$ тіло поглинає при заданій температурі.

Абсолютно чорне тіло – тіло, яке здатне повністю поглинати падаюче на нього випромінювання всіх довжин хвиль при будь-якій температурі, тобто для абсолютно чорного тіла $a(T) = a(\lambda,T)=a(\nu,T)\equiv 1$.

Сірим називають тіло, спектральна поглинальна здатність якого не залежить від довжини хвилі (частоти), але < 1.

Закон Стефана – Больцмана для абсолютно чорного тіла

$$R_e=\sigma T^4, \tag{18.41}$$

де R_e – випромінювальна здатність абсолютно чорного тіла; σ – стала Стефана – Больцмана, $\sigma=5{,}67\cdot 10^{-8}$ Вт/(м^2·К^4); T – температура за термодинамічною шкалою температур.

Якщо тіло не абсолютно чорне, а сіре, то

$$R=a\sigma T^4 \tag{18.41a}$$

де a – поглинальна здатність сірого тіла; завжди < 1.

Для абсолютно чорного тіла справедливі перший та другий закони Віна.

Закон зміщення Віна (перший закон Віна)

$$\lambda_{max}=\frac{b}{T}, \tag{18.42}$$

де λ_{max} – довжина хвилі, на яку припадає максимум енергії випромінювання, тобто яка відповідає максимуму спектральної

випромінювальної здатності абсолютно чорного тіла; b – стала закону зміщення Віна, $b = 2{,}89\cdot10^{-3}$ м·К.

Максимальна спектральна випромінювальна здатність абсолютно чорного тіла зростає пропорційно п'ятому ступеню температури (**другий закон Віна**):

$$r_{\lambda_{max}} = CT^5, \text{ де } C = 1{,}29\cdot10^{-5}\ \text{Вт/(м}^2\cdot\text{К}^5). \quad (18.43)$$

Характеристики фотона.

Формула Планка для енергії фотона

$$\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \quad \text{або} \quad \varepsilon = \hbar\omega, \quad (18.44)$$

де h – стала Планка, $h=6{,}63\cdot10^{-34}$ Дж·с; $\hbar = \frac{h}{2\pi}$; ν – частота фотона; ω – циклічна частота; λ– довжина хвилі фотона; c – швидкість світла в вакуумі.

Вектор імпульсу фотона $\vec{p}=\hbar\vec{k}$,

де $\vec{k}$ – хвильовий вектор, величина якого дорівнює: $k = 2\pi/\lambda$.

Звідки величина імпульсу фотона $p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h\nu}{c}$, (18.45)

де λ – довжина хвилі фотона; c – швидкість світла в вакуумі.

Маса фотона $m = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{h}{c\lambda}$. (18.46)

● **Тиск світла** у разі нормального падіння на поверхню з коефіцієнтом відбиття ρ дорівнює $p = \frac{E_e}{c}(1+\rho) = w(1+\rho)$, (18.47)

де E_e – енергетична освітленість поверхні, c – швидкість світла у вакуумі, w – об'ємна густина енергії випромінювання.

Енергетична освітленість поверхні – енергія, що падає на одиницю поверхні за одиницю часу, дорівнює

$$E_e = nh\nu, \quad (18.48)$$

де n – кількість фотонів, які щосекунди падають на одиницю площі поверхні.

● **Фотоефект** – електричні явища, які спостерігаються при поглинанні електромагнітного випромінювання (світла) речовиною**.**

Зовнішній фотоефект – випускання електронів з поверхні речовини під дією електромагнітного випромінювання.

Закони зовнішнього фотоефекту.

- Фотострум насичення (кількість випромінюваних електронів) є прямо пропорційним світловому потоку при незмінному спектральному складі світла (закон Столєтова).

- Максимальна кінетична енергія фотоелектронів лінійно залежить від частоти світла, що падає на фотокатод, і не залежить від його інтенсивності (закон Ейнштейна).
- Для кожної речовини існує гранична частота ν_0 (довжина хвилі λ_0), яка має назву червоної границі фотоефекту. Це найменша частота (найбільша довжина хвилі) при якій спостерігається фотоефект.

Формула Ейнштейна для фотоефекту

$$h\nu = A + T_{max} = A + \frac{mv_{max}^2}{2}, \qquad (18.49)$$

де $h\nu = \frac{hc}{\lambda}$ – енергія фотона, що падає на поверхню металу; A – робота виходу електрона з металу; T_{max} – максимальна кінетична енергія фотоелектрона.

Червона межа фотоефекту

$$\nu_0 = \frac{A}{h}, \quad \text{або} \quad \lambda_0 = \frac{hc}{A}, \qquad (18.50)$$

де ν_0 – мінімальна частота світла, при якій ще можливий фотоефект; λ_0 – максимальна довжина хвилі, при якій ще можливий фотоефект; h – стала Планка; c – швидкість світла в вакуумі.

● **Ефект Комптона** – зміна довжини хвилі у бік більших значень при пружному розсіюванні короткохвильового електромагнітного випромінювання (рентгенівських або γ - квантів) на вільних або слабко зв'язаних електронах речовини.

Комптонівське зміщення дорівнює:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta), \qquad (18.51)$$

або

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2\lambda_c \sin^2\frac{\theta}{2}, \qquad (18.51a)$$

де λ, λ' – довжини падаючої та розсіяної хвиль випромінювання; λ_c – комптонівська довжина хвилі, θ –кут розсіяння.

Комптонівська довжина хвилі (стала)

$$\lambda_c = \frac{h}{m_e c} \qquad (\lambda_c = 2{,}436\,\text{пм}) \qquad (18.52)$$

де m_e – маса електрона, h – стала Планка, c – швидкість світла у вакуумі.

Закономірності комптонівського розсіювання.

- Величина комптонівського зміщення $\Delta\lambda$ не залежить від довжини хвилі падаючого випромінювання та від природи речовини, на якій відбувається розсіювання, та визначається тільки кутом розсіювання.
- Інтенсивність незміщеної компоненти збільшується зі збільшенням порядкового номеру речовини, на якій відбувається розсіювання.

- Інтенсивність зміщеної компоненти збільшується зі збільшенням кута розсіювання. Відповідно зменшується інтенсивність незміщеної компоненти.

При комптонівському розсіянні енергія та імпульс електрону описуються формулами релятивістської динаміки.

Релятивістський імпульс частинки $\vec{p} = \dfrac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, (16.75)

де m – масса частинки; $\vec{v}$ – її швидкість; c – швидкість світла в вакуумі.

Енергія релятивістської частинки:

а) власна енергія (енергія спокою) $E_0 = mc^2$; (16.76)

б) повна енергія релятивістської частинки: $E = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$; (16.78)

в) кінетична енергія T $T = E - E_0 = mc^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right)$. (16.77)

Зв'язок між енергією та імпульсом релятивістської частинки:

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4; \qquad E = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}; \qquad (16.79)$$

$$p^2c^2 = T\left(T + 2mc^2\right). \qquad (16.80)$$

Методичні вказівки.

1. Основою розрахунків освітленості є закон освітленості (18.4), який є справедливим тільки для точкових джерел світла, оскільки тільки до таких джерел застосовується поняття сили світла. Освітленість, яка створюється системою точкових джерел розраховується за принципом суперпозиції, тобто шляхом додавання освітленості від кожного джерела.

Постійність світлового потоку при заломленні і відбиванні світла можна використовувати для визначення освітленості у випадках, коли на поверхню падають промені не безпосередньо від точкового джерела, а після заломлення у лінзі. За освітленістю E лінзи (дзеркала) та її площиною S і площиною S' світлової плями на екрані можна визначити освітленість екрану за співвідношенням

$$\Phi = ES = E'S'.$$

2. Протяжні джерела світла характеризує яскравість B, означення якої надає формула (18.7). Для обчислення освітленості, яка створюється протяжним джерелом, необхідно:

- розбити його поверхню на елементарні ділянки dS;

- обчислити силу світла dI кожної ділянки за формулою $dI = BdS_n = B\cos\theta dS$, де θ – кут між нормаллю до елементу поверхні та даним напрямом;
- розрахувати за формулою (18.4) освітленість dE, створену елементом dS;
- інтегрувати отриманий вираз вздовж усієї поверхні джерела.

У випадку, коли всі елементи джерела мають однакову яскравість, розрахунок суттєво спрощується.

Якщо розміри джерела не дуже великі, його можна вважати точковим і застосувати до нього закон освітленості від точкового джерела, де сила світла розраховується за формулою

$$I = B\int dS_n = BS_n .$$

3. При розв'язуванні задач, в яких необхідно визначити хід світлових променів при наявності однієї або кількох заломлюючих площин (наприклад, призмах), перш за все необхідно зробити схематичний рисунок, ураховуючи, яке з середовищ вздовж ходу променя має меншу оптичну густину. Задачу розв'язують за допомогою закону заломлення, застосовуючи його по черзі до кожного випадку переходу променя з одного середовища в друге. Далі складають додаткові рівняння, використовуючи геометричні співвідношення, які випливають з умови задачі, і розв'язують отриману систему рівнянь відносно шуканої величини.

Якщо, за умовою, промінь падає на границю розподілу середовищ з боку середовища з більшою оптичною густиною $(n_1 > n_2)$, то обчислення можне дати значення синусу кута заломлення, яке перевищує одиницю. Це означає, що спостерігається явище повного внутрішнього відбиття, тобто промінь, не заломлюючись на межі двох середовищ, повністю відбивається від неї.

4. При розв'язуванні задач на явище інтерференції у більшості випадків необхідно визначити фізичні величини, які характеризують інтерференційну картину, що виникла внаслідок накладання двох (або більшої кількості) монохроматичних когерентних хвиль. Незалежні джерела світла не є когерентними.

Отже, задачі на інтерференцію світла в залежності від способу отримання когерентних хвиль можна поділити на дві групи.

● До першої групи задач відносяться задачі, в яких інтерференційна картина виникає внаслідок накладання двох когерентних хвиль, отриманих шляхом ділення світлової хвилі, що випромінюється одним джерелом, за допомогою деякої оптичної системи (щілини Юнга, біпризми Френеля, дзеркала Ллойда і т. ін.). Цю оптичну систему при розв'язані задач, за звичаєм, замінюють іншою, еквівалентною, системою, вважаючи, що хвилі

випромінюються двома когерентними джерелами. Розрахунок інтерференційної картини виконується за допомогою формул (18.18)-(18.20) з попереднім визначенням положення уявних джерел, якщо воно є невідомим.

● В задачах другої групи розглядається інтерференція світла у тонких плоских або клиноподібних плівках (окремим випадком інтерференції в клиноподібній повітряній плівці є кільця Ньютона). Розв'язання цих задач можливо з використанням формули (18.21) – (18.22а), але при їх використанні слід мати на увазі наступне:

- формули (18.21), (18.22) для оптичної різниці ходу променів, відбитих від передньої та задньої поверхонь плівки, отримані у випадку, коли плівка з обох боків оточена однаковим середовищем. При цьому один з променів відбивається від середовища з меншою оптичною густиною, другий – від середовища з більшою оптичною густиною, що приводить до стрибкоподібної зміни фази коливання на протилежну (на π) і відповідної зміни оптичної різниці ходу променів Δ на $\pm\frac{\lambda}{2}$.

- якщо плівка з обох боків оточена різними середовищами, то вплив на різницю ходу залежить від співвідношення між значеннями показників заломлення середовищ n_1 і n_2 та плівки n:

а) $n > n_1$; $n > n_2$ - тільки промінь, відбитий від середовища з більшою оптичною густиною (плівки) втрачає $\lambda/2$;

б) $n < n_1$; $n < n_2$ - тільки промінь, відбитий від середовища з більшою оптичною густиною (другого середовища) втрачає $\lambda/2$;

в) $n_1 < n < n_2$ - обидва промені втрачають $\lambda/2$;

г) $n_1 > n > n_2$ - жодний з променів не втрачає $\lambda/2$.

Зрозуміло, що у випадках а) та б) формули (18.21), (18.22) залишаються справедливими. У випадку в) втрата кожним з відбитих променів півхвилі ніяк не вплине на їх різницю ходу. Тому у випадках в) та г) у формулах (18.21), (18.21а) $\lambda/2$ слід відкинути, і, відповідно, умови максимуму і мінімуму при інтерференції будуть визначатися формулами (18.22а).

● Проведений аналіз стосується також кілець Ньютона, формули (18.23) – (18.25) для яких виведені у припущені, що скляна пластинка та притиснута до неї лінза, зазор між якими виграє роль тонкої плівки, мають однаковий показник заломлення. Якщо показники заломлення лінзи та пластинки є різними, а повітряний зазор заповнений деяким середовищем з показником заломлення n, то у випадках а) і б) формули (18.23) – (18.25) залишаються справедливими; у випадках в) та г) у

формулах (18.23), (18.24) слід відкинути $\lambda/2$. В останньому випадку темні та світлі кільця міняються місцями, розрахунок інтерференційної картини можна проводити за формулами (18.24а).

5. Дифракційні задачі є задачами про розподіл інтенсивності світла на екрані в залежності від форми та розмірів неоднорідності, що спричинила дифракцію. У загальному випадку такі задачі є досить складними.

У курсі загальної фізики розглядаються лише задачі, розв'язання яких спрощується внаслідок симетрії, наприклад, дифракція від круглого отвору або диску, від узької щілини, від дифракційної ґратки. В останніх двох випадках розглядають дифракцію у паралельних променях при їх нормальному падінні на вузьку щілину або плоску прозору дифракційну ґратку. Основні рівняння при розв'язанні таких задач складають на основі умов максимуму та мінімуму на відповідних об'єктах (див. формули (18.26), (18.27) та (18.29) і (18.27а). Якщо дифракційна картина проецирується на екран, який знаходиться на відносно великій відстані від щілини або дифракційній ґратки, то синуси кутів з достатньою степеню точності можна замінити їх тангенсами. Оскільки на лінзу падають паралельні промені, то дифракційна картина спостерігається на екрані, який розміщують у фокальній площині лінзи.

6. Задачі, в яких розглядається поляризація світла можна поділити на три групи.

● Задачі, в яких розглядається поляризація світла при відбитті та заломлені на границі двох діелектриків, розв'язуються за допомогою формул Френеля, окремим випадком яких є закон Брюстера (18.34). При використанні закону слід звернути увагу на те, що в формулі, яка виражає закон Брюстера , n – відносний показник заломлення середовищ, на межі яких відбувається відбиття світла.

● Задачі з використанням закону Малюса (18.35) – (18.36).

Головною площиною поляризатора називають площину, в якій відбуваються коливання світлового вектора у плоскополяризованому промені, який виходить із приладу. Аналогічним способом надається означення головної площини аналізатора, котрий є таким самим приладом, що поляризатор, але використовується для аналізу поляризації світла. Отже, при розв'язанні задач з використанням закону Малюса, слід пам'ятати, що кут α між головними площинами поляризатора та аналізатора в законі Малюса є одночасно кутом між площинами, в яких коливаються світлові вектори двох плоскополяризованих променів: того, що падає на аналізатор, та такого, який виходить з нього.

● При розв'язуванні задач, зв'язаних з впливом штучної анізотропії на проходження світла крізь систему «поляризатор – аналізатор»

використовується формула, яка надає зв'язок між оптичною різницею ходу та різницею фаз звичайного та незвичайного променів: $\delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta}{\lambda}$.

Мірою оптичної різниці ходу є різниця показників заломлення звичайного та незвичайного променів $(n_o - n_e)$ (див. таблицю 18.1). Отже,

$$\Delta = (n_o - n_e)l,$$

де l – товщина шару речовини, у якій створена штучна анізотропія.

Наприклад, різниця фаз звичайного і незвичайного променів, на виході з комірки Керра, дорівнює

$$\delta\varphi = \frac{2\pi(n_o - n_e)l}{\lambda_0} = 2\pi lBE^2,$$

де l – довжина кювети з рідиною, B – стала Керра, E – напруженість зовнішнього електричного поля прикладеного до комірки.

7. У фізичній літературі у відношенні величин, які характеризують **теплове випромінювання** не існує єдиної термінології. Випромінювальну здатність тіла $R(T)$ інакше називають енергетичною світністю, а спектральну випромінювальну здатність $r_{\lambda T}$ – спектральною щільністю енергетичної світності тіла. Слід розуміти, що мова йде про ті самі величини.

● Закони Стефана - Больцмана та Віна (формули (18.41), (18.42), (18.43)) справедливі лише для абсолютно чорних тіл. Для нечорних тіл випромінювальну здатність обчислюють за формулою (18.41а)

$$R = a'_T \sigma T^4,$$

де a'_T - коефіцієнт випромінювання, що показує, яку долю складає випромінювальна здатність даного тіла R від випромінювальної здатності абсолютно чорного тіла R_e, взятого при тій самій температурі. Він залежить від природи та температури тіла.

Іноді, посилаючись на закон Кірхгофа для теплового випромінювання, цей коефіцієнт замінюють спектральною поглинальною здатністю тіла $a_{\lambda T}$, яка визначає долю поглинутої енергії відносно енергії, що падає на поверхню тіла за той самий проміжок часу в тому самому інтервалі довжин хвиль (частот). При цьому не указують, про яке саме тіло йде мова. Необхідно пам'ятати, що така заміна є правомірною тільки у випадку сірих тіл, для яких спектральна поглинальна здатність $a_{\lambda T}$ є однаковою для всіх довжин хвиль і, дійсно, $a_{\lambda T} = a_T$.

8. Задачі квантової оптики – задачі про взаємодію фотонів з окремими електронами (фотоефект, ефект Комптона) або з речовиною (тиск світла). При цій взаємодії виконуються закони збереження енергії та імпульсу. Закон збереження імпульсу, застосований до взаємодії фотонів з

речовиною, приводить до формули (18.47) для тиску світла; закон збереження енергії, застосований для взаємодії фотона з електроном у металі, є рівнянням Ейнштейна для фотоефекту (18.49); сумісне застосування обох законів збереження для опису взаємодії рентгенівських фотонів або γ-квантів з вільним або слабо зв'язаним з атомом електроном приводить до формули Комптона (18.51).

● При обчисленні швидкості електрона його можна вважати класичною частинкою, якщо кінетична енергія електрона T набагато менша за енергію спокою електрона $E_0 = mc^2 = 0{,}511\text{Мев}$. Якщо нерівність $T << W_0$ не виконується, електрон необхідно вважати релятивістською частинкою і застосовувати до нього формули (16.75) – (16.80).

● Розрахунок тиску світла за формулою (18.47) дає вірний результат лише у випадку нормального падіння світла на поверхню тіла, для якого й була отримана формула). Замість енергетичної освітленості поверхні E_e часто застосовують інтенсивність світла I (густину потоку випромінювання). У випадку нормального падіння ці величини, дійсно співпадають, але така заміна є неправомірною при похилому падінні променів на поверхню.

Приклади розв'язання задач

Приклад 18.1. Півсфера радіусу R=2м освітлюється двома однаковими лампами, які підвішені на висоті 2R над поверхнею землі симетрично відносно півсфери. Відстані між лампами також дорівнює 2R. Визначити освітленість півсфери в точках, які знаходяться на мінімальній відстані від одного з джерел, якщо повний світловий потік кожної лампи дорівнює Ф=1200 лм.

R=2м h= 2R Ф=1200 лм	Розв'язання. Точка B (рис. 18.5), яка має мінімальну відстань від одного з джерел S_1, знаходиться на лінії S_1O, що з'єднує джерело з центром півсфери. Промені від цього джерела падають на поверхню сфери перпендикулярно.
E-?	За формулою (18.4) освітленість в точці B дорівнює

$$E = \frac{I}{r_1^2} + \frac{I}{r_2^2}\cos\alpha,$$

де I – сила світла джерел; r_1 і r_2 – відстані джерел від точки B; α – кут падіння променів від джерела S_2.

З урахуванням формули $I = \frac{\Phi}{4\pi}$, що надає зв'язок між силою світла та світловим потоком Ф у випадку ізотропного джерела, яким можна вважати лампу,

$$E = \frac{\Phi}{4\pi}\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}\cos\alpha\right). \qquad (1)$$

Перевіряємо одиницю вимірювання

$$[E] = \frac{[\Phi]}{[r^2]} = \frac{лм}{м^2} = лк.$$

Визначаємо r_1, r_2 та $\cos\alpha$.

З прямокутного трикутника ΔS_1OA за теоремою Піфагора $(S_1O)^2 = (2R)^2 + R^2 = 5R^2$;

$r_1 = S_1O - R = R\sqrt{5} - R = 1{,}24R$;

$$\cos\beta = \frac{S_1A}{S_1O} = \frac{R}{R\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

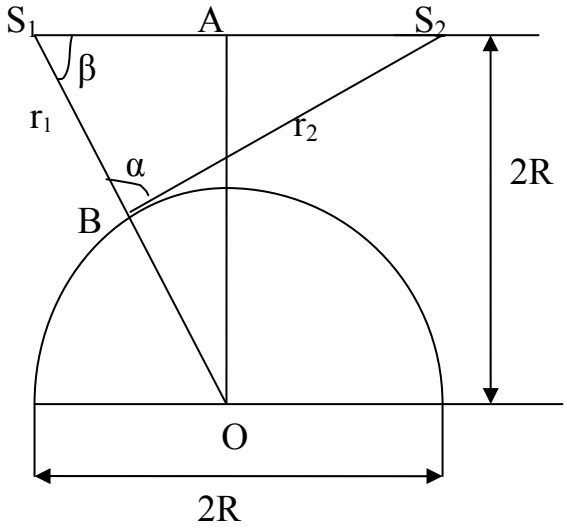


Рис. 18.5

З ΔS_1BS_2 за теоремою косинусів $r_2^2 = r_1^2 + 4R^2 - 4r_1R\cos\beta = 3{,}32R^2$.

$$S_1S_2{}^2 = 4R^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\alpha,$$

звідки
$$\cos\alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - 4R^2}{2r_1r_2} = 0{,}188.$$

Підставляємо значення в формулу (1) і отримуємо освітленість E

$$E = \frac{\Phi}{4\cdot 3{,}14}\left(\frac{1}{1{,}54\cdot R^2} + \frac{0{,}188}{3{,}32\cdot R^2}\right) = 0{,}056\frac{\Phi}{R^2} = 0{,}056\cdot\frac{1200}{4} = 16{,}8\,лк.$$

Відповідь: E = 16,8 лк.

Приклад 18.2. Промінь світла падає на плоско паралельну пластинку з скла, показник заломлення якого n=1,73, під кутом $i=30^0$. Визначити товщину пластинки h, якщо зміщення променя при виході з пластинки становить d=20 мм.

Розв'язання.

n=1,73 $i=30^0$ d=20 мм	Хід променя показаний на рис.18.6. Виразимо h =AD з прямокутного трикутника ADC:
h-?	

$h = AC\cdot\cos r$;

де r – кут заломлення променя світла. За законом заломлення світла (18.9) $\frac{\sin i}{\sin r} = n$.

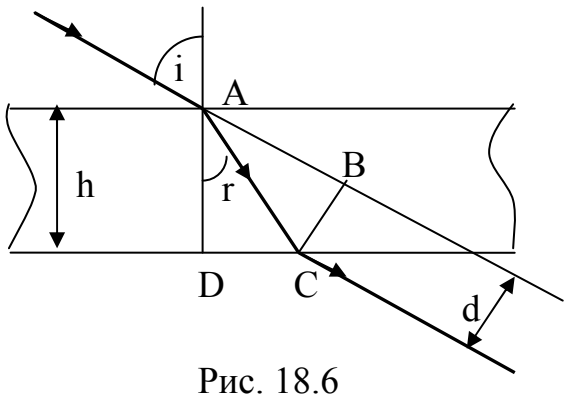


Рис. 18.6

Звідки $\sin r = \frac{\sin i}{n} = \frac{\sin 60^0}{1,73} = 0,5$;

$r = \arcsin 0,5 = 30^0$. Відстань AC знаходимо з ΔABC: $AC = \frac{d}{\sin(i-r)}$. Тоді

$h = \frac{d\cos r}{\sin(i-r)}$.

$h = \frac{2 \cdot 10^{-2} \cdot \cos 30^0}{\sin(60^0 - 30^0)} = 3,46 \cdot 10^{-2}$ м .

Відповідь: $h = 3,46 \cdot 10^{-2}$ м .

Приклад 18.3. Визначити радіус кривизни R вгнутого сферичного дзеркала, якщо зображення предмета, який знаходиться перед ним на відстані $a_1 = -20$ см, збільшене у 5 разів і пряме (k=5).

$a_1 = -20$ см k=5	Розв'язання. Пряме зображення, отримане за допомогою дзеркала, є уявним. Відповідний хід променів зображений на рис. 18.7.
R-?	

За формулою сферичного дзеркала

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{2}{R}, \qquad (1)$$

де, відповідно правилу вибору знаків, a_1 – від'ємне, a_2 – додатне.

Лінійне збільшення у дзеркалі з урахуванням знаків a_1 і a_2 дорівнює

$k = \frac{a_2}{|a_1|} = -\frac{a_2}{a_1} > 0$, звідки $a_2 = -ka_1$. (2)

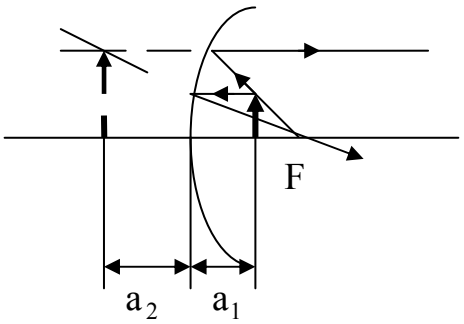


Рис. 18.7

З формул (1) і (2) отримуємо $\frac{1}{a_1} - \frac{1}{ka_1} = \frac{2}{R}$.

$$R = \frac{2ka_1}{k-1}. \qquad R = \frac{-2 \cdot 5 \cdot 0,2\text{м}}{5-1} = -0,5\,\text{м}.$$

Відповідь: $R = -0,5$ м.

Примітка. У випадку отримання дійсного оберненого зображення з таким самим за величиною збільшенням k= –5, $a_2<0$, тобто $a_2 = ka_1$ і за формулою (3) $R = \frac{2 \cdot (-5) \cdot (-0,2)\text{ì}}{(-5)-1} = -0,33$ м.

Приклад 18.4. Відстань між двома когерентними джерелами монохроматичного світла S_1 і S_2 у повітрі d=0,15мм. Визначити положення максимумів першого та другого порядку на екрані, відстань від джерел до якого дорівнює L = 3,0м. Довжина хвилі λ = 0,6мкм.

$d = 1,5 \cdot 10^{-4}$ м L = 3,0м $\lambda = 6,0 \cdot 10^{-7}$ м m_1=1 m_2=2	Розв'язання
x_{max1}; x_{max2}-?	

Для визначення координат максимумів або мінімумів необхідно знайти різницю ходу Δ хвиль, які випромінюються джерелами. Оскільки промені йдуть у повітрі ($n_{пов.}$=1), оптична різниця ходу дорівнює геометричній. Опустимо на екран перпендикуляри S_1A, S_2B, а також з'єднаємо точки S_1 і S_2 з точкою C екрана, яка знаходиться від центру екрана на відстані OC=x (рис.18.8). З трикутників S_1AC та S_2BC за теоремою Піфагора отримуємо:

$$L_1^2 = S_1C^2 = L^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2; \qquad L_2^2 = S_2C^2 = L^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2.$$

Різниця останніх виразів дає:

$$L_1^2 - L_2^2 = (L_1 - L_2)(L_1 + L_2) = L^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 - \left(L^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2\right) = 2xd. \qquad (1)$$

Оскільки $n(L_1 - L_2) = \Delta$ є оптичною різницею ходу променів, а суму $L_1 + L_2$ наближено можна замінити на 2l, бо d та x при спостереженні інтерференції світла є завжди малими порівняно l, з виразу (1) отримуємо: $\Delta = \frac{xd}{L} n$. (2)

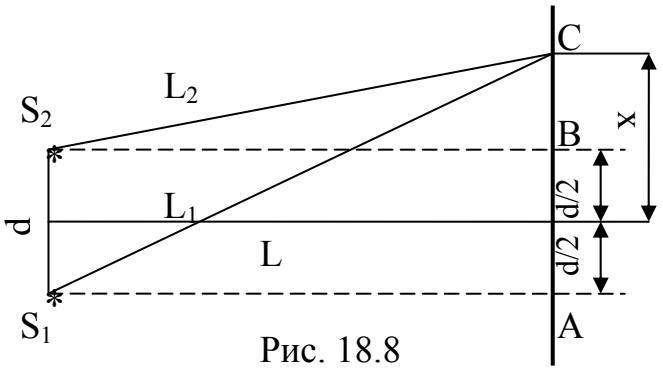


Рис. 18.8

За умовою (18.18) координати максимумів повинні задовольняти умові:

$$\frac{x_{max} d}{l} n = \pm m\lambda_0, \quad (m=0, 1, 2, 3, ,...).$$

Звідки $x_{max} = \pm m \frac{l}{d} \frac{\lambda_0}{n}$, (m=0, 1, 2, 3, ,...).

Розрахунок дає $x_{max1} = \pm 1 \cdot \frac{3 \cdot 6,0 \cdot 10^{-7}}{1,5 \cdot 10^{-4} \cdot 1} = 1,2 \cdot 10^{-2}$ (м); $x_{max2} = \pm 2,4 \cdot 10^{-2}$ м.

Відповідь: x_{max1}=1,2см; x_{max2}=2,4см.

Приклад 18.5. У інтерферометрі, схема якого дана на рис. 18.9, трубки 1 та 2 заповнені повітрям. Коли повітря в трубці 2 замінили аміаком, інтерференційна картина, яка спостерігалась на екрані Е, змістилася уверх на 17 полос. Довжина хвилі світла, яке освітлює вузьку щілину S, дорівнює λ=0,589мкм. Довжина трубок 1 та 2 l=10см. Показник заломлення повітря $n = 1,00029$. Визначити показник заломлення аміаку.

$\lambda = 5,89 \cdot 10^{-7}$ м
$l = 0,1$м
$n = 1,00029$
$\Delta m = 17$
n_1 - ?

Розв'язання

Інтерференційна картина, що спостерігається на екрані у випадку, коли трубки 1 та 2 заповнені повітрям, аналогічна картині, яка отримується при інтерференції світла від двох щілин (рис. 18.9).

Якщо повітря в трубці 2 замінити аміаком, то оптична різниця ходу Δ променів 1 та 2 зміниться на величину $(n_1 l - nl)$ і інтерференційна картина на екрані зміститься. Її зміщенню на одну полосу відповідає зміна числа m (порядку максимуму або мінімуму) на одиницю, а різниці ходу Δ – на λ. Відповідно, при зміщенні картини на Δm полос, Δ змінюється на $\Delta m \cdot \lambda$, тобто $(n_1 l - nl) = \Delta m \lambda$.

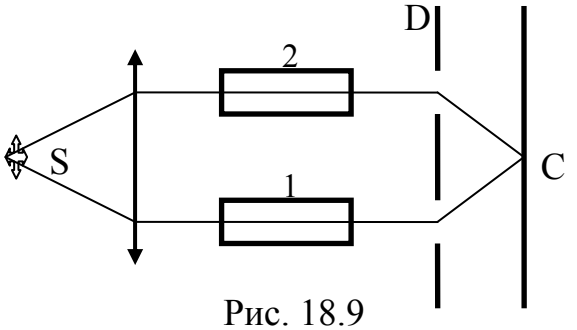


Рис. 18.9

Звідки $n_1 = n + \dfrac{\Delta m \lambda}{l}$.

$$n_1 = 1,00029 + \frac{17 \cdot 5,89 \cdot 10^{-7}}{0,1} = 1,00039.$$

Приклад 18.6. На плівку товщиною d=367нм падає під кутом *i* паралельний пучок білого світла. Показник заломлення плівки n=1,40 (дисперсією, тобто зміною n в залежності від λ знехтувати). Який колір буде мати плівка у відбитому світлі, якщо *i* дорівнює: а) 30°; б) 60°?

$d = 3,67 \cdot 10^{-7}$ м
n=1,40
$i_1 = 30°$
$i_2 = 60°$
$\lambda_{max1}; \lambda_{max2}$ – ?

Розв'язання.

Розглянемо оптичну різницю ходу когерентних хвиль 1 і 2, відбитих від нижньої та верхньої поверхонь плівки, за рахунок накладання яких виникає інтерференційна картина (рис. 18.10).

Оптична довжина шляху першої хвилі дорівнює

$$L_1 = n(AB + BC) = 2\frac{dn}{\cos r}, \quad (1)$$

другої хвилі –

$$L_2 = \left(DC \pm \frac{\lambda_0}{2} \right) = 2d\,\mathrm{tg}\,r \sin i \pm \frac{\lambda_0}{2} \quad (2),$$

де доданок $\frac{\lambda_0}{2}$ ураховує зміну фази коливання на протилежну при відбитті другої хвилі від плівки, яка є середовищем з більшою оптичною густиною.

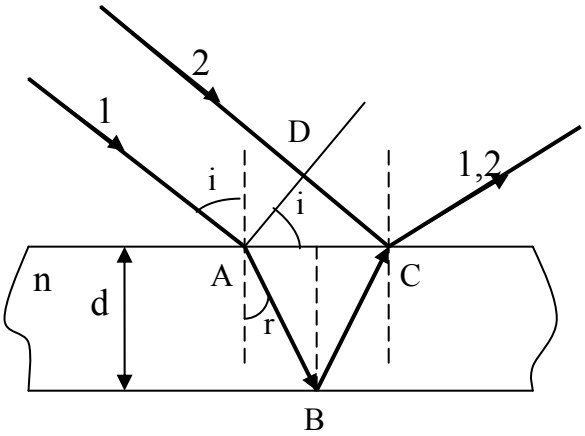


Рис. 18.10

Ураховуючи, що $n = \frac{\sin i}{\sin r}$, а також вирази (1) і (2) для оптичної різниці ходу отримуємо:

$$\Delta = L_1 - L_2 = \frac{2d}{\cos r}\left(n - \sin r \sin i\right) \mp \frac{\lambda_0}{2} = \frac{2dn}{\cos r}\left(1 - \sin^2 r\right) \mp \frac{\lambda_0}{2} = 2dn\cos r \mp \frac{\lambda_0}{2},$$

або

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} \mp \frac{\lambda_0}{2}.$$

Тоді умова інтерференційного максимуму у відбитому від плівки світлі має вигляд: $2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} \mp \frac{\lambda_0}{2} = \pm m\lambda_0$,

або $\quad 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} = \left(2m+1\right)\frac{\lambda_0}{2}, \quad$ (m=0,1,2,3,…).

З останнього співвідношення знаходимо вираз для довжин хвиль, для яких виконується умова максимуму, тобто визначаємо колір плівки при спостереженні інтерференції у відбитому світлі:

$$\lambda_{max} = \frac{4d\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}{2m+1}.$$

$$\lambda_{max1} = \frac{4 \cdot 3{,}67 \cdot 10^{-7}\sqrt{1{,}40^2 - 0{,}5^2}}{2m+1} = \frac{19{,}20 \cdot 10^{-7}}{2m+1}.$$

Обираємо значення порядку максимуму m, яке відповідає діапазону довжин хвиль видимого світла: m=1 і проводимо обчислення.

$$\lambda_{max1} = \frac{19{,}20 \cdot 10^{-7}\,\text{ì}}{3} = 6{,}4 \cdot 10^{-7}\,\text{ì}\ ;$$

$$\lambda_{max2} = \frac{4 \cdot 3{,}67 \cdot 10^{-7}\sqrt{1{,}40^2 - 0{,}866^2}}{3}\,\text{ì} = \frac{16{,}15 \cdot 10^{-7}\,\text{ì}}{3} = 5{,}38 \cdot 10^{-7}\,\text{ì}\ .$$

Відповідь: 1) $\lambda_{max1} = 6{,}4 \cdot 10^{-7}$ м – червоне світло;

2) $\lambda_{max2} = 5{,}38 \cdot 10^{-7}$ м – зелене світло.

Приклад 18.7 Для зменшення втрат світла при відбитті від скла на поверхню об'єктива (n_2=1,7) нанесена тонка прозора плівка (n_1=1,3). При якій найменшій товщині плівки станеться максимальне ослаблення відбитого світла, довжина хвилі якого приходиться на середню частину видимого спектру (λ=560нм)? Промені падають нормально до поверхні об'єктива.

$n_1 = 1,3$
$n_2 = 1,7$
$\lambda = 5,6 \cdot 10^{-7}$ м

$d_{min} - ?$

Розв'язання.

В даному випадку потрібно розглядати інтерференцію променів, відбитих від верхньої та нижньої поверхонь тонкої плівки, тобто від поверхні плівки та поверхні скла.

Оскільки обидва промені відбиваються від середовища з більшою оптичною густиною ($n_1 > n_{повіт.}$ та $n_2 > n_1$) і, таким чином, обидва втрачають $\frac{\lambda}{2}$, то їх оптична різниця ходу у випадку нормального падіння дорівнює $\Delta = 2dn_1$. Інтерференційний мінімум світла спостерігається при виконанні умови $\Delta = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$. Тобто $2dn_1 = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$, (m=0,1,2,3,…). Звідки $d = \frac{(2m+1)\lambda}{4 \cdot n_1}$. Мінімальній товщині плівки відповідає значення $m = 0$. Тоді $d_{min} = \frac{\lambda}{4n_1}$.

$$d_{min} = \frac{5,6 \cdot 10^{-7}\text{м}}{4 \cdot 1,3} \approx 1,08 \cdot 10^{-7}\text{м} = 0,108\text{мкм}$$

Приклад 18.8. Між двома плоско паралельними прозорими пластинками поклали дуже тонкий дріт. Дріт паралельний лінії дотику пластинок і знаходиться на відстані a=20см від неї. При спостереженні у відбитому світлі (λ_0=750нм) на верхній пластинці спостерігаються інтерференційні смуги. Промені світла падають перпендикулярно до поверхні пластинок. Визначити діаметр D перерізу дроту, якщо на відстані L=1см спостерігається $\Delta m = 10$ світлих смуг.

a=0,20м
$\lambda_0 = 7,50 \cdot 10^{-7}$ м
L=0,01м
$\Delta m = 10$

D-?

Розв'язання.

Між пластинками завдяки дроту утворюється повітряний клин (рис.18.11). Тоді діаметр дроту $D = a \cdot tg\alpha$ (1), де α – кут при основі клину. Визначимо α.

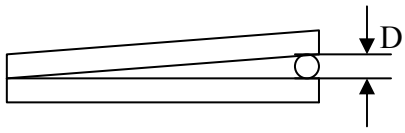


Рис. 18.11

Інтерференційні смуги спостерігаються при малих кутах клина, тому відбиті від верхньої та

нижньої поверхонь клина промені 1 і 2 практично паралельні. Різниця ходу цих променів може бути обчислена за формулою (18.21а):

$$\Delta = 2d_m n \cos\ r \pm \frac{\lambda_0}{2}.$$

За умовою інтерференційних максимумів $2d_m n \cos\ r + \frac{\lambda_0}{2} = m\lambda_0$, (2)

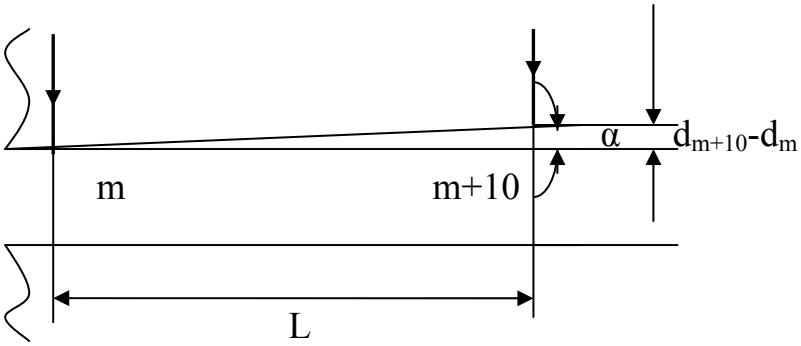


Рис. 18.11а

де d_m – товщина клину в місці, де спостерігається світла смуга з номером m; n – показник заломлення клину (для повітря n=1); r – кут заломлення, який за умовою дорівнює нулю, відповідно $\cos r = 1$; $\frac{\lambda_0}{2}$ – додаткова різниця ходи, яка виникає при відбитті другого променя від поверхні нижньої пластинки (середовища з більшим показником заломлення).

Смузі з номером m відповідає товщина повітряного клина d_m, а смузі з номером m+10 – товщина d_{m+10}. За умовою десять смуг містяться на відстані L. Тоді шуканий кут α (див. рис. 18.11а) дорівнює

$$\alpha = \frac{d_{m+10} - d_m}{L}, \quad (3)$$

де внаслідок малої величини кута клину $\sin\alpha \approx tg\alpha \approx \alpha$.

Знаходимо d_m і d_{m+10} з формули (2) і підставляємо їх до формули (3). Отримуємо

$$\alpha = \frac{\frac{m+10}{2n}\lambda_0 - \frac{m}{2n}\lambda_0}{L} = \frac{5\lambda_0}{L} \quad (4)$$

і за формулою (1) $D = \frac{5\lambda_0}{L}a$. $D = \frac{5 \cdot 7{,}5 \cdot 10^{-7}}{0{,}01} \cdot 0{,}2$ м=$7{,}5 \cdot 10^{-5}$м.

Відповідь: D=$7{,}5 \cdot 10^{-5}$м.

Примітка. Значення кута α за формулою (4) визначається у радіанах.

Правило переводу з радіан у градуси має вид $\alpha_{град} = \frac{180}{\pi}\alpha_{рад}$.

Приклад 18.9. На пристрої для спостереження кілець Ньютона у відбитому світлі був виміряний радіус третього темного кільця $(m = 3)$. Коли простір між плоско паралельною пластинкою та лінзою заповнили

рідиною, той самий радіус стало мати кільце з номером, більшим на одиницю. Визначити показник заломлення n рідини.

$n = 1$
$n' = n$
$m = 3$
$m' = m + 1$
$r_m = r_{m'}$
n - ?

Розв'язання.

Розглянемо механізм утворення кілець Ньютона у відбитому світлі (рис.18.12). Промінь, який приходить у точку B, частково відбивається, а частково проходить у повітряний (або заповнений рідиною) клин (практично вертикально внаслідок малої кривизни лінзи), відбиваючись в точці C від пластини. Промені, відбиті у точках B і C є когерентними і при накладанні дають інтерференційну картину. Оскільки в точці C промінь відбивається від середовища з більшою оптичною густиною, він втрачає півхвилю, і оптична різниця ходу двох променів дорівнює

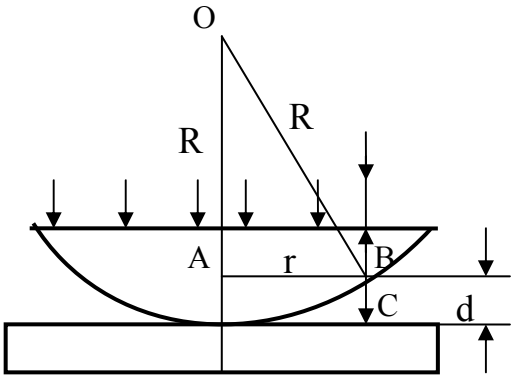


Рис. 18.12

$$\Delta = 2dn + \frac{\lambda}{2}, \qquad (1)$$

де d – товщина зазору, n –показник заломлення речовини, яка заповнює простір між лінзою та пластиною.

Значення d виражаємо з прямокутного трикутника OAB через радіус кривизни лінзи R та відстань r від осі оптичної системи до точки спостереження інтерференційної картини:

$$r^2 = R^2 - (R - d)^2 = (2R - d)d = 2Rd,$$

де d – дуже мала величина. Тоді $d = \frac{r^2}{2R}$, (2) і вираз (1) приймає вигляд:

$$\Delta = n\frac{r^2}{R} + \frac{\lambda_0}{2}. \qquad (3)$$

При освітленні лінзи монохроматичним світлом у відбитому та прохідному світлі буде спостерігатися чергування темних та світлих кілець. У центрі картини у відбитому світлі буде темне коло, у прохідному – світле.

Радіуси темних кілець знайдемо з умови (18.19) мінімуму інтенсивності для різниці ходу: $\Delta = (2m+1)\frac{\lambda_0}{2}$,

або, з урахуванням виразу (3): $n\frac{r^2}{R} + \frac{\lambda_0}{2} = m\lambda + \frac{\lambda_0}{2}$. Звідки радіус m-го темного кільця дорівнює:

$$r_m = \sqrt{m\frac{\lambda_0}{n}R} \qquad (m=1,2,\ldots).$$

Відповідно радіуси світлих кілець

$$r_{m,\text{ñâ.}} = \sqrt{(2m-1)\frac{\lambda_0}{2n}R} \qquad (m=1,2,\ldots).$$

За умовою задачі $r_m = \sqrt{m\lambda_0 R}$ та $r_{m'} = r_{m+1} = \sqrt{(m+1)\frac{\lambda_0}{n}}$.

Оскільки $r_m = r_{m'}$, то

$$\sqrt{m\lambda_0 R} = \sqrt{(m+1)\frac{\lambda_0}{n}R}.$$

З останньої формули виражаємо показник заломлення рідини n:

$$n = \frac{m+1}{m} = \frac{4}{3} = 1{,}33.$$

Відповідь: $n=1{,}33$.

Приклад 18.10. На діафрагму с круглим отвором, радіус якого $r=2$мм, нормально падає світло з довжиною хвилі $\lambda=500$нм. На екрані, що знаходиться за діафрагмою на відстані b=0,6ì від неї, спостерігають дифракційну картину. Скільки зон Френеля укладається в отворі діафрагми? Світлим або темним буде центр дифракційної картини?

$r = 2\cdot 10^{-3}$ м
$\lambda = 5{,}0\cdot 10^{-7}$ м
b=0,6ì

$m_{max} - ?$

Розв'язання.

Згадаємо принцип побудови зон Френеля (рис.18.13). Проведемо із точки C дугу AEB радіусу AC. Рішення задачі зводиться до відповіді на питання про те, скільки разів $\frac{\lambda}{2}$ укладається у відрізку OE, тобто кількість зон Френеля m дорівнює:

$m = \frac{OE}{\lambda/2}$. Тобто $OE = m\frac{\lambda}{2}$. (1)

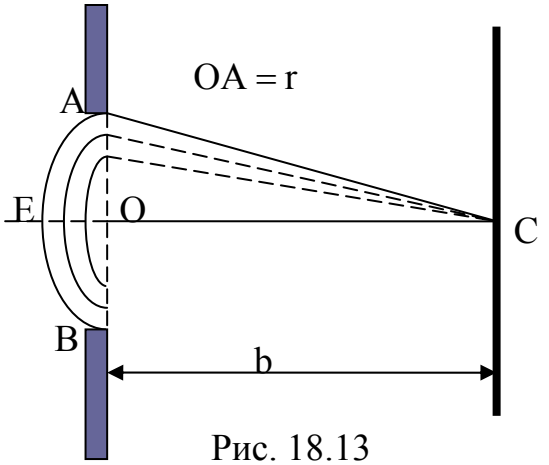


Рис. 18.13

Для визначення m скористаємося теоремою Піфагора.

З трикутника AOC отримуємо: $AC^2 = AO^2 + CO^2$,

де $AC = CE = CO + OE = b + m\frac{\lambda}{2}$; $AO = r$; $CO = b$.

Отже, $\left(b+m\frac{\lambda}{2}\right)^2=r^2+b^2$. Звідки, $mb\lambda+\left(m\frac{\lambda}{2}\right)^2=r^2$. Оскільки доданком $\left(m\frac{\lambda}{2}\right)^2$ можна знехтувати порівняно з іншими членами, остаточно отримуємо: $m=\frac{r^2}{b\lambda}$. $m=\frac{4\cdot10^{-6}}{1,6\cdot5\cdot10^{-7}}=5$.

Відповідь: Кількість зон Френеля, яка укладається у отворі діафрагми при розбитті відкритої частини фронту хвилі з заданої точки, дорівнює п'яти. m=5 – непарне, тому центр дифракційної картини буде світлим.

Приклад 18.11. Дифракційну ґратку розміщено на відстані $l=0,3$ м від екрану, на якому спостерігають дифракційну картину. Відстань між максимумами нульового та четвертого порядків на екрані дорівнює $\Delta x=0,066$м. Ґратка має 100 штрихів на 1мм. Чому дорівнює довжина хвилі λ досліджуваного джерела? Максимум якого найбільшого порядку може спостерігатися за допомогою цієї ґратки? Укажіть загальну кількість максимумів.

Розв'язання.

l=0,3 м $\Delta x=0,066$м n = 100мм$^{-1}$ m = 4	З умови дифракційного максимуму (18.29), яка має вигляд: $d\cdot\sin\varphi=\pm m\lambda$, виражаємо довжину хвилі:
λ; m_{max}-?	$\lambda=\frac{d\cdot\sin\varphi}{m}$; $d=\frac{1}{n}$; $\sin\varphi\approx\Delta x/l$.

$$\lambda=\frac{\Delta x}{mnl}. \qquad \lambda=\frac{0,066}{4\cdot10^5\cdot0,3}=5,5\cdot10^{-7}\,(\text{м}).$$

Для визначення найбільшого порядку максимуму слід урахувати, що найбільше значення, яке може приймати $\sin\varphi$ дорівнює одиниці. Тоді (див. формулу (18.30))

$$m_{max}=E\left(\frac{d}{\lambda}\right)=E\left(\frac{1}{n\lambda}\right),$$

де функція $E\left(\frac{d}{\lambda}\right)$ дорівнює цілій частині числа $\left(\frac{d}{\lambda}\right)$ або $\left(\frac{1}{n\lambda}\right)$.

$$m_{max}=E\left(\frac{1}{10^5\cdot5,5\cdot10^{-7}}\right)=E(18,2)=18.$$

Усього на екрані з урахуванням нульового максимуму та симетрії дифракційної картини буде спостерігатися $2m_{max}+1=2\cdot18+1=37$ максимумів.

Відповідь: $\lambda=5,5\cdot10^{-7}$ ì ; m_{max}=18; загальна кількість максимумів – 37.

Приклад 18.12. Період дифракційної ґратки d = 2,5 мкм. Яку найменшою кількість штрихів повинна мати ґратка, щоб розділити компоненти дублету жовтої лінії натрію, довжини хвиль яких λ_1 = 589,0 нм і λ_2 = 589,6нм? Визначити найменшу довжину L робочої частини ґратки.

$d = 2{,}5 \cdot 10^{-6}$ м
$\lambda_1 = 5{,}890 \cdot 10^{-7}$ м
$\lambda_2 = 5{,}896 \cdot 10^{-7}$ м

N_{min}; L - ?

Розв'язання.

За формулою (18.32) роздільна здатність дифракційної ґратки R дорівнює $R = \frac{\lambda}{d\lambda} = mN$. (1)

Мінімальному значенню кількості штрихів N_{min} відповідає мінімальне значення R_{min} і максимальне значення порядку спектра m_{max}, який можна спостерігати за допомогою цієї ґратки, тобто $N_{min} = \frac{R}{m_{max}}$. (2)

Мінімальна роздільна здатність, яка є необхідною для розділення компонент дублету, за формулою (1) дорівнює

$$R_{min} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}. \qquad (3)$$

Число m_{max} виражаємо з умови максимуму для дифракційної ґратки (4.77), поклавши в ній sinφ =1 и $\lambda = \lambda_2$ (вибір у якості λ більшого з двох значень гарантує, що обидві компоненти дуплету з номером m_{max} будуть спостерігатися). Оскільки m – завжди ціле, за формулою (18.30), отримуємо

$$m_{max} = E\left(\frac{d}{\lambda}\right) = E\left(\frac{2{,}5 \cdot 10^{-6}}{5{,}896 \cdot 10^{-7}}\right) = E(4{,}24) = 4. \qquad (4)$$

Підставляємо (3) і (4) в формулу (2) і знаходимо N_{min}.

$$N_{min} = \frac{\lambda_1}{m_{max}(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{5{,}890 \cdot 10^{-7}}{4 \cdot 6 \cdot 10^{-10}} = 2{,}5 \cdot 10^2.$$

Мінімальна довжина L робочої частини ґратки дорівнює

$$L = d \cdot N_{min} = 2{,}5 \cdot 10^{-6}\text{м} \cdot 2{,}5 \cdot 10^2 = 6{,}25 \cdot 10^{-4}\text{м}.$$

Відповідь: $L = 6{,}25 \cdot 10^{-4}$м.

Приклад 18.13. Відомо, що при падінні на поверхню кристала кам'яної солі (відстань між атомними площинами $d = 0{,}28$нм) пучка паралельних рентгенівських променів під кутом ковзання $\theta = 22°$ спостерігається дифракційний максимум першого порядку. Якщо кристал кам'яної солі замінити іншим кристалом, то максимум першого порядку спостерігається при куті ковзання $\theta_1 = 19°$. Якою є міжплощинна відстань d_1 нового кристала?

Розв'язання.

$d = 2{,}8 \cdot 10^{-10}$ м $\theta = 22°$ $\theta_1 = 19°$ d_1-?	Формула Вульфа – Бреггів (18.33) для дифракції рентгенівських променів на кристалах

$$2d\sin\theta = \pm m\lambda, \qquad (1)$$

де θ – кут ковзання променів, що падають на кристал; d – відстань між атомними площинами кристалів.

При m=1 маємо систему рівнянь: $\begin{cases} 2d\sin\theta = \lambda; \\ 2d_1\sin\theta_1 = \lambda. \end{cases}$

Звідки $\dfrac{d_1\sin\theta_1}{d\sin\theta} = 1$; $d_1 = d\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta_1}$. $d_1 = 2{,}8 \cdot 10^{-10} \cdot \dfrac{\sin 22°}{\sin 19°} \approx 3{,}2 \cdot 10^{-10}$ (м).

Відповідь: $d_1 = 0{,}32$нм.

Приклад 18.14. При переході променя світла з речовини у повітря граничний кут повного внутрішнього відбиття рівним $42°$. Під яким кутом повинен падати промінь на поверхню речовини з повітря, щоб відбите світло було повністю поляризованим?

Розв'язання.

$i_{гр.} = 42°$ $i_{Б.} - ?$	Згідно закону Брюстера (18.34) кут падіння $i_Б$ (кут Брюстера), при якому відбите світло є повністю поляризованим, визначається за умовою

$$\mathrm{tg}\, i_Б = n_{21} = \frac{n_2}{n_1}, \qquad (1)$$

де n_{21} – відносний показник заломлення; n_1 – показник заломлення повітря, n_2 – показник заломлення середовища (рис.18.14а).

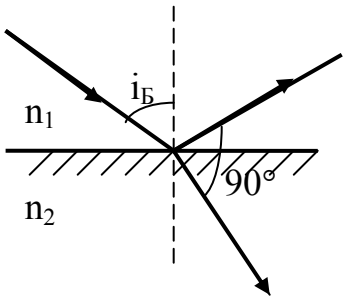


Рис. 18.14а

Для визначення відносного показника заломлення скористаємося тим, що в умові задачі заданий граничний кут повного внутрішнього відбиття при падінні світла із середовища на межу поділу «середовище – повітря» (рис.18.14б,), для якого виконується співвідношення:

$$(n_2 > n_1) \qquad \sin i_{гр.} = \frac{n_1}{n_2} \qquad (2)$$

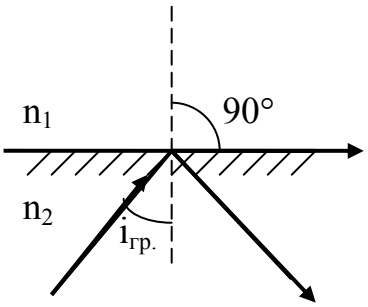


Рис18.146

З виразів (1) и (2) отримуємо $\mathrm{tg}\, i_Б = \dfrac{1}{\sin i_{гр.}}$.

$$i_Б = \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\sin i_Б}\right) = \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\sin 42°}\right) = \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{0{,}6691}\right) = 56°12'$$

Відповідь: $i_Б = 56°12'$.

Приклад 18.15. У скільки разів η послаблюється світло, яке проходить крізь дві призми Ніколя, площини яких утворюють кут $\alpha=45^0$, якщо в кожній з них втрачається k=10% падаючого на нього світлового потоку?

$\alpha = 45°$
k=10%

$\frac{I_{прир.}}{I} = ?$

Розв'язання.

Природне світло інтенсивності $I_{прир.}$ при попаданні на першу призму Ніколя (поляризатор) внаслідок явища подвійного заломлення поділяється на два промені – звичайний і незвичайний. Обидва промені мають однакову інтенсивність $\frac{1}{2}I_{прир.}$ і лінійно поляризовані, але в різних площинах. Звичайний промінь внаслідок повного внутрішнього відбиття на межі двох частин призми Ніколя відбивається на внутрішню поверхню призми і поглинається нею. Незвичайний промінь проходить крізь призму, а його інтенсивність зменшується за рахунок втрат енергії в призмі.

Таким чином, інтенсивність світла, яке пройшло через поляризатор

$$I_0 = \frac{1}{2}I_{прир.}(1-k), \qquad (1)$$

де k – відносна втрата інтенсивності природного світла, яке пройшло крізь поляризатор.

Далі поляризований промінь інтенсивності I_0 попадає на аналізатор (другу призму) і також поділяється на звичайний і незвичайний промені. Звичайний промінь повністю поглинається призмою, а інтенсивність незвичайного променя I визначається законом Малюса (18.35). Без урахування втрат енергії в другій призмі

$$I = I_0\cos^2\alpha, \qquad (2)$$

де α – кут між площинами поляризатора і аналізатора, тобто площинами, в яких прибори пропускають коливання світлового вектора.

З виразів (1) і (2), з урахуванням втрат інтенсивності в другій призмі, отримуємо

$$I = I_0(1-k)\cos^2\alpha = \frac{1}{2}I_{прир.}(1-k)^2\cos^2\alpha. \qquad (3)$$

Звідки $\frac{I_{прир.}}{I} = \frac{2}{(1-k)^2\cos^2\alpha}$. Підставляємо значення та обчислюємо результат: $\frac{I_{прир.}}{I} = \frac{2}{(1-0,1)^2\cos^2 45^0} = 4,94.$ Відповідь: $\frac{I_{прир.}}{I} = 4,94.$

Приклад 18.16. Між паралельними ніколями поміщений скляний брусок з квадратним перерізом S (рис.18.15). Прийнявши константу фотопружності для скла $k=6\cdot10^{-11}$ м^2/Н, визначити величину мінімальної механічної напруги σ, яка виникає усередині бруска під дією сили F. Довжина хвилі поляризованого світла λ=430 нм, товщина бруска d=50 мм.

$k=6\cdot10^{-11}$ м^2/Н $\lambda=4{,}3\cdot10^{-7}$ м d = 0,05м	Розв'язання. Експериментально установлено, що різниця показників заломлення звичайного і незвичайного промінів n_o-n_e є пропорційною механічній напрузі, яка виникає у матеріалі (при виконанні закону Гука): $n_o-n_e=k\frac{F}{S}=k\sigma$.
σ -?	

Різниця ходу звичайного і незвичайного промінів $\Delta=(n_o-n_e)d$.

Тоді $\Delta=k\sigma d$.

Якщо навантаження F є таким, що на екрані буде спостерігатися затемнення, то

$$\Delta=(2m+1)\frac{\lambda}{2},\ m=0,1,2,...$$

Порівнюючи обидва значення Δ, отримуємо: $(2m+1)\frac{\lambda}{2}=k\sigma d$. Звідки

$$\sigma=\frac{(2m+1)\lambda}{2kd}.$$

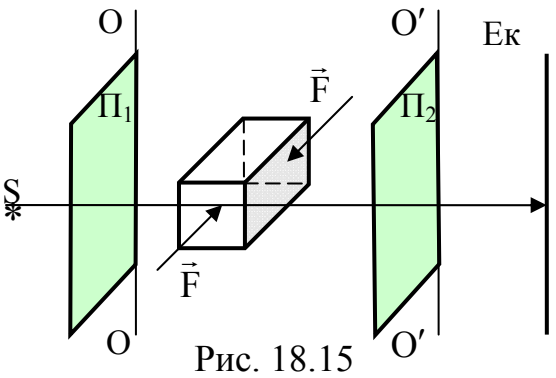


Рис. 18.15

Для m=0 $\sigma=\frac{\lambda}{2kd}$.

$$\sigma=\frac{4{,}3\cdot10^{-7}}{2\cdot6\cdot10^{-11}\cdot5\cdot10^{-2}}=7{,}2\cdot10^{4}\left(\frac{Н}{м^2}\right).$$

Відповідь: $\sigma=72\frac{кН}{м^2}$.

Приклад 18.17. Визначити довжину хвилі λ_{max}, яка відповідає максимуму спектральної випромінювальної здатності волоска лампи розжарювання, площа поверхні якої $S=2{,}5\cdot10^{-5}$м^2. Потужність, яка споживається лампою, P=50 Вт. Вважати волосок лампи сірим тілом, поглинальна здатність якого a = 0,3. Внаслідок теплопровідності іншим тілам передається частка η = 0,2 від енергії, яка споживається лампою.

$S=2{,}5\cdot10^{-5}$м^2 P=50 Вт a = 0,3 η = 0,2	Розв'язання. За законом Віна (18.42) $\lambda_{max}=\frac{b}{T}$, де $b=2{,}89\cdot10^{-3}$ м·К. (1)
λ_{max},-?	

Визначимо температуру волоска лампи. На розжарювання волоска витрачається доля (1–η) потужності P, яку споживає лампа. Отже

$$P_{кор.}=(1-\eta)P.$$

Відповідно випромінювальна здатність лампи $R'_e = \frac{(1-\eta)P}{S}$. (2)

Оскільки лампа є сірим тілом її випромінювальна здатність за формулою (18.41а) дорівнює $R' = a\sigma T^4$. (3) За формулами (2) і (3)

$$\frac{(1-\eta)P}{S} = a\sigma T^4.$$

Звідки $T = \sqrt[4]{\frac{(1-\eta)P}{\sigma a S}}$, і $\lambda_{max} = b\sqrt[4]{\frac{\sigma a S}{(1-\eta)P}}$.

Перевіряємо одиниці вимірювання $[\lambda] = м \cdot К\left(м^2 \frac{Вт}{м^2 К^4} Вт^{-1}\right)^{1/4} = м$.

Після підстановки значень знаходимо

$$\lambda_{max} = 2{,}89 \cdot 10^{-3}\sqrt[4]{\frac{0{,}3 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-5} \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8}}{0{,}8 \cdot 50}} = 8{,}78 \cdot 10^{-7}\,м.$$

Відповідь: $\lambda_{max} = 8{,}78 \cdot 10^{-7}$м.

Приклад 18.18. Вважаючи Сонце абсолютно чорним тілом з максимумом спектральної випромінювальної здатності при λ_{max}= 550нм, визначити температуру T і випромінювальну здатність R_e Сонця; потік енергії Ф, що випромінюється Сонцем та масу Δm, яку втрачає Сонце щосекунди. (Радіус Сонця $r=6{,}9599 \cdot 10^8$ м)

$\lambda_{max} = 5{,}50 \cdot 10^{-7}$ м $r = 6{,}9599 \cdot 10^8$ м	Розв'язання Абсолютну температуру Сонця визначаємо за законом зміщення Віна (перший закон Віна)
T; R_e; Ф; Δm -?	$\lambda_{max} = \frac{b}{T}$,

де λ_{max} – довжина хвилі, яка відповідає максимуму спектральної випромінювальної здатності абсолютно чорного тіла; b – стала закону зміщення Віна, $b = 2{,}89 \cdot 10^{-3}$м·К.

$$T = \frac{b}{\lambda_{max}} = \frac{2{,}89 \cdot 10^{-3}\,м \cdot К}{5{,}5 \cdot 10^{-7}\,м} = 5{,}27 \cdot 10^3\,К.$$

Випромінювальну здатність абсолютно чорного тіла знаходимо за законом Стефана – Больцмана:

$$R_e = \sigma T^4,$$

де σ – стала Стефана – Больцмана, $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м²·К⁴); T – температура за термодинамічною шкалою температур.

$$R_e = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot (5{,}27)^4 \cdot 10^{12} = 4{,}37 \cdot 10^7\,(Вт/м^2).$$

Випромінювальна здатність тіла $R_e(T)$ – кількість енергії, що випромінюється при заданій температурі з одиниці поверхні тіла за одиницю часу в усьому інтервалі частот:

$$R_e = \frac{dW}{dt \cdot ds}.$$

Звідки потік енергії, що випромінюється Сонцем з його поверхні $S = 4\pi r^2$, дорівнює $\Phi = \frac{dW}{dt} = R_e S = 4\pi r^2 R_e$.

$$\Phi = 4{,}37 \cdot 10^7 \cdot 4 \cdot 3{,}14 \cdot 6{,}96^2 \cdot 10^{16} = 2{,}66 \cdot 10^{26} \text{ (Вт)}.$$

Масу Δm, яку щосекунди втрачає Сонце, знаходимо за формулою теорії відносності, яка надає зв'язок маси тіла з енергією:

$E = mc^2$, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с - швидкість світла у вакуумі.

Звідки

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\Delta E}{\Delta t \cdot c^2} = \frac{\Phi}{c^2}. \qquad \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{2{,}66 \cdot 10^{26}}{9 \cdot 10^{16}} = 2{,}96 \cdot 10^9 \text{ (кг/с)}$$

$$\left[\frac{\Delta m}{\Delta t}\right] = \frac{\text{Вт} \cdot \text{с}^2}{\text{м}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{с}^3 \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{кг}}{\text{с}}$$

Відповідь: $T = 5{,}27 \cdot 10^3$ К; $R_e = 4{,}37 \cdot 10^7$ Вт/м^2; $\Phi = 2{,}66 \cdot 10^{26}$ Вт;

$\frac{\Delta m}{\Delta t} = 2{,}96 \cdot 10^9$ кг/с.

Приклад 18.19 На поверхню літію падає монохроматичне світло (λ=0,310мкм). Для припинення фотоефекту треба прикласти гальмівну напругу $U_г$=1,7В. Визначити роботу виходу електрона з метала та „червону межу" фотоефекту.

$\lambda = 3{,}10 \cdot 10^{-7}$ м $U_г$=1,7В	Розв'язання. Записуємо рівняння Ейнштейна для фотоефекту (18.49) з урахуванням зв'язку між частотою фотона ν і довжиною хвилі λ.
A; λ_0-?	

$$h\frac{c}{\lambda} = A + \frac{mv_{max}^2}{2}, \text{ де c – швидкість світла.}$$

Оскільки навіть найбільш швидкі електрони затримуються електричним полем після проходження в ньому відстані, яка відповідає різниці потенціалів $U_г$, то їх кінетична енергія безпосередньо після виходу з металу пов'язана з величиною $U_г$ співвідношенням

$$\frac{mv_{max}^2}{2} = eU_г,$$

Тоді $h\frac{c}{\lambda} = A + eU_г$, звідки $A = h\frac{c}{\lambda} - eU_г$.

Перевіряємо одиницю вимірювання: $[A] = Дж \cdot с \cdot \frac{м}{с \cdot м} = Дж$

Обчислення дає: $A=6{,}63\cdot10^{-34}\cdot\frac{3\cdot10^{8}}{3{,}1\cdot10^{-7}} - 1{,}6\cdot10^{-19}\cdot1{,}7=3{,}70\cdot10^{-19}$Дж=2,3 еВ.

За формулою (18.50) знаходимо червону межу фотоефекту: $\lambda_0 = \frac{hc}{A}$.

Перевіряємо одиницю вимірювання: $[\lambda] = \frac{Дж \cdot с}{Дж} \cdot \frac{м}{с} = м$.

Обчислення: $\lambda_0 = \frac{6{,}63\cdot10^{-34}\cdot3\cdot10^{8}}{3{,}70\cdot10^{-19}} = 5{,}38\cdot10^{-7}$ м=0,538 мкм.

Відповідь: $\lambda_0 = 0{,}538$ мкм.

Приклад 18.20. На поверхню цинку падають γ-промені з довжиною хвилі $\lambda=2\cdot10^{-12}$м. Визначити максимальну швидкість фотоелектронів, які вириваються з поверхні цинку.

$\lambda=2\cdot10^{-12}$м $A=6.4\cdot10^{-19}$Дж	Розв'язання. Порівняємо енергію γ-квантів з роботою виходу електронів з цинку, яка дорівнює $A=4{,}7$еВ$=6{,}4\cdot10^{-19}$Дж. Енергія фотона γ-променів
v_{max} -?	

$$\varepsilon = h\frac{c}{\lambda} = \frac{6{,}63\cdot10^{-34}\cdot3\cdot10^{8}}{2\cdot10^{-12}} = 9{,}94\cdot10^{-14}\,Дж.$$

З урахуванням співвідношення 1МеВ $=1{,}6\cdot10^{-19}$Дж отримуємо: ε=0,622Мев >>A, тобто роботою виходу можна знехтувати порівняно з енергією фотона і вважати, що максимальна кінетична енергія електрона дорівнює енергії γ-кванта: T = ε = 0,62 Мев.

У даному випадку кінетична енергія електрона більша за його власну енергію (енергію спокою)

$E_0=m_0c^2 = 9{,}11\cdot10^{-31}\cdot(3\cdot10^{8})^2$Дж = $8{,}20\cdot10^{-14}$ Дж = 0,51Мев. Тому для обчислення швидкості електрона слід використати релятивістську формулу кінетичної енергії (16.77).

$$T = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right), \text{ де } \beta=v/c.$$

Звідки після відповідних перетворень отримуємо $\beta = \frac{\sqrt{(2E_0+T)T}}{E_0+T}$.

$$\beta = \frac{\sqrt{(2\cdot0{,}51+0{,}62)\cdot0{,}62}}{0{,}51+0{,}62} = 0{,}89.$$

Тоді $v = c\beta = 3\cdot10^{8}\cdot0{,}89$ м/с = $2{,}67\cdot10^{8}$ м/с.

Відповідь: $v = 2{,}67\cdot10^{8}$ м/с.

Приклад 18.21. Визначити імпульс p та кінетичну енергію T електрона, що рухається зі швидкістю 0.9c (c – швидкість світла у вакуумі).

v=0.9c $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг T-?	Розв'язання Оскільки електрон рухається зі швидкістю, близькою до швидкості світла у вакуумі величину його імпульсу визначаємо за формулою релятивістської динаміки (16.75):

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

де $v/c = \beta = 0.9$ (за умовою задачі).

Таким чином, $p = \dfrac{m\beta c}{\sqrt{1-\beta^2}} = \dfrac{9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot 0{,}9 \cdot 3 \cdot 10^8}{\sqrt{1-0.81}}$ кг·м/с = $5{,}6 \cdot 10^{-22}$кг·м/с.

У релятивістському випадку кінетична енергія частинки визначається як різниця між повною енергією E та енергією спокою E_0, тому

$$T = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right).$$

$$T = 9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot \left(3 \cdot 10^8\right)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-0{,}9^2}} - 1\right) \text{Дж} = 1{,}06 \cdot 10^{-13}\,\text{Дж} = 0{,}66\,\text{МеВ}.$$

Відповідь: $p = 5{,}6 \cdot 10^{-22}$кг·м/с; $T = 0{,}66$МеВ.

Приклад 18.22. Внаслідок ефекту Комптона фотон з енергією $\varepsilon_1 = 1{,}85$ МеВ при зіткненні з електроном був розсіяний на кут $\theta = 90^o$. Визначити енергію ε_2 розсіяного фотона.

$\varepsilon_1 = 1{,}85$ МеВ $\theta = 90^o$ ε_2 -?	Розв'язання Для визначення енергії розсіяного фотона скористаємося формулою Комптона (18.51а) та (18.52):

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 2\frac{h}{m_e c}\sin^2\frac{\theta}{2}, \qquad (1)$$

де λ_2, λ_1 – довжини падаючої та розсіяної хвиль випромінювання. Виразимо довжини хвиль λ_2 і λ_1 через енергії ε_1 і ε_2 відповідних фотонів, скориставшись формулою $\varepsilon = \dfrac{hc}{\lambda}$. Одночасно помножимо чисельник і знаменник правої частини формули (1) на швидкість світла c:

$$\frac{hc}{E_2} - \frac{hc}{E_1} = 2\frac{hc}{m_e c^2}\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

Скорочуємо на hc і виражаємо з отриманої формули шукану енергію:

$$\varepsilon_2=\frac{\varepsilon_1 m_e c^2}{m_e c^2+\varepsilon_1\cdot 2\sin^2\frac{\theta}{2}}=\frac{\varepsilon_1 E_0}{E_0+\varepsilon_1\cdot 2\sin^2\frac{\theta}{2}},$$

де $E_0=m_e c^2$ = 0,51Мев – енергія спокою електрона в мегаелектрон-вольтах. Обчислення, яке проводимо в мегаелектрон-вольтах, дає:

$$\varepsilon_2=\frac{1{,}85\cdot 0{,}51}{0{,}51+1{,}85\cdot 2\sin^2\frac{90^\circ}{2}}\text{МеВ} = 0{,}4\text{МеВ}.$$

Відповідь: E_2=0,4МеВ.

Приклад 18.23. Використовуючи закони збереження енергії та імпульсу отримати формулу, яка пов'язує втрати енергії фотона $\Delta\varepsilon$ (кінетичну енергію електрона віддачі) з кутом розсіяння θ при ефекті Компотна. Вирахувати $\Delta\varepsilon$ при θ=60° та $\lambda=1{,}66\cdot 10^{-12}$ м.

θ=60° $\lambda=1{,}66\cdot 10^{-12}$ м.	Розв'язання Розглянемо процес комптонівського розсіювання рентгенівського фотону на електроні (рис.18.16).
$\Delta\varepsilon$ -?	

Згідно з законом збереження енергії

$$m_e c^2 + h\nu = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + h\nu^{/}, \quad (1)$$

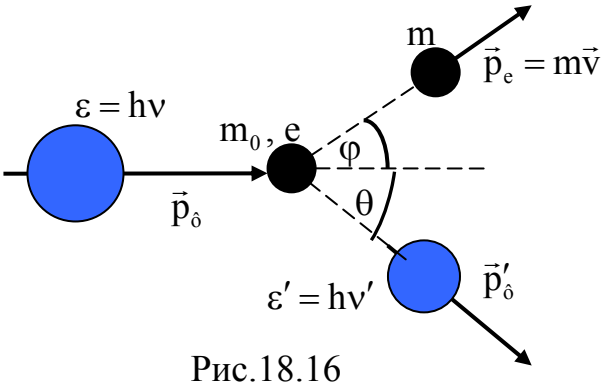


Рис.18.16

де ν і $\nu^{/}$ – частота, яка відповідає рентгенівському фотону до та після розсіювання; $m_e c^2$ – енергія спокою електрона (вважаємо, що до зіткнення з фотоном кінетична енергія і імпульс електрона були малі, і ними можна знехтувати); $\frac{m_e c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ – енергія електрона, який рухається зі швидкістю v; m_e – маса електрона.

За законом збереження імпульсу з використанням теореми косинусів (див. рис. 18.16) отримуємо: $p_e^2 = p_ф^2 + p_ф'^2 - 2p_ф p'_ф\cos\theta$, або, з урахуванням виразів для імпульсів фотонів $p_ф = \frac{h\nu}{c}$ і $p'_ф = \frac{h\nu'}{c}$:

$$\frac{m_e^2 v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu'}{c}\right)^2 - 2\frac{h^2}{c^2}\nu\nu' \cos\theta. \qquad (2)$$

Переписуємо рівняння (1) і (2) у вигляді:

$$\frac{m_e c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = h\nu - h\nu' + mc^2; \qquad (1a)$$

$$\frac{m_e^2 v^2 c^4}{c^2 - v^2} = h^2\nu^2 + h^2\nu'^2 - 2h^2\nu\nu' \cos\theta. \qquad (2a)$$

Після піднесення рівняння (1а) до квадрату воно набуває вигляду

$$\frac{m_e^2 c^6}{c^2 - v^2} = h^2\nu^2 - 2h^2\nu\nu' + h^2\nu'^2 + 2\left(h\nu - h\nu'\right)m_e c^2 + m_e^2 c^4. \qquad (1б)$$

Віднімання від виразу (1б) рівняння (2а) дає:

$$h^2\nu\nu'(1-\cos\theta) = m_e c^2 (h\nu - h\nu'),$$

або $\varepsilon\varepsilon'(1-\cos\theta) = m_e c^2\left(\varepsilon - \varepsilon'\right)$, звідки виражаємо ε' та знаходимо $\Delta\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon'$:

$$\Delta\varepsilon = \frac{\varepsilon^2(1-\cos\theta)}{\varepsilon(1-\cos\theta) + m_e c^2} = \frac{\varepsilon^2(1-\cos\theta)/m_e c^2}{\varepsilon(1-\cos\theta)/m_e c^2 + 1}.$$

Енергію фотона виражаємо через довжину хвилі: $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}$. З урахуванням виразу для комптонівської довжині хвилі $\lambda_c = \frac{h}{m_e c}$ ($\lambda_c = 2,43\cdot 10^{-12}$ м) остаточно отримуємо: $\Delta\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}\cdot\frac{\lambda_c(1-\cos\theta)}{\lambda_c(1-\cos\theta)+\lambda}$.

$$\left[\Delta\varepsilon\right] = \frac{\text{Дж}\cdot\text{с}\cdot\text{м}}{\text{с}\cdot\text{м}}\cdot\frac{\text{м}}{\text{м}} = \text{Дж}.$$

Обчислення дає:

$$\Delta\varepsilon = \frac{6,63\cdot 10^{-34}\cdot 3\cdot 10^8}{1,66\cdot 10^{-12}}\cdot\frac{2,43\cdot 10^{-12}(1-0,5)}{2,43\cdot 10^{-12}(1-0,5)+1,66\cdot 10^{-12}} = 5,06\cdot 10^{-14}\,\text{Дж}$$

Відповідь: $\varepsilon = 5,06\cdot 10^{-14}\,\text{Дж} = 0,32\,\text{МеВ}$.

Приклад 18.24. Визначити імпульс електрона віддачі при комптонівському розсіюванні рентгенівських промінів, енергія яких E=0,7 МеВ, якщо довжина хвилі зміщеної лінії на 0,2λ більша за довжину хвилі незміщеної компоненти.

$E=0{,}7$ МеВ $\Delta\lambda = 0{,}2\lambda$	
$p_e - ?$	

Розв'язання

За законом збереження імпульсу $\vec{p}_ф = \vec{p}'_ф + \vec{p}_e$, де $\vec{p}_ф$ і $\vec{p}'_ф$ - імпульси фотону до та після розсіювання, $\vec{p}_e$ – імпульс електрона віддачі.

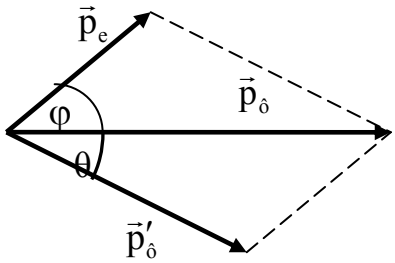


Рис. 18. 17

Використовуючи теорему косинусів (рис. 18. 17), отримуємо:

$p_e^2 = p_ф^2 + p'^2_ф - 2p_ф p'_ф \cos\theta$ (1). Виражаємо імпульси фотонів через їх енергію з урахуванням того, що після розсіювання довжина хвилі $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda = 1{,}2\lambda$:

$$p_ф = \frac{h}{\lambda} = \frac{\varepsilon}{c};\ (2) \qquad p'_ф = \frac{h}{\lambda'} = \frac{h}{1{,}2\lambda} = \frac{1}{1{,}2}\cdot\frac{\varepsilon}{c}.\ (3)$$

Вираз для $\cos\theta$ отримуємо з формули (18.51): $\Delta\lambda = \lambda_c(1-\cos\theta)$,

де $\lambda_c = \dfrac{h}{m_e c}$, а $\Delta\lambda$ (згідно з умовою задачі) дорівнює $\Delta\lambda = 0{,}2\lambda = 0{,}2\dfrac{hc}{\varepsilon}$.

$$\cos\theta = 1 - \frac{0{,}2\lambda}{\lambda_c} = 1 - \frac{0{,}2 m_e c^2}{\varepsilon}. \quad (4)$$

Підстановка виразів (2) – (4) у формулу (1) дає:

$$p_e = \frac{\varepsilon}{c}\left(\frac{0{,}04}{1{,}2^2} + \frac{m_0 c^2}{3\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\varepsilon}{c}\left(0{,}028 + \frac{m_0 c^2}{3\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$p_e = \frac{0{,}7\cdot 1{,}6\cdot 10^{-13}}{3\cdot 10^8}\left(0.028 + \frac{0{,}511}{3\cdot 0{,}7}\right) = 1{,}94\cdot 10^{-22}\left(\frac{кг\cdot м}{с}\right).$$

Приклад 18.25. Тиск монохроматичного світла з довжиною хвилі λ=0,6 мкм на чорну поверхню дорівнює 10^{-7} Н/м^2. Скільки фотонів падає щосекунди на 1 м^2 поверхні?

$\lambda = 6\cdot 10^{-7}$ м $p = 10^{-7}$ Н/м^2	
n -?	

Розв'язання

Тиск світла у разі нормального падіння на поверхню з коефіцієнтом відбиття ρ згідно формули (18.47) дорівнює $p = \dfrac{E_e}{c}(1+\rho)$, де E_e – енергетична освітленість поверхні, c – швидкість світла у вакуумі.

Енергетична освітленість поверхні – енергія, яка падає на одиницю поверхні за одиницю часу, виражається через кількість фотонів n, які

щосекунди падають на одиницю площі поверхні, та енергію окремого фотона $\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$:

$$E_e = \frac{nhc}{\lambda},$$ де $h=6{,}63\cdot10^{-34}$ Дж·с – стала Планка.

Поверхня чорна, тому коефіцієнт відбиття приймаємо рівним нулю: $\rho=0$.

Отже, $p = \frac{nh}{\lambda}$. Звідси $n = \frac{p\lambda}{h}$. $n = \frac{10^{-7}\cdot0{,}6\cdot10^{-6}}{6{,}63\cdot10^{-34}} = 9{,}05\cdot10^{19}$.

Перевіряємо одиницю вимірювання: $[n] = \frac{Н/м^2\cdot м}{Дж\cdot с} = \frac{Дж\cdot м^{-2}}{Дж\cdot с} = с^{-1}\cdot м^{-2}$.

Відповідь: $n = 9{,}05\cdot10^{19} с^{-1}\cdot м^{-2}$.

Задачі для самостійного розв'язування

18.1. Прожектор випромінює пучок світла у вигляді конуса, кут розхилу якого $2\theta = 30^0$. Світловий потік Ф прожектора розподілений усередині конуса рівномірно і становить 80 клм. Визначити силу світла I прожектора.

18.2. Визначити середню силу світла $\langle I \rangle$ лампи потужністю N = 120Вт, якщо її світлова ефективність η=15лм/Вт.

18.3. Освітленість E_1 поверхні землі при кутовій висоті Сонця над горизонтом $\varphi_1 = 45°$ дорівнює 80лк. Визначити освітленість E_2 при кутовій висоті $\varphi_2 = 30°$.

18.4. Лампа, сила світла якої I=200кд, знаходиться на відстані r=1,0м від екрану. На якій відстані позаду лампи слід поставити паралельно екрану дзеркало, щоб освітленість в центрі екрана збільшилась на $\Delta E = 50$лк?

18.5. Над центром круглого стола радіуса R=0,8м висить лампа. На якій висоті h слід підвисити лампу, щоб освітленість краю стола була максимальною?

18.6. В центрі квадратної кімнати площею $S=16м^2$ висить лампа. На якій висоті h від підлоги слід підвисити лампу, щоб освітленість в кутах кімнати була максимальною?

18.7. При фотографуванні предмет освітлюють лампою, яка знаходиться від нього на відстані r_1= 1,5м. У скільки разів необхідно збільшити час експозиції, щоб отримати таке саме зображення, якщо лампу відсунути від предмета на відстань r_2= 2,25м?

18.8. Над поверхнею розплавленої платини знаходиться непрозорий екран з круглим отвором радіусом r= 4,0мм. Сила світла I, яке проходить через отвір в перпендикулярному до поверхні платини напряму, складає 30кд. Визначити яскравість B відкритої поверхні платини.

18.9. Електроосвітлювальна лампа силою світла I = 150кд знаходиться у матовому плафоні діаметром d=10см, який поглинає η=10% світлового

потоку, який випромінює лампа. Визначити світність R і яскравість B світильника.

18.10. У кінотеатрі на екран розміром 7x5м^2 з об'єктива кінопроектора падає світловий потік Ф = 3500лм. Коефіцієнт відбиття екрана ρ=0,9. Визначити освітленість E, світність R та яскравість B кіноекрана, якщо для нього виконується закон Ламберта.

18.11. Визначити кут падіння променя з повітря на поверхню води, якщо кут між заломленим та відбитим променями дорівнює $90°$.

18.12. Визначити кут заломлення променя при переході з повітря у етиловий спирт, якщо кут між відбитим та заломленим променями $120°$.

18.13. У дно водоймища глибиною 1,5 м вбита паля, котра виступає з води на 30 см. Знайти довжину тіні від палі на дні водоймища при куті падіння сонячних променів $45°$.

18.14. Водолаз визначив, що кут заломлення променя у воді дорівнює $32°$. Під яким кутом до поверхні води падають промені світла?

18.15. На дні струмка лежить камінець. Хлопець хоче попасти в нього палкою. Прицілившись, хлопець тримає палку у повітрі під кутом $45°$. На якої відстані від камінця застромиться палка у дно струмка, якщо його глибина 32см?

18.16. Граничний кут падіння при переході променя із скипидару в повітря дорівнює $41^{\circ}50^{/}$. Чому дорівнює швидкість розповсюдження світла в скипидарі?

18.17. Прямокутна скляна пластинка завтовшки 4,0см має показник заломлення n=1,6. На її поверхню падає промінь світла під кутом $i=50°$. Визначити зміщення променя після виходу з пластинки у повітря.

18.18. На дні посудини, заповненій водою до висоти h=20 см, знаходиться точкове джерело світла. Визначити найменший радіус дерев'яного кола, який слід помістити над джерелом на поверхні води, щоб світло не виходило з води. Показник заломлення води n=1,33.

18.19. На скляну пластинку з показником заломлення n=1,6 падає промінь світла. Визначити кут падіння променя, якщо кут α між відбитим та заломленим променями дорівнює $90°$.

18.20. Пучок монохроматичного світла падає під кутом $i=45°$ на бічну поверхню скляної призми, кут заломлення якої $\alpha=28°$. Після заломлення і відбиття від другої грані, яка покрита шаром срібла, промінь повернувся назад у попередньому напрямку. Визначити показник заломлення матеріалу призми.

18.21. Визначити збільшення, яке утворюється вгнутим сферичним дзеркалом з радіусом кривизни R=64см, якщо предмет знаходиться на відстані $a_1=-16$см від дзеркала. Надати рисунок.

18.22. Коли предмет знаходиться на відстані $a_1=-2{,}0$м від вгнутого сферичного дзеркала, його дійсне зображення знаходиться на відстані

a_2=0,5м від дзеркала. Де і яким буде зображення цього предмета, якщо його відсунути від дзеркала ще на 1м? Надати рисунок.

18.23. Збиральну лінзу, виготовлену з скла (n=1,6), яке має фокусну відстань у повітрі $F_п$=12см, занурили у воду ($n_в$=1,33). Чому буде дорівнювати нове значення $F_в$ її фокусної відстані?

18.24. Плоско-опукла лінза з радіусом кривизни R=40см і показником заломлення n=1,5 дає зображення предмета збільшене вдвічі (k=2). Визначити відстані a_1 та a_2 предмета і зображення від лінзи. Надати рисунок.

18.25. Визначити радіуси кривизни поверхні лупи, які необхідні для того, щоб вона давала для нормального ока збільшення k=5. Показник заломлення скла, з якого зроблена лупа, n=1,5.

18.26. Предмет знаходиться на відстані a_1= –40см від лінзи. При цьому відстань до уявного зображення предмета становить a_2= –1,2м. До лінзи приклали іншу лінзу з оптичною силою D=2,0дптр. Де і яким буде нове зображення предмета?

18.27. На мильну плівку (n=1,33) падає біле світло під кутом $\alpha = 45°$. При якій найменшій товщині плівки відбиті промені будуть мати жовтий колір (λ=600нм)?

18.28. У деяку точку простору приходять когерентні промені з геометричною різницею ходу 1,2мкм, довжина хвилі яких у вакуумі 600нм. Визначити, що відбудеться в цій точці внаслідок інтерференції у повітрі; у воді; у склі з показником заломлення 1,5.

18.29. Визначити відстань між когерентними джерелами білого світла, якщо на екрані відстань між червоною та фіолетовою смугами першого інтерференційного спектра дорівнює 5,6мм. Відстань від джерел світла до екрану 2,6м.

18.30. Яку найменшу товщину повинна мати пластинка, зроблена із матеріалу з показником заломлення 1,54, щоб при її освітленні променями з довжиною хвилі λ=750 нм, перпендикулярними до поверхні пластинки, вона у відбитому світлі здавалась червоною?

18.31. Тонка плівка товщиною 0,50мкм освітлюється світлом з довжиною хвилі 590нм. Якою буде здаватися ця плівка у світлі, яке проходить крізь неї, якщо показник заломлення речовини плівки 1,48, а промені направлені перпендикулярно до поверхні плівки? Що буде трапитися з окраскою плівки, якщо її нахиляти відносно променів?

18.32. Два когерентних джерела світла, відстань між якими d=0,30мм, знаходяться на відстані L=2,5м від екрана, де спостерігається інтерференційна картина. Чому дорівнює довжина хвилі світла, якщо на відстані Δx = 5,0см вміщується 10,5 інтерференційних смуг?

18.33. При спостереженні інтерференції світла від двох уявних джерел монохроматичного світла з довжиною хвилі λ = 520нм на екрані довжиною Δx = 4,0см спостерігалось 8,5 інтерференційних смуг. Визначити відстань

L від джерел світла до екрана, якщо відстань між джерелами становить d=0,30мм.

18.34. В досліді з інтерферометром Майкельсона для зміщення інтерференційної картини на $\Delta m = 500$смуг дзеркало переміщують на відстань Δl=0,161мм. Визначити довжину хвилі світла.

18.35. На тонкий скляний клин падає у напрямку нормалі до його поверхні монохроматичне світло з довжиною хвилі $\lambda = 500$нм. Визначити кут між поверхнями клина, якщо відстань між сусідніми інтерференційними мінімумами b=3 мм. Показник заломлення скла n=1,6.

18.36. Для визначення товщини волосу його поклали на скляну пластинку та зверху накрили іншою пластинкою. Відстань від волоса до лінії дотику пластинок, якій він паралельний, дорівнює 20 см. При освітленні пластинок червоним світлом (λ=750нм) на відстані 1,0см зміщується 8смуг. Визначити товщину волоса.

18.37. Визначити радіус кривизни лінзи, яка лежить на плоскій пластинці, якщо радіус четвертого світлого кільця Ньютона, що спостерігається у відбитому світлі, дорівнює 4,5мм. Система освітлюється світлом з довжиною хвилі 520нм, падаючим паралельно головній оптичній осі лінзи.

18.38. При освітленні кварцового клина з кутом $\alpha = 5{,}0''$ монохроматичними променями з $\lambda = 600$нм, перпендикулярними до його поверхні, спостерігаються інтерференційні смуги. Визначити ширину цих смуг.

18.39. На поверхню лінзи, показник заломлення якої n_c=1,6, нанесли прозору плівку. Показник заломлення плівки $n_{пл}$=1,3. Якою має бути найменша товщина d цієї плівки для максимального ослаблення відбитого світла у середній частині видимого спектра ($\lambda = 500$нм)?

18.40. Відстань Δr_{9-10} між десятим і дев'ятим темними кільцями Ньютона у відбитому світлі дорівнює 0,39мм. Визначити відстань Δr_{2-1} між другим та першим темними кільцями.

18.41. Установка для спостереження кілець Ньютона освітлюється монохроматичним світлом, що падає по нормалі до поверхні пластинки. Спостереження проводять у відбитому світлі. Визначити довжину хвилі світла, якщо діаметр другого світлого кільця Ньютона d_2=5мм, а радіус кривизни лінзи R=6,4м.

18.42. Установку для спостереження кілець Ньютона занурили у воду. Установка освітлюється монохроматичним світлом з довжиною хвилі λ=640нм, що падає нормально до поверхні пластинки. Діаметр другого світлого кільця у відбитому світлі d_2=4,3мм. Визначити радіус кривизни R лінзи. Показник заломлення води $n_в$=1,33.

18.43. На пластину з щілиною, ширина якої a = 0,05мм, падає нормально монохроматичне світло з довжиною хвилі λ = 0,65мкм. Визначити кут відхилу променів, який відповідає другому дифракційному максимуму.

18.44. На щілину, ширина якої a = 20мкм, падає нормально паралельний пучок монохроматичного світла (λ = 0, 6мкм). Знайти ширину зображення щілини на екрані, який віддалений від неї на відстань l = 0,5м. Шириною зображення вважати відстань між першими дифракційними мінімумами, які знаходяться по обидва боки від головного максимуму освітленості.

18.45. Визначити, постійну дифракційної ґратки, якщо при її освітленні світлом з довжиною хвилі 656нм максимум другого порядку спостерігається під кутом $15°$.

18.46. Який найбільший порядок спектру можливо бачити за допомогою дифракційної ґратки, яка має 500 штрихів на 1мм, при освітленні її світлом з довжиною хвилі 720нм?

18.47. Визначити довжину хвилі, падаючої на дифракційну ґратку, на кожний міліметр якої нанесено 400 штрихів. Дифракційна ґратка розташована на відстані 25см від екрану. При вимірюванні на екрані виявилось, що відстань між максимумами третього порядку, які спостерігаються по різні боки від нульового дорівнює 37,4см.

18.48. На дифракційну ґратку, яка має n = 250 штрихів на один міліметр, падає нормально монохроматичне світло, довжина хвилі якого λ=700нм. Скільки максимумів можна спостерігати за допомогою цієї ґратки? Визначити кут дифракції, який відповідає останньому максимуму.

18.49. На дифракційну ґратку падає нормально паралельний пучок променів білого світла. Спектри третього і четвертого порядку частково накладаються. На яку довжину хвилі в спектрі третього порядку накладається фіолетова границя (λ=400нм) спектру четвертого порядку?

18.50. При освітленні дифракційної ґратки світлом λ = 627нм відстань на екрані між центральним і першим максимумами склала b = 39,6см. Визначити період ґратки, якщо відомо, що відстань екрана від ґратки дорівнює l = 120см.

18.51. На дифракційну ґратку, яка має n = 100 штрихів на один міліметр, падає нормально монохроматичне світло. Труба спектрометра наведена на максимум третього порядку. Щоб навести трубу на другий максимум того самого порядку, її треба повернути на кут $\Delta\varphi = 16^0$. Визначити довжину світлової хвилі.

18.52. Визначити кутову дисперсію D_φ дифракційної ґратки для довжини хвилі λ = 650нм, якщо кут дифракції $\varphi = 15^0$.

18.53. Чи можливо за допомогою дифракційної ґратки з періодом d=0,02мм розділити у спектрі другого порядку дублет натрію λ_1=589нм і λ_2=589,6нм? Ширина ґратки l=20мм.

18.54. Яку найменшу роздільну здатність R повинна мати дифракційна ґратка, щоб розділити дві спектральні лінії калію (λ_1=578нм і λ_2=580нм)? Чому має дорівнювати мінімальна кількість N штрихів у дифракційній ґратці, щоб лінії розділялись у спектрі другого порядку?

18.55. Період дифракційної ґратки d = 4мкм. Яка найменша різниця довжин хвиль $\delta\lambda$ двох ліній, що розділяються у жовтій частині (λ=600нм) в спектрі другого порядку? Довжина робочої частини ґратки l = 2см.

18.56. На поверхню кристалу KCl, відстань між атомними площинами якого d=0,293нм, падає рентгенівське випромінювання. Дифракційний максимум другого порядку спостерігається, якщо кут падіння $i = 75^\circ 40'$. Обчислити довжину хвилі рентгенівського випромінювання.

18.57. Промінь світла відбивається від дна скляної посудини, заповненої водою. При якому куті падіння променя на поверхню води відбите світло є максимально поляризованим? ($n_в$=1,33, $n_{ск}$=1,57).

18.58. Чому дорівнює граничний кут повного внутрішнього відбиття та кут повної поляризації для випадку переходу променя із скла з показником заломлення 1,7 у воду?

18.59. Визначити граничний кут при переході променя з рідини у повітря, якщо кут повної поляризації для цього випадку дорівнює $36^\circ 19'$.

18.60. Маємо кришталь, для якого граничний кут дорівнює $44^\circ 12'$. Визначити кут падіння променя всередині кришталю, при якому відбитий промінь буде повністю поляризованим.

18.61. Кут повної поляризації світла у разі його відбивання від деякої рідини становить $i_Б = 50^\circ$. Визначити швидкість світла в рідині.

18.62. Кут повної поляризації світла $i_Б$ у разі його відбивання на межі повітря – рідина становить 55°. Визначити кут повного внутрішнього відбиття $i_{гр.}$ променя на межі рідини з повітрям.

18.63. Кут між головними площинами поляризатора і аналізатора $\alpha_1 = 45^\circ$. У скільки разів зміниться інтенсивність світла при проходженні крізь систему, якщо кут зменшити до $\alpha_2 = 30^\circ$?

18.64. Два ніколі розташовані так, що кут між їхніми головними плоскостями дорівнює 60°. На ніколь – поляризатор падає природне світло. У скільки разів зменшиться інтенсивність світла, яке вийшло з ніколя – аналізатора? При проходженні кожного з ніколей утрати на відбиття і поглинання світла дорівнюють 10%.

18.65. У скільки разів η послаблюється світло, що проходить через два ніколі, площини яких утворюють кут $\alpha = 30^\circ$, якщо в кожному з них втрачається k=15% падаючого на нього світлового потоку?

18.66. Інтенсивність природного світла, яке проходить крізь поляризатор і аналізатор зменшується в 6 разів. Визначити кут α між площинами пропускання поляризатора і аналізатора.

18.67. Кут максимальної поляризації світла $i_Б$ при відбиванні світла від кристала кам'яної солі дорівнює 57°. Визначити кут заломлення світла r.

18.68. У кювету цукрометру налито 5%-й розчин цукру, який повертає площину поляризації на кут $\varphi = 4{,}5^\circ$. Визначити концентрацію c_1 розчину цукру, який повертає площину поляризації на кут $\varphi_1 = 12^\circ$.

18.69. При проходженні світла крізь трубку довжиною l_1 = 15см, яка містить 10%-й розчин цукру, площина поляризації світла повернулася на кут $\varphi_1 = 12{,}9°$. В іншому розчині цукру, який налитий в трубку довжиною l_1 = 10см, площина поляризації світла повернулася на кут $\varphi_2 = 10{,}3°$. Визначити концентрацію c_2 другого розчину.

18.70. Між схрещеними ніколями розміщено кварцову пластинку товщини d=3,3мм. Визначити сталу обертання кварцу α для використаного монохроматичного світла, якщо поле зору стало максимально освітленим.

18.71. З віконця плавильної печі, площа поверхні якого $S=9см^2$, випускається випромінювання потужністю P=30Вт. Визначити температуру печі T, розглядаючи віконце як абсолютно чорне тіло.

18.72. Поглинальна здатність вугілля при температурі T = 600К дорівнює a=0,8. Визначити 1)випромінювальну здатність R вугілля при цій температурі; 2) енергію, що випромінюється з поверхні вугілля площиною $S = 6\ см^2$ за час t = 15 хв.

18.73. Температура вольфрамової спіралі лампи розжарювання T=2400К. Потужність, яку споживає лампа P=25Вт. Поглинальна здатність вольфраму, який можна вважати сірим тілом, становить a = 0,3. Визначити площу S поверхні спіралі. Втратами енергії знехтувати.

18.74. Муфельна піч споживає потужність P=1кВт. Температура її внутрішньої поверхні при відчиненому отворі площиною $S=30см^2$ становить T=1,2кК. Визначити, яка частина потужності розсіюється стінками, якщо отвір випромінює як абсолютно чорне тіло.

18.75. Максимум спектральної випромінювальної здатності абсолютно чорного тіла припадає на довжину хвилі λ_{max}=700нм. Площина випромінюючої поверхні тіла $S=6см^2$. Визначити потужність випромінювання.

18.76. Вважаючи Сонце абсолютно чорним тілом з максимумом спектральної випромінювальної здатності при λ_{max}=550нм, визначити температуру T і випромінювальну здатність R_e Сонця; потік енергії Ф, що випромінюється Сонцем та масу Δm, яку втрачає Сонце щосекунди. (Радіус Сонця $r = 6{,}9599 \cdot 10^8$ м)

18.77. Температура абсолютно чорного джерела теплового випромінювання T_1=2500К. Визначити температуру другого джерела, якщо відомо, що довжина хвилі, яка відповідає максимуму його спектральної випромінювальної здатності на Δλ=0,6мкм більша, ніж у першого джерела.

18.78. При нагріванні абсолютно чорного тіла довжина хвилі, на яку припадає максимум спектральної випромінювальної здатності, змінилася з λ_{max1}=650нм до λ_{max2}=550нм. У скільки разів при цьому зросла випромінювальна здатність (енергетична світність) R тіла? Як змінилась при цьому спектральна випромінювальна здатність $r_{\lambda max}$?

18.79. Нагріта куля радіусом r=8см випускає випромінювання потужністю P=1кВт. Визначити температуру кулі T, розглядаючи її як сіре тіло, поглинальна здатність якого a=0,2.

18.80. Температура верхніх шарів зірки Сиріус T=10кК. Визначити потік енергії Ф, який випромінюється з поверхні площею $S=1км^2$ зірки. На яку довжину хвилі λ_{max} припадає максимум спектральної випромінювальної здатності?

18.81. Червона межа фотоефекту для калію складає λ_0=0,62мкм. Визначити 1) величину гальмівного потенціалу $U_г$ при дії на калій випромінювання з довжиною хвилі $3,1\cdot10^{-7}$м; 2) роботу виходу електронів з калію.

18.82. Червона межа фотоефекту для літію складає λ_0= 520нм. Визначити 1) величину гальмівного потенціалу $U_г$ при дії на калій випромінювання з довжиною хвилі 250нм; 2) роботу виходу електронів з літію.

18.83. Чому дорівнює довжина хвилі ультрафіолетового випромінювання, яке падає на поверхню цинку, якщо швидкість фотоелектронів складає v=1300км/с? Червона межа фотоефекту для цинку λ_0=310нм.

18.84. На платинову пластинку падає ультрафіолетове випромінювання, яке викликає фотоефект. Для припинення фотоефекту потрібно прикласти гальмівний потенціал $U_{г1}$=3,7В. Якщо платинову пластинку замінити пластинкою з іншого металу, гальмівний потенціал необхідно збільшити до $U_{г2}$=5.8В. Визначити роботу виходу електронів з цієї пластинки.

18.85. Ультрафіолетове випромінювання з довжиною хвилі λ_1=0,30мкм при падінні на катод фотоелементу викликає потік електронів із швидкістю $v_1=10^6$м/с. Яку довжину хвилі λ_2 повинно мати випромінювання, щоб максимальна кінетична енергія електронів T_{max} дорівнювала $4\cdot10^{-19}$Дж?

18.86. Яка доля енергії фотона при фотоефекті витрачається на роботу, якщо червона межа фотоефекту λ_0=367нм, а максимальна кінетична енергія фотоелектронів T_{max}= 2еВ.

18.87. На поверхню метала падають монохроматичні промені з довжиною хвилі λ=160нм. Червона межа фотоефекту λ_0=200нм. Яка доля енергії фотона витрачається на надання електрону максимальної кінетичної енергії?

18.88. Робота виходу електронів з кадмію A= 4,08еВ. Яку довжину хвилі має випромінювання, яке падає на кадмій, якщо при фотоефекті максимальна швидкість фотоелектронів становить $v_{max}= 6,8\cdot10^5$ м/с?

18.89. На поверхню вольфраму падають монохроматичні промені з довжиною хвилі λ=210нм. Визначити максимальну швидкість фотоелектронів v_{max}, якщо поверхневий скачок потенціалу ΔU для вольфраму становить 4,56 В.

18.90. Фотони з енергією ε=2,9еВ виривають з поверхні метала, робота виходу якого A=2,4еВ, електрони. Який максимальний імпульс p_{max} надається поверхні металу при вилітанні окремого електрону?

18.91. Визначити довжину хвилі фотону, ефективна маса якого дорівнює масі електрона.
18.92. Визначити довжину хвилі фотону, імпульс якого дорівнює імпульсу електрона, який пройшов різницю потенціалів U = 9,8В.
18.93. Знайти та порівняти енергію червоного фотона $(\lambda = 0,63\text{мкм})$ з енергією γ-кванта з довжиною хвилі $\lambda = 10^{-12}$м.
18.94. З якою швидкістю повинен рухатися електрон, щоб його імпульс дорівнював імпульсу фотона з довжиною хвилі 0,55 мкм?
18.95. Знайти енергію та імпульс фотона з довжиною хвилі 0,55нм.
18.96. Визначити енергію та імпульс фотона з довжиною хвилі $2 \cdot 10^{-10}$м.
18.97. Фотон з енергією 0,25МеВ розсіявся на вільному електроні. Енергія розсіяного фотона 0,22МеВ. Визначити кут розсіяння.
18.98. Фотон (λ=0,05Å) розсіявся на вільному електроні під кутом $90°$. Яку долю своєї енергії фотон передав електрону?
18.99. Якою була довжина хвилі λ_0 рентгенівського випромінювання, якщо при комптонівському розсіюванні цього випромінювання графітом під кутом $\theta = 50°$ довжина хвилі розсіяного випромінювання склала λ=25,0пм?
18.100. При ефекті Компотна фотон з енергією $\varepsilon_1 = 0,51$Мев був розсіяний на кут $\theta = 140°$. Визначити енергію ε_2 розсіяного фотона.
18.101. Фотон з імпульсом $p_1 = 1,06 \cdot 10^{-22}$кг·м/с внаслідок ефекту Комптона був розсіяним на кут $\theta = 90°$. Визначити імпульс розсіяного фотона.
18.102. На плоске дзеркало нормально падає випромінювання від CO_2-лазера (з довжиною хвилі 10,6нм), яке тисне на поверхню з силою 0,1нН. Визначити кількість фотонів N, яка падає щосекунди на дзеркало.
18.103. Монохроматичний пучок світла (λ=450нм) падає по нормалі до поверхні і спричиняє тиск P = 4,5мкПа. Яка кількість фотонів попадає в одиницю часу на одиницю площі цієї поверхні? Коефіцієнт відбиття світла ρ = 0,2.
18.104. Потік монохроматичного випромінювання (λ=400нм) падає по нормалі на плоску дзеркальну поверхню і тисне на неї з силою $F=10^{-8}$ Н. Визначити кількість фотонів, які щосекунди падають на цю поверхню.
18.105. Потік монохроматичного випромінювання (λ=600нм) падає по нормалі на плоску чорну поверхню і тисне на неї з силою $F=10^{-8}$ Н. Визначити кількість фотонів, які щосекунди падають на цю поверхню.
18.106. Середня довжина хвилі випромінювання лампи розжарювання з вольфрамовою ниткою складає λ=1,2мкм. Визначити кількість фотонів, які щосекунди випромінює лампа, потужність якої P =100Вт.

Тестові завдання

Вибрати вірну відповідь:

1. Відстань між предметом і поверхнею плоского дзеркала дорівнює 1 м. Якщо дзеркало відсунути від предмета ще на 1м, відстань між предметом і його зображенням дорівнюватиме:

1. 2м 2. 3м 3. 4м 4. 6 м

2. Явище внутрішнього відбиття при падінні променя світла під кутом падіння i на границю двох прозорих діелектриків з показниками заломлення n_1 та n_2 спостерігається при виконанні умов:

1. $n_2 > n_1$, кут падіння i має довільне значення 2. $n_2 > n_1$, $i < i_0$
3. $n_2 < n_1$, $i < i_0$ 4. $n_2 < n_1$, $i > i_0$

(i_0 - граничний кут повного внутрішнього відбиття)

3. При переході світла з одного середовища в інше не змінюються

1. довжина хвилі, період коливань 2.швидкість поширення, частота
3. частота, довжина хвилі 4. частота, період коливань

4. При переході монохроматичного променя світла з повітря в прозорий діелектрик з показником заломлення n, довжина хвилі

1. збільшується в n разів 2. зменшується в n разів
3. не змінюється. 4. збільшується в $\sqrt{n}$ разів

5. При відбиванні світла від середовища з меншою оптичною густиною ($n_1<n_2$) фаза коливання

1. змінюється на π 2. змінюється на $\pi/2$
3. не змінюється 4. змінюється на $\pi/4$

6. При відбиванні світла від середовища з більшою оптичною густиною ($n_1<n_2$) оптична довжина шляху променя

1. змінюється на $\lambda/2$ 2. змінюється на λ
3. не змінюється 4. змінюється на $\lambda/4$

7. Який закон геометричної оптики порушується при інтерференції?

1. закон прямолінійного розповсюдження світла;
2. закон незалежності світлових променів (принцип суперпозиції)
3. закон відбиття
4. закон заломлення

8. Світлові хвилі когерентні, якщо у них

1. співпадають амплітуди
2. співпадають частоти
3. постійний зсув фаз
4. співпадають частоти і різниця фаз є постійною

9. Часова когерентність

1. визначається радіусом когерентності
2. пов'язана зі степеню монохроматичності хвилі
3. пов'язана з довжиною хвилі світла
4. залежить від кутового розміру джерела світла

10. Просторова когерентність

1. визначається радіусом когерентності
2. пов'язана зі степеню монохроматичності хвилі
3. пов'язана з довжиною хвилі світла
4. залежить від кутового розміру джерела світла

11. Два джерела світла обов'язково когерентні, якщо

1. обидва точкові
2. є оптичними зображеннями одного джерела
3. мають однакові частоти коливань
4. випромінюють хвилі одного напрямку

12. Дві когерентні світлові хвилі однакової амплітуди збуджують у деякій точці простору коливання світлового вектору з різницею фаз, яка дорівнює $\delta\varphi = 4\pi$. Інтенсивність світла у цій точці дорівнюватиме:

1. $I = I_1 + I_2$ 2. $I = 4I_1$ 3. I=0 4. $I = \left(\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2}\right)^2$

13. Дві когерентні світлові хвилі однакової амплітуди збуджують у деякій точці простору коливання світлового вектору з різницею фаз, яка дорівнює $\delta\varphi = 5\pi$. Інтенсивність світла у цій точці дорівнюватиме:

1. $I = I_1 + I_2$ 2. $I = 4I_1$ 3. I=0 4. $I = \left(\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2}\right)^2$

14. Що буде спостерігатися у точці простору, якщо оптична різниця ходу когерентних променів, які дають інтерференційну картину в цій точці, дорівнюватиме $\frac{3\lambda}{2}$?

1. максимум інтенсивності 2. мінімум інтенсивності
3. інтенсивності променів додаються 4. інтенсивності променів віднімаються

15. При спостереженні інтерференційної картини від двох джерел світла відстань d між ними збільшили удвічі. Як це відобразиться на ширині інтерференційної смуги (відстані між двома сусідніми максимумами)?

1. збільшиться у 2 рази 2.не зміниться
3. збільшиться у 4 рази 4. зменшиться у 2 рази

16. При спостереженні інтерференційної картини від двох джерел світла відстань l до екрану збільшили удвічі. Ширина інтерференційної смуги (відстані між двома сусідніми максимумами) при цьому

1. збільшиться у 2 рази 2.не зміниться
3. збільшиться у 4 рази 4. зменшиться у 2 рази

17. Інтерференційна картина спостерігається у білому світлі. У який колір буде окрашений центральний максимум?

1. білий колір 2. червоний колір 3. зелений колір 4. фіолетовий колір

18. У досліді Юнга колір точкових джерел світла при незмінних інших умовах змінили з зеленого на червоний. Відстань між сусідніми інтерференційними смугами на екрані

1. не змінилася 2. зменшилися
3. збільшилася 4. відстань не залежить від довжини хвилі

19. Тонка паралельна пластинка освітлюється паралельним пучком білого світла. Ані для жодної довжини хвилі не виконується умова максимуму. У який колір буде окрашена плівка?

1. білий колір 2. темна 3. червоний колір 4. фіолетовий колір

20. Установка для спостереження кілець Ньютона освітлюється монохроматичним світлом. Повітряний простір між лінзою і скляною пластинкою заповнили водою (показник заломлення n=1,33). При цьому радіуси кілець Ньютона

1. не змінилися 2. збільшилися в 1,33 рази
3. зменшилися в $\sqrt{1{,}33}$ рази 4. зменшилися в 1,33 рази

21. Мильний пузир має зелений колір (540нм) в околі найближчої до спостерігача точці. Якщо показник заломлення мильної води n=1,35, то мінімальна товщина пузиря дорівнює 1. 0,1мкм 2. 0,25мкм 3. 0,5мкм 4. 1мкм

22. Якщо на шляху світлового променя помістити скляну пластинку товщиною 1см з показником заломлення 1,5, оптична довжина шляху променя збільшиться на

1. 0,5мм 2. 1мм 3. 5мм 4. 10мм

23. До явищ, в яких проявляється хвильова природа світла, належить

1. явище фотоефекту та дифракції 2. ефект Комптона та фотоефект
3. явище дифракції та інтерференції 4. явище інтерференції та фотоефекту

24. Який закон геометричної оптики, який порушується при дифракції світла?

1. закон прямолінійного розповсюдження світла
2. закон незалежності світлових променів (принцип суперпозиції)
3. закон відбиття
4. закон заломлення світла

25. Вірними є положення (указати всі можливі варіанти):

1. дифракція – це огинання хвилями перепон та проникнення світла в область геометричної тіні
2. дифракційна картина є результатом інтерференції хвиль від окремих ділянок відкритої частини фронту хвилі
3. метод зон Френеля суперечить прямолінійному розповсюдженню світла в однорідному середовищі
4. метод зон Френеля не суперечить прямолінійному розповсюдженню світла в однорідному середовищі

26. На світу СД - диск має райдужне забарвлення завдяки явищу

1.інтерференції світла 2.відбиття світла 3.дифракції світла 4 дисперсії світла

27. Хвилі, що прийшли у деяку точку простору від відповідних точок сусідніх зон Френеля мають різницю ходу

1. $\Delta = \lambda$ 2. $\Delta = \lambda/4$ 3. $\Delta = \lambda/2$ 4. $\Delta = 0$

28. Метод зон Френеля

1. підтверджує прямолінійність розповсюдження світла в однорідному середовищі
2. суперечить прямолінійному розповсюдженню світла в однорідному середовищі
3. дозволяє оцінити амплітуду коливань в будь-якій точці дифракційної картини
4. дозволяє оцінити амплітуду коливань в центрі дифракційної картини

29. Якщо на шляху сферичного фронту хвилі поставити екран з отвором, який залишає відкритою тільки одну центральну зону Френеля, амплітуда коливань в центрі екрана дорівнюватиме A_1. Амплітуда коливань A при повністю відкритому фронті хвилі дорівнює:

1. $A = A_1$ 2. $A = A_1/2$ 3. $A = 2A_1$ 4. $A = A_1/4$

30. Отвір залишає відкритими дві зони Френеля, амплітуди коливань яких в центрі екрана дорівнюють A_1 і A_2. Амплітуда коливань в центрі екрана дорівнює:

1. $A = 2A_1$ 2. $A = 2A_2$ 3. $A = A_1 + A_2$ 4. $A = 0$

31. Отвір залишає відкритими три зони Френеля, амплітуди коливань яких в центрі екрана дорівнюють A_1, A_2 і A_3. Амплітуда коливань в центрі екрана дорівнює:

1. $A = A_1 + A_2 + A_3$ 2. $A = A_1 + A_3$ 3. $A = \frac{A_1}{2} + \frac{A_3}{2}$ 4. $A = 0$

32. В центрі дифракційної картини буде спостерігатися світла пляма при дифракції Френеля на круглому отворі, якщо він залишає відкритими

1. дві зони Френеля 2. чотири зони Френеля
3. шість зон Френеля 4. три зони Френеля

33. Непрозорий диск закриває 4 зони Френеля. Максимум в центрі екрану визначається половиною … зони

1. другої 2. третьої 3. четвертої 4. п'ятої

34. Зображена на рисунку дифракційна картина може спостерігатися:

1. тільки за маленьким круглим екраном
2. тільки за маленьким круглим отвором
3. і за маленьким круглим екраном, і за маленьким круглим отвором
4. розмір отвору не впливає на картину, що спостерігається на екрані

35. На щілину нормально падає світло. Умову мінімуму при дифракції на щілині надає формула

1. $a\sin\varphi = \pm m\lambda$ 2. $d\sin\varphi = \pm m\lambda$ 3. $a\sin\varphi = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2}$ 4. $d\sin\varphi = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2}$

(a – ширина щілини; d – постійна (період) ґратки)

36. На щілину нормально падає світло. Максимумам на екрані відповідає співвідношення

1. $a\sin\varphi = \pm m\lambda$ 2. $d\sin\varphi = \pm m\lambda$ 3. $a\sin\varphi = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2}$ 4. $d\sin\varphi = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2}$

(*a* – ширина щілини; *d* – постійна (період) ґратки)

37. При нормальному падінні світла на дифракційну ґратку положення головних мінімумів на екрані надає формула

1. $a\sin\varphi = \pm m\lambda$ 2. $d\sin\varphi = \pm m\lambda$ 3. $a\sin\varphi = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2}$ 4. $d\sin\varphi = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2}$

38. Умову спостереження головних максимумів при нормальному падінні світла на дифракційну ґратку надає формула

1. $a\sin\varphi = \pm m\lambda$ 2. $d\sin\varphi = \pm m\lambda$ 3. $a\sin\varphi = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2}$ 4. $d\sin\varphi = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2}$

39. Масштаб дифракційної картини, отриманої за допомогою ґратки, при перекритті кожної другої щілини

1. не зміниться 2. збільшиться
3. зменшиться 4. не зміниться або збільшиться

40. На дифракційну ґратку падає нормально біле світло. В дифракційній картині, яка спостерігається, в спектрі одного порядку найбільш віддалені від центру смуги

1. червоного кольору 2. жовтого кольору
3. фіолетового кольору 4. блакитного кольору

41. На дифракційну ґратку падає нормально біле світло. В дифракційній картині, яка спостерігається, ближче до центру розташовані смуги

1. червоного кольору 2. зеленого кольору
3. фіолетового кольору 4. жовтого кольору

42. Дифракційна ґратка освітлюється білим світлом. Колір центрального максимуму при цьому

1. червоний 2. жовтий 3. фіолетовий 4. білий

43. Як зміниться дифракційна картина, що спостерігається на екрані, якщо щілину замінити дифракційною ґраткою? (Указати всі можливі варіанти).

1. зміниться умова головних мінімумів
2. зміниться умова головних максимумів
3. з'являться додаткові максимуми та мінімуми
4. інтенсивність головних максимумів збільшиться

44. Відношення роздільних здатностей дифракційної ґратки для спектрів третього та першого порядків дорівнює

1. $R_3/R_1 = 3$ 2. $R_3/R_1 = 1$ 3. $R_3/R_1 = 1/3$ 4. $R_3/R_1 = 6$

45. За допомогою рентгеноструктурного аналізу можна визначити

1. міжплощинні відстані 2. кут ковзання
3. довжину хвилі випромінювання 4. порядок спектру

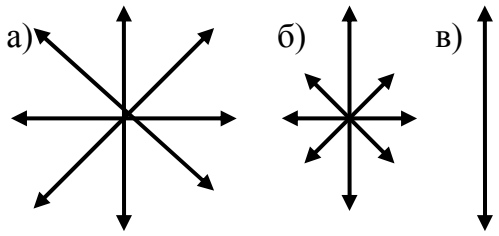
46. За допомогою рентгенівської спектроскопії можна визначити

1. міжплощинні відстані 2. кут ковзання
3. довжину хвилі випромінювання 4. порядок спектру

47. Поляризація світла доводить, що світло – це

1. повздовжня хвиля 2. поперечна хвиля
3. потік заряджених частинок 4. потік нейтральних частинок

48. **Установити співвідношення** між напрямом коливань вектора $\vec{E}$, який показаний на рисунку, та степеню поляризації світла



1. лінійно поляризоване світло
2. частково поляризоване світло
3. природне світло

Вибрати вірну відповідь:

49. Степінь поляризації P плоско поляризованого світла дорівнює

1. $P = 0$ 2. $P = 0,5$ 3. $P = 1,0$ 4. $P = \infty$

50. Степінь поляризації P природного світла дорівнює

1. $P = 0$ 2. $P = 0,5$ 3. $P = 1,0$ 4. $P = \infty$

51. Максимально, але не повністю поляризованим при падінні на межу поділу двох діелектриків під кутом Брюстера є промінь (промені)

1.падаючий 2. відбитий 3. заломлений 4. відбитий та заломлений

52. Повністю поляризованим при падінні на межу поділу двох діелектриків під кутом Брюстера є промінь (промені)

.падаючий 2. відбитий 3. заломлений 4. відбитий та заломлений

53. Кут повної поляризації (кут Брюстера) у випадку падіння променів на межу поділу двох середовищ буде найбільшим, якщо промені падають

1. з повітря на воду 2. з повітря на скло
3. з води на скло 4.зі скла на воду

Абсолютні показники заломлення дорівнюють: для повітря – 1; для води – 1,33; для скла – 1,5.

54. Промінь падає на межу поділу двох діелектриків під кутом Брюстера.

Якщо $i_Á$ – кут падіння; $i'_Á$ – кут відбиття; r – кут заломлення, вірним є співвідношення:

1. $i_Á + i'_Á = 90°$ 2. $r + i_Á = 90°$ 3. $i_Á + i'_Á = 180°$ 4. $i_Á + i'_Á + r = 90°$

55.Явище подвійного променезаломлення виникає у кристалі, якщо він є

1. однорідним 2. ізотропним 3. анізотропним 4. прозорим

56. Промінь природного світла інтенсивністю I_0 проходить крізь поляризатор і аналізатор, осі яких є А) паралельними; Б) схрещеними. Інтенсивність I світла, яке вийшло з аналізатора, дорівнюватиме

1. $I = I_0$ 2. $I = 0,5I_0$ 3. $I = 0$ 4. $I = 2I_0$

(утратами на відбиття та поглинання знехтувати)

57. Поляризатор і аналізатор розташовано під кутом α=45°. На поляризатор падає промінь природного світла інтенсивністю I_0. Після проходження крізь систему інтенсивність дорівнюватиме:

1. $I=I_0$ 2. $I=1/2I_0$ 3. $I=1/4I_0$ 4. $I=1/8I_0$

(утратами на відбиття та поглинання знехтувати)

58. Поляризатор і аналізатор розташовано під кутом α=60° ($\cos 60^0 = 1/2$). На поляризатор падає промінь природного світла інтенсивністю I_0. Після проходження крізь систему інтенсивність дорівнюватиме:

1. $I=I_0$ 2. $I=1/2I_0$ 3. $I=1/4I_0$ 4. $I=1/8I_0$

(утратами на відбиття та поглинання знехтувати)

59. Основною властивістю оптично активних речовин є

1. відбиття 2. заломлення
3. поворот площини поляризації 4. подвійного променезаломлення

60. Між схрещеними поляризаторами розташовано оптично активну речовину. На який кут повинна ця речовина повернути площу поляризації, щоб

А) інтенсивність світла на виході збільшилась до максимальної?
Б) картина на виході не змінилася?
В) система не пропускала світло?

1. 45° 2. 60° 3. 90° 4. 180°

61. Максимальна інтенсивність світла, що пройшов крізь два поляризатора спостерігається, якщо кут між площинами поляризаторів дорівнює

1. 0° 2. 30° 3. 45° 4. 90°

62. Штучну анізотропію в оптично ізотропній речовині може викликати

1. стиск або розтяг 2. магнітне поле
3. електричне поле 4. усе, вище перелічене

63. Для отримання анізотропії використовують поляризацію діелектрика в

1. поляризаторі 2. пристрої на основі ефекту Коттона – Мутона
3. поляризаторі та аналізаторі 4. пристрої на основі ефекту Керра

64. Інтенсивність світла в залежності від шляху в речовині:

1. зменшується за експоненціальним законом
2. прямо пропорційно зростає
3. обернено пропорційно зменшується
4. не змінюється.

65. Найбільший коефіцієнт заломлення для скла має

1. промінь зеленого світла 2. промінь червоного світла
3. промінь жовтого світла 4. промінь фіолетового світла

66. Квантову структуру світла підтверджують явища

1. інтерференції і поляризації 2. фотоефекту і ефекту Комптона;
3. дифракції і поляризації 4. дисперсії і інтерференції

67. При зменшенні температури абсолютно чорного тіла у два рази випромінювальна здатність R_e (інтегральна енергетична світність) його теплового випромінювання

1. зменшується у 2 рази 2. збільшується у 4 рази
3. збільшується у 8 разів 4.зменшується у 16 разів

68. У спектрі випромінювання абсолютно чорного тіла максимум випромінюваної енергії змістився з червоної (λ_1=780 нм) до фіолетової (λ_2=390 нм) границі видимого спектра. Термодинамічна температура тіла

1. зменшилась удвічі 2. збільшилась удвічі
3. не змінилася 4. збільшилась у 4 рази

69. Випромінювальна здатність R_e (енергетична світність) абсолютно чорного тіла залежить від:

1. температури 2. площини випромінюючої поверхні
3. часу випромінювання. 4. довжини хвилі

70. При температурі Т максимум спектральної випромінювальної здатності абсолютно чорного тіла відповідає довжині хвилі λ_{m1}. При зростанні температури у 2 рази, довжина хвилі, що відповідає максимуму:

1. зменшиться у 2 рази 2. збільшиться у 2 рази
3. збільшиться у 4 рази 4. не зміниться

71. А) Найнижчу; Б) Найвищу температуру мають зірки, колір яких

1. червоний 2. жовтий 3. оранжевий 4.блакитний.

72. Струм насичення при зовнішньому фотоефекті залежить від:

1. довжини хвилі освітлювальних променів
2. частоти освітлювальних променів
3. інтенсивності освітлювальних променів.
4. усіх указаних величин

73. Робота виходу електронів з вольфраму, срібла, натрію і калію дорівнює відповідно 4,5 еВ; 4,7 еВ; 2,3 еВ; 2,0 еВ. При однаковій частоті світла найбільше значення максимальної кінетичної енергії будуть мати фотоелектрони, що вилетіли з

1. вольфраму 2. срібла 3. натрію 4. калію

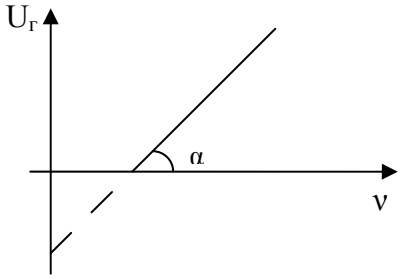
74. Робота виходу електронів із літію, натрію, калію і цезію дорівнює відповідно 2,4еВ; 2,3еВ; 2,0еВ і 1,9еВ. Частота хвилі, що відповідає „червоній межі" фотоефекту має найменше значення для

1. літію 2. натрію 3. калію 4. цезію

75. Червона границя зовнішнього фотоефекту залежить від

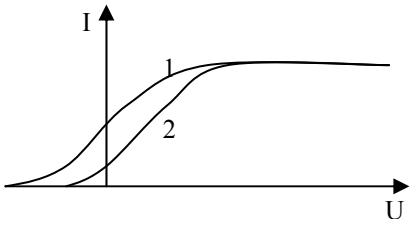
1. частоти світла 2.природи речовини
3. довжини хвилі променів 4. інтенсивності світла

76. На рисунку приведена залежність гальмівної напруги від частоти світла, що отримана для деякого металу при дослідженні фотоефекту. При аналогічних дослідженнях на іншому металі нахил прямої:



1. зменшиться
2. збільшиться
3. нахил прямої не залежить від природи металу)
4. збільшиться або зменшиться (в залежності від природи металу)

77. На рисунку представлені дві вольт-амперні характеристики фотоелементу, які отримані при освітленні його світлом різної частоти. Меншій частоті хвилі відповідає



1.крива 1
2.крива 2
3.хід кривих не залежить від частоти променів
4.хід кривих не залежить від довжини хвилі променів

78. Кінетична енергія фотоелектронів при зовнішньому фотоефекті на деякій речовині залежить від

1. частоти освітлювальних променів
2. величини світлового потоку
3. роботи виходу електрона
4. природи речовини, для якої спостерігається фотоефект

79. А) Найменшу масу

Б) Найбільшу масу має квант світла:

1. фіолетового кольору (λ=0,35мкм) 2. зеленого кольору (λ=0,5мкм)
3. червоного кольору (λ=0,7мкм) 4. жовтого кольору (λ=0,6мкм)

80. Енергія кванта фіолетового світла (λ=0,35 мкм) порівняно з енергією кванта червоного світла (λ=0,7 мкм):

1. вдвічі менша 2. вдвічі більша 3. така сама 4. більша у 4 рази

81. При комптонівському розсіюванні рентгенівських променів зміна довжини хвилі $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ залежить від

1. кута розсіювання
2. довжини хвилі
3. атомного номеру речовини, на який відбувається розсіювання
4. маси атому речовини, на який відбувається розсіювання

82. Зміну довжини хвилі при комптонівському розсіюванні рентгенівських променів на речовині є результатом

1. електромагнітної взаємодії
2. гравітаційної взаємодії
3.непружної взаємодії рентгенівського кванту з валентним електроном
4. пружної взаємодії рентгенівського кванту з валентним електроном

83. При комптонівському розсіюванні рентгенівських променів інтенсивність зміщеної компоненти (λ) порівняно з незміщеною компонентою (λ_0) зі збільшенням атомного номера розсіювача

1. збільшується 2. зменшується
3. не змінюється 4. не залежить від атомного номера

90. При комптонівському розсіюванні рентгенівських променів інтенсивність зміщеної компоненти (λ) порівняно з незміщеною компонентою (λ_0) зі збільшенням кута розсіювання

1. збільшується 2. зменшується
3. не змінюється 4. не залежить від кута розсіювання

91. Світло з деякою об'ємною густиною енергії падає на поверхні з різними коефіцієнтами відбиття ρ_1 і ρ_2, причому $\rho_2 > \rho_1$. Меншим є тиск світла

1. на першу поверхню 2. на другу поверхню
3. тиск однаковий 4. значення коефіцієнту не вплине не тиск

92. При ефекті Комптона кінетична енергія електронів віддачі буде найбільшою при куті розсіяння рентгенівських фотонів, який дорівнює

1. $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 2. $\varphi=0$ 3. $\varphi = \frac{\pi}{4}$ 4. $\varphi = \pi$

93. При ефекті Комптона зміна довжини хвилі $\Delta\lambda$ буде найбільшою при куті розсіювання рентгенівських квантів

1. $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 2. $\varphi=0$ 3. $\varphi = \frac{\pi}{4}$ 4. $\varphi = \pi$

94. При однаковій інтенсивності світла більшого тиску з боку світла зазнає поверхня:

1. сіра 2. чорна 3. дзеркальна 4. тиск однаковий

Частина V. ЕЛЕМЕНТИ КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ, АТОМНОЇ ТА ЯДЕРНОЇ ФІЗИКИ

Розділ 19. Елементи квантової механіки та атомної фізики

Тема: Корпускулярно-хвильовий дуалізм. Хвилі де Бройля. Ймовірнісна інтерпретація квантових явищ. Співвідношення невизначеностей.

Квантовий стан. Хвильова функція. Принцип суперпозиції. Рівняння Шредінгера.

Одновимірні задачі. Частинка в нескінченній потенціальній ямі. Проходження частинки крізь потенціальний бар'єр. Гармонічний осцилятор.

Атом гідрогену. Спектри. Принцип Паулі. Електронні оболонки.

Основні поняття і формули

Корпускулярно-хвильовий дуалізм. Хвилі де Бройля. Співвідношення невизначеностей.

● **Гіпотеза де Бройля:** будь-якій частинці речовини масою m, яка рухається зі швидкістю v, можна зіставити хвильовий процес, для якого енергія і імпульс збігаються з тими значеннями енергії та імпульсу частинки, які визначаються за теорією відносності. Тобто, рухомій частинці відповідає певна частота та довжина хвилі.

Зв'язок довжини хвилі де Бройля λ частинки з її імпульсом p визначається формулою де Бройля::

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{h}{mv}, \qquad (19.1)$$

де p – імпульс фотона; m – маса частинки; v – її швидкість; h – стала Планка; $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ Äæ · ñ.

● Своєрідність властивостей мікрочастинок проявляється в тому, що не для всіх змінних при вимірюваннях можна отримати точні значення. Існують пари величин, які не можуть одночасно бути виміряними точно.

Найбільш важливими є два співвідношення невизначеностей.

Співвідношення невизначеностей Гейзенберга для координат та імпульсів:

$$|\Delta x| \cdot |\Delta p_x| \geq \hbar, \qquad (19.2)$$

де Δx – невизначеність координати x_i; Δp_x – невизначеність відповідної їй проекції імпульсу.

Співвідношення невизначеностей для енергії та часу:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar, \qquad (19.3)$$

де ΔE – невизначеність енергії квантового стану; Δt – час життя системи у цьому стані.

● Стан мікрочастинки характеризує комплексна функція координат і часу $\Psi(\vec{r},t)$, яка має назву хвильової функції (Ψ-функції). Фізичний зміст хвильової функції:

Квадрат модуля хвильової функції $|\Psi(\vec{r},t)|^2$ для будь-якої точки простору, помножений на елементарний об'єм dV, який включає цю точку, визначає ймовірність знаходження частинки в межах цього об'єму:

$$dP = |\Psi|^2 dV = \Psi\Psi^* dV, \qquad (19.4)$$

де $|\Psi|^2$ має зміст густини ймовірності; Ψ^* – функція, комплексно спряжена з Ψ.

Властивості хвильової функції (випливають з її фізичного змісту):

- однозначна
- неперервна
- плавна (похідна не має розривів)
- кінцева
- задовольняє умові нормування: $\int\limits_V |\Psi|^2 dV = 1$. (19.5)

● Основне рівняння нерелятивістської квантової механіки для хвильової функції – **рівняння Шредінгера**.

У випадку **стаціонарних станів**, тобто станів, у яких усі фізичні параметри, що спостерігаються, не змінюються з часом, хвильову функцію можна представити у вигляді:

$$\Psi(\vec{r},t) = \psi(\vec{r})e^{-i\omega t}, \qquad (19.6)$$

де частота ω є незмінною, а функція $\psi(\vec{r})$ не залежить від часу. $\psi(\vec{r})$ може бути визначена з рівняння Шредінгера для стаціонарних станів

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0, \qquad (19.7)$$

де Δ – оператор Лапласа ($\Delta\psi = \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{d^2\psi}{dy^2} + \frac{d^2\psi}{dz^2}$), m – маса частинки, E – її енергія, $U(\vec{r})$ – функція, яка у випадку стаціонарних станів має зміст потенціальної енергії частинки.

Енергія частинки E входить у рівняння у якості параметру. У теорії диференціальних рівнянь доказано, що рівняння типу (5.7) має розв'язки, які задовольняють вище зазначеним стандартним умовам лише при видраних значеннях параметру **E**. Ці вибрані значення **E** називають **власними значеннями енергії** , а розв'язки (значення хвильової функції), що ним відповідають – власними хвильовими функціями. Сукупність власних значень утворює **спектр величини** (у даному випадку – енергії).

Якщо сукупність утворює дискретну послідовність, **спектр** називають **дискретним**, якщо – неперервну послідовність, спектр – **неперервний** або **суцільний.**

Таким чином, з основних положень квантової механіки випливає квантування (дискретність) енергії.

●Атом гідрогену. Спектри. Електронні оболонки.

● Основною властивістю квантових систем є те, що вони мають дискретну структуру енергетичного спектру. У спектрі найменший рівень зветься основним, а всі інші – збудженими.

При переході квантової системи з одного стаціонарного стану в інший випромінюється (поглинається) квант енергії, яка дорівнює різниці енергій відповідних стаціонарних станів:

$$h\nu = E_n - E_k, \qquad (19.8)$$

(E_n та E_k - енергії стаціонарних станів атому до та після випромінювання (поглинання)).

Спектри випромінювання атомів хімічних елементів, що знаходяться у газоподібному стані (гази, пари металів), мають лінійчатий характер. Найбільш простий і досліджений спектр має атом гідрогену. Довжини хвиль його спектральних ліній можуть бути обчислені за формулою Бальмера – Ритца (узагальненою формулою Бальмера):

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right). \qquad (19.9)$$

Константа $R = 1{,}097 \cdot 10^7 ì^{-1}$ має назву сталої Ридберга; λ – довжина хвилі спектральної лінії; n – номер енергетичного рівня атома, на який переходить електрон при випромінюванні; k – номер рівня, з якого відбувається перехід.

Серія ліній утворюється при переходах електронів на енергетичний рівень із фіксованим значенням n з усіх вищих рівнів $(k > n)$. Перша лінія кожної серії відповідає мінімальному значенню k та має максимальну довжину хвилі. Границі кожної серії відповідає $k = \infty$.

Серіальна формула для довжин хвиль ліній спектру воднеподібних іонів

$$\frac{1}{\lambda} = Z^2 R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right), \qquad (19.9a)$$

де Z – номер елемента в періодичній таблиці елементів Менделєєва.

Повна енергія електрона в атомі гідрогену або гідрогеноподібному атомі (атомі із зарядовим числом Z, внаслідок іонізації якого в електронній оболонці залишився тільки один електрон):

$$E_n = -\frac{Z^2me^4}{8\varepsilon_0^2h^2}\cdot\frac{1}{n^2}\ , \qquad n = 1,2,3,\ldots \qquad (19.10)$$

З формули випливає, що електрон у атомі може мати тільки ті дискретні значення енергії, що визначаються квантовим числом n, яке називають головним квантовим числом.

Випромінюваний квант енергії дорівнює

$$h\nu = E_n - E_k = \frac{Z^2me^4}{8\varepsilon_0{}^2h^2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right),\ n > k. \qquad (19.11)$$

k та n – номери орбіт (тобто квантових рівнів енергії), між якими відбувається перехід електрона.

Ураховуючи зв'язок між частотою і довжиною хвилі $\nu = \frac{c}{\lambda}$ ($c = 3\cdot10^8$ м/с – швидкість світла у вакуумі), для атома гідрогену $(Z=1)$ або гідрогеноподібного атома $(Z>1)$ формулу (5.11) можна переписати у вигляді:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{Z^2me^4}{8\varepsilon_0^2h^3c}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right). \qquad (19.12)$$

З порівняння формули (5.0) при $Z=1$ із формулою (5.12) випливає, що останній вираз є аналогічним узагальненій формулі Бальмера, а стала Рідберга дорівнює

$$R = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2h^3c}. \qquad (19.13)$$

Енергія кванту, що випромінюється атомом гідрогену при переході електрону з однієї орбіти на другу, можна представити у вигляді

$$\varepsilon = E_i\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right), \qquad (19.14)$$

де $E_i = 13{,}6$ еВ – енергія іонізації атома водню.

● Частоти характеристичного рентгенівського випромінювання визначаються законом Мозлі:

$$\sqrt{\nu} = a(Z - b), \qquad (19.15)$$

де

$$a = \sqrt{Rc\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right)}, \qquad (19.16)$$

b – стала екранування, яка сильно залежить від серії (числа n) і слабо – від лінії даної серії (числа k);

Z – порядковий номер елемента (заряд ядра в одиницях елементарного заряду);

R – стала Рідберга.

Відповідно довжина хвилі характеристичного рентгенівського випромінювання може бути визначена за формулою Мозлі:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(Z - b\right)^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right). \qquad (19.17)$$

Короткохвильова границя λ_{min} суцільного рентгенівського спектру (гальмівне випромінювання) визначається формулою

$$\lambda_{min} = \frac{hc}{eU}, \qquad (19.18)$$

де e – заряд електрона; U – різниця потенціалів, яка прикладена до трубки.

● Розглянемо фізичні властивості квантових систем. Квантовий стан характеризується дискретними значеннями таких основних фізичних величин, як енергія, момент імпульсу і т. ін.

Квантовий стан електрону в атомі залежить від відстані до ядра r і характеризується чотирма квантовими числами :

n – головне квантове число, визначає енергію E_n електрона в атомі, n=1,2,3,…;

l – орбітальне квантове число, визначає механічний орбітальний момент імпульсу електрона L:

$$L = \hbar\sqrt{l(l+1)}. \qquad (19.19)$$

При заданому головному квантовому числі n приймає значення: l = 0, 1,…, n – 1;

m_l – магнітне квантове число, визначає проекцію моменту імпульсу на фізично виділений напрямок:

$$L_z = \hbar m. \qquad (19.20)$$

При заданому квантовому числі l приймає значення: $m_l = -l, -l+1, \ldots, -1, 0, +1, \ldots, l-1, l$.

m_s – магнітне спінове квантове число, визначає проекцію спінового моменту імпульсу електрона на фізично виділений напрямок:

$$L_{sz} = \hbar m_s. \qquad (19.21)$$

Для електрона (а також протона і нейтрона) спінове квантове число s = ½, а m_s може приймати значення: $m_s = \pm\frac{1}{2}$.

Розподіл електронів в атомі за стаціонарними станами відбувається згідно з принципом Паулі, за яким в атомі не може бути двох електронів, які знаходяться у двох однакових стаціонарних станах, що визначаються однаковим набором чотирьох квантових чисел: n, l, m_l, m_s.

Методичні вказівки.

1. У багатьох задачах даної теми розглядаються спектри атомів гідрогену та гідрогеноподібних іонів (тобто іонів, які мають тільки один електрон: He^{+}, Li^{++} і т. ін.). Для того, щоб визначити довжину хвилі, частоту або енергію поглинутих або випромінених атомами квантів енергії за формулами (19.9а) – (19.14) необхідно, перш за все, за умовою задачі визначити числа n та k, які входять до цих формул. Так для гідрогену числу n=1 відповідає ультрафіолетова серія (серія Лаймана), n=2 – видима серія (серія Бальмера), n=3 – перша інфрачервона серія (серія Пашена), n=4 – друга інфрачервона серія (серія Брекета), n=5 – третя інфрачервона серія (серія Пфунда). Число k можна представити у вигляді $k = n + N$, де N – номер спектральної лінії в серії, взятий у порядку зменшення довжини хвилі. Наприклад, для третьої лінії в серії Бальмера n =2, k = 2+3 =5.

2. При обчисленні частоти характеристичних рентгенівських променів за законом Мозлі слід мати на увазі, що спектральні серії позначають так само, як електронні шари, перехід електронів на кожний з яких викликає дане випромінювання. Наприклад L-серія обумовлена переходом електронів на L-шар. При тому серіям (електронним шарам) K, L, M, N у формулі (19.16) відповідають квантові числа n, які дорівнюють 1,2,3,4. Число k, як і при визначенні спектру атома водню, визначається за формулою $k = n + N$, де N – номер спектральної лінії в даній серії. Лінії серії записують у порядку зменшення довжин хвиль за допомогою індексів α, β, γ, … Наприклад, друга лінія L-серії записується у вигляді L_α; у цьому випадку n = 2, k = 2+2 =4.

Стала екранування b = 1 для лінії K_α і b > 1 для інших ліній цієї серії. При наближених розрахунках величину b вважають однаковою для всіх ліній серії. $b \approx 1$ для серії K і $b \approx 7,5$ для серії L.

3. При розв'язуванні задач про хвильові властивості частинок необхідно розрізняти випадки класичних і релятивістських частинок. (див. методичні вказівки до розділу 18, а також формули (16.75) – (16.80). Притому, у всіх випадках руху електронів в атомах релятивістськими ефектами можна знехтувати, оскільки кінетична енергія електрона у цьому випадку не перевищує декількох електрон-вольт.

За допомогою співвідношень невизначеностей (19.2) можна розв'язувати задачі двох типів:

а) визначення найменшого значення однієї з двох невизначеностей $\Delta x, \Delta p_x$ при заданому значенні другої. У цьому випадку у формулі (19.2) користуються знаком рівності;

б) визначення найменшого значення самих величин, а саме, лінійних розмірів області L, в якій знаходиться частинка або найменшого значення її імпульсу p (або зв'язаного з ним значення кінетичної енергії).

У цьому випадку вважають, що шукана величина не може бути меншою за найменшу невизначеність при її вимірюванні, тобто у якості мінімальних значень величини використовують їх мінімальну невизначеність: $L_{min} \approx \Delta x_{min}$, а $p_{min} \approx \Delta p_{min}$.

У правій частині формул (19.2), (19.3), які надають співвідношення невизначеностей, в залежності від уявного експерименту, на аналізі якого записане співвідношення, замість $\hbar$ може використовуватись h або $\hbar/2$, що не впливає на порядок величин, які визначаються за допомогою цих формул.

4. Визначення хвильової функції мікрочастинок пов'язано з розв'язанням рівняння Шредінгера для стаціонарних станів (19.7), яке залежить від функції $U(x, y, z)$. Для уникнення математичних труднощів, які виникають при розв'язуванні рівняння у загальному випадку, в курсі загальної фізики, за звичаєм розглядають одновимірні задачі, коли $U = U(x)$ та стрибкоподібно змінюється на границях обмеженій області простору, в якій знаходиться частинка.

Розв'язки диференціальних рівнянь другого порядку з постійними коефіцієнтами, до яких відноситься рівняння Шредінгера, містять сталі, для визначення яких використовують властивості хвильової функції – її неперервність та плавність (неперервність її першої похідної. Крім того, хвильова функція повинна задовольняти умові нормування (19.5), яке для одновимірного випадку має вигляд: $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$.

Приклади розв'язання задач

Приклад 19.1. Визначити енергію фотона, який випромінюється при переході електрона в атомі гідрогену з третього енергетичного рівня на перший.

k = 3
n = 1
E - ?

Розв'язання.

Енергія фотона, який випромінюється при переході електрона в атомі гідрогену з одного енергетичного рівня на інший визначається різницею енергій стаціонарних станів електрона до (E_k) та після переходу (E_n):

$$h\nu = E_k - E_n \qquad (1)$$

За борівською моделлю, ядро атома нерухоме, тому повна енергія електрона є сумою кінетичної енергії обертання електрона T і потенціальної U енергії взаємодії електрона з ядром

$$E = T + U,$$

$$T=\frac{mv^2}{2}=\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_n}; \qquad U=-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n};$$

Тоді
$$E=-\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_n} \quad . \tag{2}$$

Визначимо значення E на довільному енергетичному рівні. Для цього в рівняння (2) підставимо вираз для значення радіуса електронної орбіти r_n

$$r_n=n^2\frac{h^2\varepsilon_0}{\pi m_e e^2},$$

де r_n – радіус n-ї орбіти, m_e – маса електрона, e – заряд електрона, $\varepsilon_0=8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м – електрична стала, n – порядковий номер орбіти, $h=6{,}63\cdot10^{-34}$ Дж·с – стала Планка.

Одержуємо

$$E=-\frac{1}{n^2}\frac{me^4}{8h^2\varepsilon_0^2} \quad . \tag{3}$$

Тоді енергія випроміненого фотона

$$E=E_k-E_n=-\frac{1}{k^2}\frac{me^4}{8h^2\varepsilon_0^2}+\frac{1}{n^2}\frac{me^4}{8h^2\varepsilon_0^2}=-\frac{me^4}{8h^2\varepsilon_0^2}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{k^2}\right). \tag{4}$$

Із формул (1) та (4) випливає, що енергії повної іонізації атома гідрогену відповідає вираз

$$E_0=h\nu=-\frac{me^4}{8h^2\varepsilon_0^2}\left(\frac{1}{\infty}-\frac{1}{1^2}\right)=\frac{me^4}{8h^2\varepsilon_0^2} \quad , \tag{5}$$

Тоді
$$E=E_0\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{k^2}\right), \tag{6}$$

де $E_0=2{,}18\cdot10^{-18}$ Дж = 13,6 еВ – енергія повної іонізації атома гідрогену

Підставив числові значення, дістанемо

$$E=2{,}18\cdot10^{-18}\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{3^2}\right)=1{,}94\cdot10^{-18}\,(\text{Дж})$$

Відповідь: $E=1{,}94\cdot10^{-18}$ Дж = 12,12еВ.

Приклад 19.2. Визначити частоту світла, яке випромінюється атомом гідрогену, при переході електрона на енергетичний рівень з головним квантовим числом n=2, якщо радіус орбіти електрона після переходу змінився у 9 разів.

$n=2$ $\frac{r_n}{r_k}=\frac{1}{9}$	Розв’язання. Частота фотона, що випромінюється атомом гідрогену при переході з однієї орбіти на іншу, дорівнює
ν - ?	$$\nu=R_1\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{k^2}\right), \tag{1}$$ де $R_1=Rc=3{,}29\cdot10^{15}$ Гц – стала Рідберга, n – номер орбіти, на

яку переходить електрон, k –номер орбіти, з якої переходить електрон.

Боровські радіуси орбіт визначаються за формулою

$$r_n = n^2 \frac{h^2 \varepsilon_0}{\pi m_e e^2}, \qquad (2)$$

звідки випливає, що радіуси орбіт електрона в атомі гідрогену пропорційні n^2. Тоді

$$\frac{n^2}{k^2} = \frac{r_n}{r_k} = \frac{1}{9}$$

З урахуванням (1) одержуємо

$$\nu = \frac{1}{n^2}\left(1 - \frac{n^2}{k^2}\right).$$

Підставив числові значення, дістанемо

$$\nu = 3{,}29 \cdot 10^{15} \tilde{n}^{-1}\left(1 - \frac{1}{9}\right)\frac{1}{4} = 0{,}73 \cdot 10^{15}\left(c^{-1}\right)$$

Відповідь: $\nu = 0{,}73 \cdot 10^{15}$ Гц.

Приклад 19.3. Визначити мінімальну частоту фотону, який може бути поглиненим атомом гідрогену, що знаходиться в основному стані.

Розв’язання.

Поглинаючи фотон, атом гідрогену переходить з основного стану з енергією E_1 у збуджений стан з енергією E_n. Згідно другому постулату Бора, енергія поглиненого фотона дорівнює

$$h\nu = E_n - E_1$$

Частота фотону буде мінімальною, якщо атом перейде в перше збуджений стан з енергією E_2, тобто

$$h\nu_{min} = E_2 - E_1.$$

Енергія атома водню

$$E_n = -\frac{1}{n^2}\frac{me^4}{8h^2\varepsilon_0^2}$$

Звідки, за Бором,

$$\nu_{min} = -\frac{me^4}{8h^3\varepsilon_0^2}\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right)$$

підставляючи числові значення, отримаємо:

$$\nu_{min} = \frac{3}{4} \cdot \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}(1{,}6)^4(10^{-19})^4}{8(6{,}6)^3(10^{-34})^3(6{,}85)^2(10^{-12})^2} = 2{,}45 \cdot 10^{15}$$

$$[\nu] = \frac{кг \cdot Кл^4 \cdot м^2}{Дж^3 \cdot с^2 \cdot Ф^2} = \frac{кг \cdot м^2}{с^2 \cdot с \cdot В \cdot Кл} = \frac{1}{с}.$$

Відповідь: $\nu_{min} = 2{,}45 \cdot 10^{15} c^{-1}$.

Приклад 19.4. Визначити потенціал іонізації атома гідрогену.

Розв'язання.

Потенціал іонізації *Ui* атома визначається рівнянням

$$eU_i = A_i \qquad (1)$$

де A_i – робота видалення електрона з орбіти під номером і на нескінченність. Для атома гідрогену, який знаходиться в основному стані $(k = 1)$. На підставі закону збереження енергії, дискретні значення якої визначаються формулою

$$E = E_n = -\frac{m}{2}\left(\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 h}\right)^2 \frac{1}{n^2}\ ,\ n = 1,2,3...,$$

ця робота дорівнює

$$A_i = E_\infty - E_1 = \frac{m}{2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar}\right)^2 \qquad (2)$$

Із (1) та (2) випливає

$$U_1 = \frac{m}{2}\frac{e^3}{(4\pi\varepsilon_0\hbar)^2}$$

$$U_i = \frac{1,6735\cdot 10^{-27}}{2}\cdot\frac{(1,6\cdot 10^{-19})^3}{(4\cdot 3,14\cdot 8,85\cdot 10^{-12})^2}\cdot\frac{1}{(1,05\cdot 10^{-34})^2} = 13,6(\text{В})$$

Відповідь: $U_i = 13,6\,\text{В}$.

Приклад 19.5. Визначити борівській радіус другої орбіти атома гідрогену та швидкість електрона на цій орбіті.

n = 2	Розв'язання.
r_2, v_2 - ?	Згідно борівській теорії електрон обертається навколо нерухомого ядра і радіус електронної орбіти та швидкість електрона на цій орбіті пов'язані співвідношенням

$$m_e v_n r_n = \frac{nh}{2\pi}, \qquad (1)$$

де r_n – радіус n-ї орбіти, v_n – швидкість електрона на цій орбіті, m_e – маса електрона, $m_e v_n r_n$ – момент імпульсу електрона на цій орбіті, n – головне квантове число, $h=6,63\cdot 10^{-34}$ Дж·с – стала Планка.

Сила взаємодії між електричними зарядами ядра і електрона надає електрону доцентрового прискорення. За другим законом Ньютона

$$\frac{m_e v_n^2}{r_n} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2}\ . \qquad (2)$$

Сумісно розв'язав рівняння (1) і (2) відносно r_n, отримаємо

$$r_n = n^2 \frac{h^2 \varepsilon_0}{\pi m_e e^2}, \qquad (3)$$

Підставив числові значення, дістанемо

$$r_2 = 2^2 \cdot \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \left(6{,}63 \cdot 10^{-34}\right)^2}{3{,}14 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot \left(1{,}6 \cdot 10^{-19}\right)} = 2{,}13 \cdot 10^{-10} \text{ м.}$$

Перевіряємо одиницю вимірювання:

$$[r] = \frac{(\text{Дж} \cdot \text{с})^2 \cdot \Phi \cdot \text{м}^{-1}}{\text{кг} \cdot \text{Кл}^2} = \frac{\text{Дж}^2 \cdot \text{с}^2 \cdot \text{Кл}}{\text{кг} \cdot \text{Кл}^2 \cdot \text{В} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Дж} \cdot \text{с}^2}{\text{кг} \cdot \text{м}} = \text{м}.$$

Із рівняння (1) одержуємо вираз для швидкості електрона на n-ій орбіті

$$v_n = \frac{nh}{2\pi m_e r_n} = \frac{e^2}{2nh\varepsilon_0}. \qquad (4)$$

Перевіряємо одиницю вимірювання

$$[v] = \frac{\text{Кл}^2}{\text{Дж} \cdot \text{с} \cdot \Phi \cdot \text{м}^{-1}} = \frac{\text{Кл}^2}{\text{Дж} \cdot \text{с} \cdot \text{Кл} \cdot \text{В}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Зробивши обчислення, отримуємо значення швидкості електрона на другій орбіті:

$$v_2 = \frac{\left(1{,}6 \cdot 10^{-19}\right)^2}{2 \cdot 2 \cdot 6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} = 1{,}09 \cdot 10^6 \text{ м/с}$$

Відповідь: $v_2 = 1{,}09$ Мм/с

Приклад 19.6. Знайти довжину хвилі де Бройля електрона, який має кінетичну енергію T = 5МеВ.

T = 5МеВ E_0 = 0,51МеВ	Розв'язання Довжина хвилі де Бройля частинки з імпульсом p надається формулою (19.1):
p; λ - ?	$\lambda = \frac{h}{p}$.

Таким чином, для розв'язання задачі треба знайти зв'язок між релятивістським імпульсом (бо кінетична енергія електрона за умовою задачі більше, ніж енергія спокою, яка дорівнює 0,51МеВ) електрона та його кінетичною енергією.

Релятивістський імпульс пов'язаний з повною енергією частинки E формулою:

$$E = c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}, \text{ звідси } p = \frac{1}{c}\sqrt{E^2 - E_0^2} = \frac{1}{c}\sqrt{T(T + 2E_0)},$$

де було враховано, що $E - E_0 = T$ та $E + E_0 = T + 2E_0$.

Для чисельних розрахунків енергію треба виразити у джоулях:

$E_к$ = 5МеВ = $5 \cdot 10^6 \cdot 1{,}60 \cdot 10^{-19}$Дж = $8{,}00 \cdot 10^{-13}$Дж;

E_0 = 0,51МеВ = $0{,}82 \cdot 10^{-13}$Дж.

Тоді отримуємо для імпульсу

$$p=\frac{\sqrt{8,00\cdot10^{-13}\left(8,00\cdot10^{-13}+2\cdot0,82\cdot10^{-13}\right)}}{3\cdot10^{8}}=2,93\cdot10^{-21}\,(\text{кг}\cdot\text{м/с}),$$

а для довжини хвилі де Бройля $\lambda=\frac{6,63\cdot10^{-34}}{2,93\cdot10^{-21}}=2,26\cdot10^{-13}$

Відповідь: p = $2,93\cdot10^{-21}$кг·м/с; λ = 22,6 пм.

Приклад 19.7. Кінетична енергія електрона 1,02МеВ. У скільки разів зміниться довжина хвилі де Бройля, якщо кінетична енергія електрона зменшується удвічі.

T_1=1,02МеВ $\frac{Ò_1}{T_2}=2$	Розв'язання $\lambda=\frac{h}{p}$; $p=\frac{1}{c}\sqrt{T(T+2E_0)}$; $E_0=m_0c^2=0,511$МеВ;
λ_2/λ_1 - ?	$p_1=\frac{1}{c}\sqrt{T_1(T_1+2E_0)}$; $p_2=\frac{1}{c}\sqrt{T_2(T_2+2E_0)}$;

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{p_1}{p_2}=\sqrt{\frac{T_1(T_1+2E_0)}{T_2(T_2+2E_0)}}=\sqrt{\frac{T_1}{T_2}\cdot\frac{T_1+2E_0}{T_2+2E_0}}=\sqrt{2\cdot\frac{2(T_1+2E_0)}{(T_1+4E_0)}}=2\sqrt{\frac{T_1+2E_0}{T_1+4E_0}}.$$

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=2\sqrt{\frac{1,02+2\cdot0,51}{1,02+4\cdot0,51}}=2\cdot0,816=1,63\,(\text{рази})$$

Відповідь: збільшується у 1,63 рази.

Приклад 19.8. Чи можна говорити про траєкторію руху електронів у електронно-променевої трубці, якщо електрони рухаються зі швидкістю, визначеною з точністю до 0,01%?

Розв'язання.

Знайдемо невизначеність швидкості за умовою задачі:

$$\Delta v_x=v_x\cdot0,0001=10^6\left(\text{м/ с}\right).$$

Обчислимо невизначеність координати, використовуючи співвідношення невизначеностей Гайзенберга:

$$\Delta x\cdot m\Delta v_x=h.$$

Звідки $$\Delta x=\frac{h}{m\Delta v_x}$$

$$\Delta x=\frac{6,63\cdot10^{-34}}{9,11\cdot10^{-31}10^{6}}=7,28\cdot10^{-8}.$$

$$[\Delta x] = \frac{Дж \cdot с \cdot с}{кг \cdot м} = \frac{кг \cdot м^2 \cdot с^2}{с^2 \cdot кг \cdot м} = м.$$

Відповідь: Отримане значення невизначеності координати електрона $\Delta x = 7,28 \cdot 10^{-8}$ м свідчить про те, що поняття траєкторії можна застосовувати до руху електрона в електронно-променевій трубці.

Приклад 19.9. Чому дорівнює розмір ядра, оцінений за співвідношенням невизначеностей, якщо прийняти, що енергія нуклона у ядрі порядку 8МеВ?

Розв'язання

Співвідношення невизначеностей для координати та імпульсу має вигляд: $\Delta x \Delta p \geq \hbar$. Припустимо, що нуклон у ядрі знаходиться в області з невизначеністю $\Delta x = R/2$, тоді $R \geq 2\hbar/\Delta p$.

Фізично розумна невизначеність імпульсу не повинна перевищувати значення самого імпульсу. Імпульс пов'язаний з кінетичною енергією співвідношенням: $p = \sqrt{2mE_{кін}}$. Таким чином

$$R_{min} = \frac{2\hbar}{\sqrt{2mE_{кін}}}$$

$$R_{min} = \frac{2 \cdot 1,05 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 8 \cdot 1,6 \cdot 10^{-13}}} = 3,2 \cdot 10^{-15} \text{ (м)}$$

Відповідь: $R_{min} = 3 \cdot 10^{-15}$м.

Приклад 19.10. Знайдіть відношення невизначеностей швидкості електрона та протона, якщо їх координати визначені з точністю до 10^{-10}м.

Розв'язання

За співвідношенням невизначеностей $\Delta p \Delta x \geq \hbar$. (1)

Виражаємо невизначеність імпульсу Δp через невизначеність швидкостей частинок:

$$\Delta p = m\Delta v. \quad (2)$$

З (1) і (2) маємо:

$$m\Delta v \Delta x \geq \hbar.$$

Таким чином, шукане відношення дорівнює:

$$\frac{\Delta v_e}{\Delta v_\alpha} = \frac{m_\alpha}{m_e} = \frac{1,6710^{-27} кг}{9,1110^{-31} кг} = 1,8310^3 = 1830.$$

Приклад 19.11. Визначити власну функцію вільної частинки, що рухається вздовж осі x.

Розв'язання

Вільна частинка має потенціальну енергію $U(x)$, яка дорівнює нулю. Її повна енергія E співпадає з кінетичною. Рівняння Шредінгера (5.7) для вільної частинки має вигляд:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+k^2\psi=0, \qquad (1)$$

де $k^2=\frac{2mE}{\hbar^2}$ (2).

Рівняння має розв'язки при будь-яких значеннях k^2 и E, тобто енергетичний спектр частинки є неперервним.

Розв'язок рівняння (1) має вигляд:

$$\psi(x)=A\sin(kx+\alpha),$$

або, у комплексному вигляді $\psi(x)=Ae^{ikx}$. (3)

Повна хвильова функція $\Psi(x,t)$ містить множник $e^{-i\omega t}$ (4), який залежить від часу (див. (5.6)).

Тоді $$\Psi(x,t)=Ae^{-i\omega t+ikx},$$

або, з урахуванням співвідношень $\omega=\frac{E}{\hbar}$, $E=\frac{p^2}{2m}$ та виразу (2),

$$\Psi(x,t)=Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et-p_x x)}. \qquad (4)$$

Таким чином, вільна квантова частинка описується плоскою монохроматичною хвилею де Бройля. Цьому відповідає незалежна від часу густина ймовірності знаходження мікрочастинки $|\Psi(x,t)|^2=A^2$, яка є однаковою для всіх точок простору.

Приклад 19.12. Хвильова функція, яка описує рух електрона в основному стані атома гідрогену, має вигляд: $\psi(r)=A\,e^{-r/a_0}$, де A – постійна, a_0 – перший борівський радіус. Знайти для основного стану атома гідрогену найбільш імовірну відстань електрона від ядра.

Розв'язання

Імовірність знаходження частинки в межах об'єму dV визначається за формулою (3.4), яка у випадку стаціонарного стану приймає вигляд:

$$dP=|\psi|^2\,dV.$$

Для сферичного шару радіуса r товщиною dr маємо $dv=4\pi r^2dr$.

$$dP=|\psi|^2\,4\pi r^2dr.$$

Звідки

$$\frac{dP}{dr} = |\psi|^2 4\pi r^2 = A^2 e^{-2r/a_0} 4\pi r^2 . \qquad (1)$$

Досліджуємо функцію (1) на екстремум:

$$2re^{-2r/a_0} - \frac{2r^2}{a_0} e^{-2r/a_0} = 0; \qquad \left(r - \frac{1}{a_0} r^2 \right) e^{-2r/a_0} = 0;$$

$$re^{-r/a_0} \left(1 - \frac{r}{a_0} \right) = 0 . \qquad (2)$$

Корені рівняння (2) $r = 0$ та $r = \infty$ відповідають мінімуму досліджуваної функції.

З умови $1 - \frac{r}{a_0} = 0$ отримуємо: $r_{max} = a_0$

Відповідь: найбільш імовірною відстанню електрона від ядра в основному стані атома гідрогену є радіус першої борівської орбіти.

Приклад 19.13. Визначити енергію фотона, яка відповідає K_α- лінії характеристичного рентгенівського випромінювання срібла.

Розв'язання

К – серія характеристичного рентгенівського випромінювання збуджується при вибиванні електронів з ближньої до ядра К – оболонки атома, що створює можливість переходу на неї електронів з інших оболонок. При переході електрона з L – оболонки на К – оболонку випромінюється K_α-лінія спектра характеристичного рентгенівського випромінювання. Згідно закону Мозлі ((5.15) – (5.17), частота ν, що відповідає K_α - лінії, дорівнює

$$\nu = R(Z - \sigma)^2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right).$$

Тоді енергія фотону, який був випромінений, визначається виразом

$$\varepsilon = h\nu = \frac{3}{4} hR(Z - \sigma)^2 .$$

$$\varepsilon = \frac{3}{4} 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3,3 \cdot 10^{15} (47 - 1)^2 = 3,45 \cdot 10^{-15} \text{ Дж} = 21,6 \text{ кеВ}$$

Задачі для самостійного розв'язування

19.1. Порівняти довжини хвиль фотона та електрона з однаковими імпульсами $p = 5 \cdot 10^{-24}$ кг·м/с.

19.2. Розрахувати довжину хвилі де Бройля для теплових (T=300K) нейтронів?

19.3. Кінетична енергія електрона дорівнює 0,6МеВ. Знайти довжину хвиль де Бройля для нього.

19.4. Розрахувати найбільш імовірну довжину хвилі де Бройля молекул азоту, які знаходяться у повітрі при кімнатній температурі.

19.5. Яким буде відношення довжин де Бройля протона та електрона при 1) однакових імпульсах, 1) однакових енергіях, 3) однакових швидкостях?
19.6. Визначити довжину хвилі де Бройля електрона та нейтрона з енергіями 0,5МеВ; 10МеВ .
19.7. Визначити швидкість протона з довжиною хвилі де Бройля 2пм.
19.8. Визначити довжини хвиль де Бройля α-частинки і протону, які прискорені різницею потенціалів 10кВ.
19.9. Заряджена частинка прискорена потенціалом 200В і має довжину хвилі 2,02нм. Знайти масу цієї частинки, якщо відомо, що її заряд дорівнює заряду електрона.
19.10. Знайти довжину хвилі де Бройля протона, що рухається зі швидкістю $v = 10^8$ см/с.
19.11. Електронний пучок прискорюється потенціалом U = 1кеВ. Звісно, що невизначеність швидкості утворює 0,1% від її значення. Знайти невизначеність координати електрона.
19.12. Якщо при переході з якогось збудженого стану ядро випромінює квант з шириною, що дорівнює 0.10пм, яким буде час випромінювання кванта?
19.13 Якщо прийняти, що енергія нуклона у ядрі порядку 8МеВ, то чому дорівнює розмір ядра, оцінений за співвідношенням невизначеностей?
19.14. Ширина сліду електрона, отриманого за допомогою камери Вільсона на фотопластинці, дорівнює $\Delta x = 1$мкм . Знайти відношення невизначеності імпульсу до його значення., якщо кінетична енергія електрона дорівнює 1,5кеВ.
19.15. Використовуючи співвідношення невизначеностей, доведіть, що для рухомої частинки, невизначеність координати якої дорівнює довжині хвилі де Бройля, невизначеність швидкості за порядком величини дорівнює величині самої швидкості частинки.
19.16. Паралельний пучок електронів, які мають швидкість $v = 10^6$ м/с, проходить через щілину шириною b=0,1мм. Знайти ширину Δx центрального дифракційного максимуму, що спостерігається на екрані, віддаленому від щілини на відстань L=10см. Порівняти Δx з шириною щілини b.
19.17. Середній час життя атома у збудженому стані становить $\Delta t \approx 10^{-3}$с. При переході атома у нормальний стан випромінюється фотон, середня довжина якого 600нм. Оцінити ширину Δ λ спектральної лінії, якщо не відбувається її ширення за рахунок інших процесів.
19.18. Середній час життя Δt атома у збудженому стані дорівнює 10^{-8}с. При переході до нормального стану випромінюється фотон, середня довжина хвилі якого дорівнює 400нм. Оцінити відносну ширину $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ випромінюваної спектральної лінії, якщо не відбувається ширення лінії за рахунок інших процесів.

19.19. Виходячи з того, що радіус атома має величину порядку 0,1нм, оцінити швидкість руху електрона v в атомі гідрогену.
19.20. Оцінити з допомогою співвідношення невизначеностей мінімальну кінетичну енергію електрона, який рухається всередині сфери радіусом 0,05нм.
19.21. Визначити довжину хвилі, яка випромінюється при переході електрона в атомі гідрогену з третього енергетичного рівня на основний. До якої області спектру відноситься це випромінювання?
19.22. Атом гідрогену, який знаходиться в основному стані, поглинає квант випромінювання з довжиною хвилі λ=102,6нм. У якому збудженому стані буде знаходитися атом? Розрахувати енергію електрону в цьому стані.
19.23. Визначити максимальну частоту фотону ν_{max} серії Бальмера у спектрі випромінювання атомарного гідрогену.
19.24. Визначити частоту випромінювання атома гідрогену при переході електрона з третьої орбіти на другу.
19.25. Знайти найбільшу та найменшу довжини хвиль в ультрафіолетовій серії гідрогену (серії Лаймана)
19.26. В однозарядному іоні гелію електрон перейшов з третього енергетичного рівня на другий. Визначити довжину хвилі випромінювання, яке випускається іоном.
19.27. В однозарядному іоні літію електрон перейшов з третього енергетичного рівня на другий. Визначити довжину хвилі, яка випускається при цьому іоном літію.
19.28. Записати спектроскопічні позначення станів атому гідрогену, в яких може знаходитися електрон з головним квантовим числом n = 4.
19.29. Скільки електронів в атомі можуть мати однакові квантові числа:
а) n, l, m_l, m_s; б) n, l, m_l; в) n, l; г) n ?
19.30. Яка кількість електронів в атомі утворює замкнену оболонку з квантовим числом n = 1, 2, 3, 4, 5 ?

Тестові завдання

1. Смугасті спектри належать речовині у стані
   1. газу 2.твердого тіла 3. рідини 4. у будь-якому стані
2. Суцільні спектри належать речовині у стані
   1. твердого тіла 2.газу 3. рідини 4. газу та рідини
3. Енергію електрона в атомі визначає квантове число:
   1. головне (*n*) 2. орбітальне (*l*) 3. магнітне (*m*) 4. спінове (*s*)
4. Момент імпульсу електрона в атомі визначає квантове число
   1. головне (*n*) 2. орбітальне (*l*) 3. магнітне (*m*) 4. спінове (*s*)
5. Проекцію моменту імпульсу електрона в атомі на фізично виділений напрям визначає квантове число:
   1. головне (*n*) 2. орбітальне (*l*) 3. магнітне (*m*) 4. спінове (*s*)
6. Власний момент імпульсу електрона визначає квантове число
   1. головне (*n*) 2. орбітальне (*l*) 3. магнітне (*m*) 4. спінове (*s*)
7. Проекцію спіну електрона на фізично виділений напрям визначає квантове число
   1. n 2. l 3. m_s 4. m

Розділ 20. БУДОВА ТА ВЛАСТИВОСТІ ЯДЕР. РАДІОАКТИВНІСТЬ

Тема: Атомне ядро. Розмір, склад та заряд атомного ядра. Дефект маси, енергія зв'язку. Спін та магнітний момент ядра. Ядерні сили. Моделі ядра. Різновиди іонізуючих випромінювань. Радіоактивність. Уявлення про радіоекологію. Ядерні реакції. Ядерна енергетика.

Основні поняття і формули

● Атомне ядро складається з протонів та нейтронів, їх загальна кількість визначається масовим числом A. Зарядове число z – це кількість протонів.

Традиційна форма запису ядра ${}^{A}_{z}X$ дозволяє визначити:

1) склад ядра (z протонів та $N = A - Z$ нейтронів);

2) масу ядра ($m_я = A \cdot m_n$, оскільки $m_p \approx m_n$);

3) заряд ядра ($q_ÿ = Z \cdot e$);

4) розмір ядра. Якщо уявляти ядро приблизно у вигляді кульки, то її радіус $R_я = R_0 \cdot A^{1/3}$, де $R_0 = 1{,}23 \cdot 10^{-15}$ м;

5) енергію зв'язку та деякі інші властивості ядра.

● Внаслідок взаємодії нуклонів у ядрі маса ядра менша, ніж маса нуклонів, що входять до його складу. Різниця цих мас, яку називають дефектом маси, дорівнює:

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_я. \qquad (20.1)$$

У таблицях задані маси атомів, а не ядер, тому при розрахунку дефекту маси з табличних даних слід відняти масу електронів: $m_ÿ = m_à - Zm_å$. Таким чином дефект маси можна обчислити за формулою

$$\Delta m = Z(m_p + m_e) + (A - Z)m_n - m_я = Zm_{{}^1_1H} + (A - Z)m_n - m_a \qquad (20.2)$$

$m_{{}^1_1H}$ = 1.00728а.о.м.; m_n = 1.00867а.о.м.

Тоді в атомних одиницях маси (а.о.м.) дефект маси дорівнюватиме

$$\Delta m = \left(Z \cdot 1{,}00783 + (A - Z) \cdot 1{,}00867 - m_a\right)\text{а.о.м.} \qquad (20.2)$$

1а.о.м. = $1.66 \cdot 10^{-27}$кг

Дефекту маси відповідає енергія зв'язку ядра:

$$E_{зв} = \left(Zm_p + (A - Z)m_n - m_я\right)c^2. \qquad (20.3)$$

У позасистемних одиницях енергії мегаелектрон-вольтах (1МеВ=$1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж):

$$E_{зв} = 931{,}5\Delta m \text{ МеВ}.$$

● Відомо десь біля 1700 різних ядер, з них стабільними є приблизно 300, інші – радіоактивні.

Під радіоактивністю розуміють спонтанне (самовільне) перетворення ізотопів хімічних елементів, зумовлене розпадом їх атомних ядер.

● Основний **закон радіоактивного розпаду** дозволяє визначити кількість ядер N радіоактивного елемента, яка залишилась к будь-якому моменту часу t, якщо їх початкова кількість в момент часу t = 0 дорівнювала N_0 :

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \qquad (20.4)$$

де λ – стала розпаду, яка надає ймовірність розпаду ядра за одиницю часу.

Період піврозпаду $T_{1/2}$ (тобто час, за який розпадається половина початкової кількості ядер) пов'язаний зі сталою розпаду співвідношенням:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda}. \qquad (20.5)$$

З урахуванням цього закону радіоактивного розпаду можна надати вигляду:

$$N = N_0 e^{-\ln 2 \frac{t}{T_{1/2}}} = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}. \qquad (20.6)$$

Якщо радіоізотоп A_1 з постійною розпаду λ_1 перетворюється в радіоізотоп A_2 з постійною розпаду λ_2, то кількість ядер ізотопу A_2 змінюється з часом за законом

$$N_2(t) = N_1(0)\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right), \qquad (20.7)$$

де $N_1(0)$ – кількість ядер радіоізотопу A_1 в момент t =0.

Важливою характеристикою радіоактивного розпаду є **активність** A – кількість ядер, що розпадаються за одиницю часу:

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N = \lambda N_0 e^{-\lambda t}. \qquad (20.8)$$

Кількість радіоактивних ядер N, яка міститься у масі m, можна визначити за формулою $N = mN_A/M$, де N_A – число Авогадро; M – молярна маса, яку легко оцінити для кожного ядра через масове число: $M = A_r \cdot 10^{-3}$кг/моль.

Тоді

$$A = \frac{m \cdot \ln 2 \cdot N_A}{M \cdot T_{1/2}}. \qquad (20.9)$$

У Міжнародній системі одиниць (СІ) активність вимірюється у бекерелях. 1Бк = 1 розпад/с. Позасистемною одиницею активності є кюрі: 1Кі = $3{,}7 \cdot 10^{10}$Бк.

Питома активність радіоактивного препарату визначається кількістю актів розпаду за одну секунду на одиницю маси чи об'єму радіоактивної речовини:

a = A/m, вимірюється у Бк/кг;

q = A/V, вимірюється у Бк/м^3.

Активність одиниці маси є характеристикою нестабільних ядер:

$$a = \frac{\ln 2 \cdot N_A}{M \cdot T_{1/2}}. \qquad (20.10)$$

● Найчастіше відбуваються такі види радіоактивного розпаду: α-розпад, 3 види β-розпаду.

Розпад може супроводжуватися γ-випромінюванням.

Схема (закон зміщення) при α- розпаді:

$$^{A}_{z}X \rightarrow ^{A-4}_{z-2}Y + ^{4}_{2}He. \qquad (20.11)$$

Схеми β-розпаду:

1. електронний: $^{A}_{z}X \rightarrow ^{A}_{z+1}Y + ^{0}_{-1}e + \tilde{\nu}$;

2. позитронний: $^{A}_{z}X \rightarrow ^{A}_{z-1}Y + ^{0}_{1}e + \nu$;

3. електронний захват (К-захват): $^{A}_{z}X + ^{0}_{-1}e \rightarrow ^{A}_{z-1}Y + \nu$,

де ν і $\tilde{\nu}$ – відповідно нейтрино та антинейтрино.

● При проходженні радіоактивного випромінювання крізь речовину густина його потоку зменшується. **Закон ослаблення** моноенергетичного γ-випромінювання або β- частинок має вигляд:

$$j = j_0 e^{-\mu x} \qquad (20.12)$$

де j_0 – густина потоку частинок, які падають на поверхню речовини, j – густина потоку частинок на глибині **x,** μ **– лінійний коефіцієнт ослаблення**.

Інтенсивність γ-випромінювання I після проходження шару речовини завтовшки **x** визначається за формулою

$$I = I_0 e^{-\mu x}, \qquad (20.13)$$

де I_0 – інтенсивність γ-випромінювання, яке падає на поверхню речовини.

● Джерелами іонізуючих частинок є ядерні реакції.

Ядерна реакція – процес, який відбувається при зіткненні ядра або елементарної частинки з іншим ядром, внаслідок якого змінюється нуклонний склад первісного ядра, а серед продуктів реакції з'являються також інші частинки.

При ядерних реакціях дуже суттєву роль виграють закони збереження енергії, імпульсу, моменту імпульсу, електричного заряду і т.ін. З закону збереження енергії можна визначити енергетичний вихід реакції Q.

Енергетичний вихід ядерної реакції Q (або тепловий ефект реакції) – різниця енергій спокою початкових і кінцевих частинок, які приймають участь у реакції:

$$Q = c^2 \Delta m = c^2 \left(\sum m - \sum m' \right), \qquad (20.14)$$

де m і m' - суми мас частинок відповідно до і після реакції.

При пружному розсіянні Q = 0.

Методичні вказівки.

1. При розв'язуванні задач на явище радіоактивності слід розрізняти два випадки:

● відбувається розпад ізольованої речовини. Тоді використовується закон радіоактивного розпаду у формі, яка надається формулою (20.4).

За цією формулою кількість ядер ΔN, які розпались за проміжок часу Δt, дорівнює

$$\Delta N = N_0\left(1 - e^{-\lambda \Delta t}\right) \qquad (20.15)$$

Якщо за умовою задачі час розпаду Δt набагато менший за період напіврозпаду $T_{1/2}$ $\left(\Delta t << T_{1/2}\right)$ тобто кількість ядер можна вважати практично незмінною та рівною N_0, формула (20.15) може бути записана у вигляді

$$\Delta N = \lambda N_0 \Delta t\,. \qquad (20.16)$$

● розпадається дочірня речовина, яка існує в суміші з іншою радіоактивною речовиною (материнською), продуктом розпаду якої вона є. У цьому випадку закон зміни дочірньої речовини надає формула (20.7).

У випадку, коли період напіврозпаду материнської речовини T_1 є набагато більшим за період напіврозпаду T_2 дочірньої речовини, за деякий проміжок часу установлюється радіоактивна рівновага між цими речовинами. Активність дочірньої речовини дорівнює кількістю її ядер, утворених внаслідок розпаду ядер материнської речовини, тобто $A_2=A_1$. Звідки, з огляду на співвідношення (20.8) та (20.5) отримуємо:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{T_1}{T_2}\,. \qquad (20.17)$$

2. Закон збереження енергії для ядерних реакцій необхідно записувати в релятивістській формі:

$$\sum mc^2 + \sum T = \sum m'c^2 + \sum T' \qquad (20.18)$$

де $\sum mc^2$ – сума власних енергій частинок, які вступають в реакцію, $\sum T$ – сума їх кінетичних енергій, $\sum m'c^2$, $\sum T'$ – сума відповідних величин для продуктів реакції.

При використанні закону збереження повної енергії слід пам'ятати, що ядерні реакції можуть йти як з виділенням, так і з поглинанням енергії. Отже, енергетичний вихід ядерної реакції Q може бути як додатним, так і від'ємним. У першому випадку ($Q > 0$, екзотермічна реакція), реакція може йти при будь-яких значеннях кінетичної енергії частинок, які вступають у реакцію. У другому випадку ($Q < 0$) реакція є ендотермічною, тобто існує мінімальна кінетична енергія, починаючи з якої реакція стає можливою (**поріг реакції**).

● Порогова енергія реакції дорівнює сумі енергії, яка поглинається під час реакції, та кінетичної енергії проміжного ядра, яке утворюється після поглинання ядром-мішенню частинок, що налітають на нього.

Якщо перед зіткненням ядро-мішень знаходилось у спокої, порогова енергія може бути визначена за формулою:

$$E_{пор.} = |Q|\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right), \qquad (20.19)$$

Приклади розв'язання задач

Приклад 20.1. Визначити, яка енергія в МеВ відповідає дефекту маси Δm=1а.о.м.

Розв'язання

Енергія зв'язку пов'язана з дефектом маси формулою $E_{зв} = \Delta m \cdot c^2$.
По-перше, виразимо усі величини у системі одиниць СІ:
1а.о.м.= $1{,}66 \cdot 10^{-27}$кг, тоді

$$E_{зв} = 1{,}660 \cdot 10^{-27}\text{кг} \cdot (2{,}998 \cdot 10^8)^2 \text{м}^2/\text{с}^2 = 1{,}49 \cdot 10^{-10}\text{Дж} =$$
$$= 1{,}492 \cdot 10^{-10}/(1{,}602 \cdot 10^{-19})\text{еВ} = 9{,}315 \cdot 10^8\ \text{еВ} = 931{,}5\text{МеВ}.$$

Таким чином, якщо дефект маси виражати в а.о.м., то енергію зв'язку легко отримати в МеВ, якщо помножити Δm (а.о.м.) на 931,5!

Приклад 20.2. Обчислити енергію зв'язку ядра ${}^4_2\text{He}$.

Розв'язання

Енергія зв'язку атомного ядра визначається формулою

$$E_{зв} = \Delta mc^2 = \left[Zm_p + (A - Z)m_n - m_a\right]c^2.$$

Якщо маси виразити в а.о.м., а енергію зв'язку в МеВ, то ця формула прийме вигляд

$$E_{зв} = 931\left[Zm_p + (A - Z)m_n - m_я\right]\text{МеВ}.$$

Підставляючи значення мас у цю формулу, отримаємо

$$E_{зв} = 931\left[2 \cdot 1{,}00757 + (4 - 2)1{,}00893 - 4{,}0028\right] = 28{,}1\text{МеВ}.$$

Приклад 20.3. Записати дефект маси та енергію зв'язку ядра у зручному для розрахунків вигляді.

Розв'язання

За означенням дефект маси дорівнює різниці між масою нуклонів, що входять до складу ядра, та масою ядра:

$$\Delta m = Zm_p + Nm_n - m_я.$$

У таблицях часто приводяться маси атомів (m_a), які виражені в атомних одиницях маси. Щоб знайти масу ядра, від неї треба відняти масу електронів, тобто $m_я = m_a - Zm_e$. Тоді дефект маси можна виразити у вигляді: $\Delta m = Z(m_p + m_e) + (A - Z)m_n - m_a$.

Якщо всі маси виразити в а.о.м., то, користуючись тим, що 1а.о.м. відповідає 931МеВ (дивись попередню задачу), а також тим, що

m_p=1,00728а.о.м.; m_n = 1,00867а.о.м.; m_e = 0,00055а.о.м.;

$m_p + m_e$ = 1,00783а.о.м.,

для дефекту маси та енергії зв'язку можна записати зручні для розрахунків формули:

$$\Delta m = (Z \cdot 1{,}00783 + (A - Z) \cdot 1{,}00867 - m_a)\text{а.о.м.};$$

$$E_{зв} = \Delta m \cdot 931 \text{ МеВ}.$$

Для розрахунку в останні формули треба підставити тільки зарядове та масове числа ядра і масу атома в а.о.м.

Приклад 20.4. Визначити дефект маси та через нього енергію зв'язку ядра ${}^{7}_{3}\mathrm{Li}$.

Розв'язання

Дефект маси ядра – це різниця між сумою мас нуклонів, які входять в його склад, та масою ядра, тобто $\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_я$.

У таблицях задані маси атомів, а не ядер, тому із табличних даних треба відняти масу електронів: $m_я = m_a - Zm_e$.

Таким чином

$$\Delta m = Z(m_p + m_e) + (A - Z)m_n - m_a = Zm_H + (A - Z)m_n - m_a =$$

$$=(3 \cdot 1{,}00783 + 4 \cdot 1{,}00867 - 7{,}01601)\text{а.о.м.} = 0{,}04216\text{а.о.м.}$$

При цьому було враховано, що m_p = 1,00728а.о.м. та m_e = 0,00055а.о.м.

Енергію зв'язку розраховуємо за формулою, отриманою у попередній задачі:

$$E = c^2\Delta m = 0{,}0421 \cdot 931 \text{ МеВ} = 39.2\text{МеВ}.$$

Приклад 20.5. Радіоактивний натрій ${}^{24}_{11}\mathrm{Na}$ розпадається, випускаючи β^--частинки. Період піврозпаду дорівнює 14,8 години. Вирахувати кількість ядер, що розпалися за 10 годин у 1мг даного радіоактивного препарату.

Розв'язання

Кількість радіоактивних ядер зменшується з часом за законом

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

де N_0 – кількість радіоактивних ядер на початок відліку (t=0). N – кількість ядер радіоактивного елемента, яка залишилась на моменту часу t з моменту начала відліку, λ – постійна радіоактивного розпаду. Тоді кількість ядер, що розпалися дорівнює

$$\Delta N = N_0 - N_0 e^{-\lambda t} = N_0(1 - e^{-\lambda t}) \qquad (1)$$

Оскільки $\lambda = \dfrac{\ln 2}{T}$, то $e^{-\lambda t} = e^{-\frac{\ln 2}{T}t} = 2^{-\frac{t}{T}}$.

Тоді (1) має вигляд $\Delta N = N_0(1-2^{-\frac{t}{T}})$. (2)

Початкову кількість ядер N_0 легко вирахувати за формулою

$$N_0 = \frac{mN_A}{A}, \quad (3)$$

де N_A – число Авогадро.

Після того, як ми підставимо (3) у (2) остаточно отримаємо

$$\Delta N = \frac{mN_A}{A}(1-2^{-\frac{t}{T}}) = \frac{10^{-6}\cdot 6{,}02\cdot 10^{26}}{24}(1-2^{-\frac{10}{14{,}8}}) = 9{,}3\cdot 10^{18}.$$

Приклад 20.6. Внаслідок зіткнення α-частинки з ядром бора ${}^{10}_{5}B$ відбулась ядерна реакція, внаслідок якої утворились два нових ядра. Одним з них є ядро гідрогену. Визначити друге ядро та енергетичний ефект реакції.

Розв'язання

Невідоме ядро позначимо символом ${}^{A}_{Z}X$. Тоді ядерна реакція може бути представлена у вигляді

$${}^{4}_{2}He + {}^{10}_{5}B \rightarrow {}^{1}_{1}H + {}^{A}_{Z}X.$$

За законом збереження електричного та баріонного зарядів можна визначити невідоме ядро: Z=6, A=13. За таблицею Менделєєва знаходимо, що це ізотоп ${}^{13}_{6}C$.

Енергетичний вихід Q реакції

$$Q = 931(m_{He} + m_B - m_H - m_c).$$

$$Q = 931(4{,}00260 + 10{,}01294 - 1{,}00783 - 13{,}00335)\text{МеВ} = 4{,}06\text{МеВ}.$$

Приклад 20.7. Визначити початкову активність A_0 радіоактивного препарату магнію ${}^{27}_{12}Mg$ масою m=0,2мкг, а також його активність A через 6 годин.

$m = 0{,}2\text{мкг} = 2\cdot 10^{-8}\text{кг}$

$T_{1/2} = 10$ хв. = 600с

$T = 6$год. $= 2.16\cdot 10^{4}$с

A_0=? A = ?

Розв'язання

Активність A ізотопу характеризує швидкість розпаду: $A = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$.

Для початкової активності t = 0, тобто $A_0 = \lambda N_0$.

$$\lambda = (\ln 2)/T_{1/2}.$$

Кількість радіоактивних ядер: $N = mN_A/M$, де N_A – число Авогадро, M – молярна маса.

Таким чином отримуємо, що початкова активність препарату дорівнює $A_0 = \frac{m \cdot \ln 2 \cdot N_A}{MT_{1/2}}$.

Активність препарату через час t становить $A = \frac{m \cdot \ln 2 \cdot N_A}{MT_{1/2}} \exp(-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t)$.

В таблицях знаходимо період піврозпаду та молярну масу. $M = 27 \cdot 10^3$кг/моль; $T_{1/2}$ = 10 хв. = 600с; $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$моль$^{-1}$.

$$A_0 = \frac{2 \cdot 10^{-10} 0{,}693 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}}{27 \cdot 10^{-3} \cdot 600} = 5{,}13 \cdot 10^{12} \text{ Бк.}$$

$$A = \frac{2 \cdot 10^{-10} 0.693 \cdot 6.02 \cdot 10^{23}}{27 \cdot 10^{-3} \cdot 600} \exp(-0.693 \cdot 2.16 \cdot 10^4 / 600) = 81.3 \text{ Бк.}$$

Приклад 20.8. Трубка лічильника, призначена для рахунку повільних нейтронів, покрита с внутрішнього боку сполукою, яка містить ізотоп ${}^{10}_{5}B$. Визначити в МеВ енергію, яка виділяється при реакції, що відбувається внаслідок удару нейтрона о внутрішню поверхню трубки та супроводжується випусканням α - частинки.

Розв'язання

Ядерна реакція, що відбувається у даному випадку має вигляд:

$${}^{10}_{5}B + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{7}_{3}B + {}^{4}_{2}B$$

Для підрахунку виділеної енергії для початку визначимо дефект маси реакції за формулою

$$\Delta m = \left[m({}^{10}_{5}B) + m({}^{10}_{0}n) \right] - \left[m({}^{7}_{3}Li) + m({}^{4}_{2}He) \right] \qquad (1)$$

Оскільки кількість електронів до та після реакції зберігається, то замість значень мас ядер користуємося у формулі (1) значеннями мас нейтральних атомів:

$m({}^{10}_{5}B) = 10{,}01618$ а.е.м. $\qquad m({}^{7}_{3}Li) = 7{,}01822$ а.е.м.

$m({}^{10}_{0}n) = 1{,}00893$ а.е.м. $\qquad m({}^{4}_{2}He) = 4{,}0039$ а.е.м.

Тоді за формулою (1) отримуємо $\Delta m = 0{,}00299$ а.е.м.

Енергію, виділену при даній реакції, знаходимо із співвідношення

$$\Delta E = 931 \Delta m = 931 \cdot 0{,}00299 = 2{,}78 \text{ МеВ}.$$

Приклад 20.9. Визначити, яка частина енергії втрачається при прямому пружному зіткненні нейтрона з атомом графіту у блоці уповільнювача.

Розв'язання

Нехай при прямому зіткненні нейтрона з атомом вуглецю, який знаходиться у спокої, відбувається зміна його швидкості від значення v_0 до v_1, а атом вуглецю набуває швидкість, яка дорівнює v. Тоді на підставі законів збереження енергії та імпульсу можна записати рівняння:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mv_1^2,$$
$$mv_0 = Mv + mv_1,$$
де m – маса нейтрона, M – маса атома вуглецю.

Розділивши перше та друге рівняння на m, отримуємо

$$v_0^2 - v_1^2 = \frac{M}{m}v^2; \quad (1) \qquad\qquad v_0 - v_1 = \frac{M}{m}v. \quad (2)$$

Ділення рівняння (1) на рівняння (2) дає: $v_0 = v_1 = v$ (3)

Сумісним розв'язанням рівнянь (2) та (3) визначимо швидкість нейтрона після зіткнення та його кінетичну енергію після зіткнення

$$v_1 = -v_0\frac{M-m}{M+m}.$$

$$E_1 = \frac{mv_1^2}{2} = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2\frac{mv_0^2}{2} = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 E_0,$$

де $E_0 = \frac{mv_0^2}{2}$ – кінетична енергія нейтрона до зіткнення.

Різниця енергій до та після зіткнення $\Delta E = E_0 - E_1 = \frac{4mM}{(M+m)^2}E_0$,

а шукана величина відносної втрати енергії нейтроном при прямому пружному зіткненні дорівнює

$$\frac{\Delta E}{E_0} = \frac{4mM}{(M+m)^2} = \frac{4\cdot 1\cdot 12}{(12+1)} = 0,284.$$

Задачі для самостійного розв'язування

20.1. Вказати склад ядра європію ^{152}Eu та оцінити його радіус.
20.2. Вказати склад ядра тербію ^{152}Tb та оцінити його радіус.
20.3. Вказати склад ядра америцію ^{243}Am та оцінити його радіус.
20.4. Вказати склад ядра берклію ^{247}Bk та оцінити його радіус.
20.5. Вказати склад ядра плутонію ^{239}Pu та оцінити його радіус.
20.6. Два ядра з однаковими масовими числами називають дзеркальними одне до одного, якщо кількість протонів в одному з них дорівнює кількості нейтронів у іншому. Вказати ядра, дзеркальні до ядер ^{4}He, ^{8}Li, ^{15}O, ^{27}Al, ^{53}Fe.
20.7. Два ядра з однаковими масовими числами називають дзеркальними одне до одного, якщо кількість протонів в одному з них дорівнює кількості нейтронів у іншому. Вказати ядра, дзеркальні до ядер ^{7}Be, ^{10}Ne, ^{16}O, ^{52}Fe, ^{54}Co.
20.8. Знайти кількість протонів та нейтронів, що складають ядра трьох ізотопів бора з масовими числами 9, 10, 11. Записати ці ядра.

20.9. Знайти кількість протонів та нейтронів, що складають ядра чотирьох ізотопів кисню з масовими числами 16, 17, 18 та 20. Записати ці ядра.

20.10. Знайти кількість протонів та нейтронів в ядрах ізотопів урану ^{233}U, ^{234}U, ^{235}U, ^{238}U.

20.11. Визначити дефект маси та енергію зв'язку ядер дейтерію та тритію.

20.12. Питомі енергії зв'язку ядер ^{6}Li та ^{7}Li дорівнюють відповідно 5,33МеВ/нуклон і 5,60МеВ/нуклон. Визначити маси вказаних нуклідів та відповідні атомні маси. Яке з вказаних ядер є більш стабільним?

20.13. Обчислити енергію зв'язку $E_{зв}$ та дефект маси Δm ядра $^{4}_{2}He$.

20.14. Визначити енергію зв'язку $E_{зв}/A$, яка приходиться на один нуклон для ядра $^{11}_{5}B$, $^{235}_{92}U$.

20.15. Визначити енергію зв'язку $E_{зв}/A$, яка приходиться на один нуклон для ядра $^{9}_{4}Be$, $^{238}_{92}U$.

20.16(вар.1 –25)*. Які ізотопи виникають у ланцюжку радіоактивних ядер, що приведені у таблиці 20.1.

Таблиця 20.1.

Номер задачі	Материнське ядро	Послідовність розпаду	Номер задачі	Материнське ядро	Послідовність розпаду
20.16.1	^{232}Th	$\alpha \to \beta \to \beta \to \alpha$	20.16.14	^{214}Bi	$\alpha \to \beta \to \beta \to \alpha$
20.16.2	^{220}Rn	$\alpha \to \alpha \to \beta \to \beta$	20.16.15	^{210}Ti	$\beta \to \beta \to \alpha \to \beta$
20.16.3	^{237}Np	$\alpha \to \beta \to \alpha \to \alpha$	20.16.16	^{233}Pa	$\beta \to \alpha \to \alpha \to \beta$
20.16.4	^{238}U	$\alpha \to \beta \to \beta \to \alpha$	20.16.17	^{216}Po	$\alpha \to \beta \to \beta \to \alpha$
20.16.5	^{226}Ra	$\alpha \to \alpha \to \beta \to \alpha$	20.16.18	^{228}Ra	$\beta \to \beta \to \alpha \to \alpha$
20.16.6	^{235}U	$\alpha \to \beta \to \alpha \to \beta$	20.16.19	^{219}Rn	$\alpha \to \alpha \to \beta \to \alpha$
20.16.7	^{227}Ac	$\alpha \to \alpha \to \beta \to \alpha$	20.16.20	^{214}Po	$\alpha \to \beta \to \alpha \to \beta$
20.16.8	^{215}Po	$\alpha \to \beta \to \alpha \to \beta$	20.16.21	^{223}Fr	$\alpha \to \beta \to \alpha \to \alpha$
20.16.9	^{217}At	$\alpha \to \alpha \to \beta \to \beta$	20.16.22	^{219}At	$\alpha \to \beta \to \beta \to \alpha$
20.16.10	^{228}Ac	$\beta \to \alpha \to \alpha \to \beta$	20.16.23	^{223}Ra	$\alpha \to \alpha \to \beta \to \alpha$
20.16.11	^{229}Th	$\alpha \to \beta \to \alpha \to \alpha$	20.16.24	^{231}Th	$\beta \to \alpha \to \beta \to \alpha$
20.16.12	^{234}Pa	$\beta \to \alpha \to \alpha \to \alpha$	20.16.25	^{231}Pa	$\alpha \to \alpha \to \beta \to \alpha$
20.16.13	^{234}Th	$\beta \to \beta \to \alpha \to \alpha$			

20.17. Визначити, який % початкової кількості ядер $^{14}_{6}C$ розпадається за 100років. Період його піврозпаду дорівнює 5730 років. Продукт розпаду – стабільний.

20.18. Скільки атомів з 1 млн. атомів полонію ($^{210}_{84}Po$) розпадаються за добу?

20.19. Визначити, який % початкової кількості ядер ^{238}U розпадається за 1000 років і сталу радіоактивного розпаду. Період його піврозпаду дорівнює $4.5 \cdot 10^{9}$ років.

20.20. Визначити, який % початкової кількості ядер ^{239}U розпадається за 2хвилини, і сталу радіоактивного розпаду. Період його піврозпаду дорівнює 23,54 хвилин. Продукт розпаду – стабільний.

20.21. Визначити, який % початкової кількості ядер ^{239}Pu розпадається за 200 років, і сталу радіоактивного розпаду. Період його піврозпаду дорівнює 24390 років. Продукт розпаду – стабільний.

20.22.Активність деякого радіоактивного ізотопу дорівнює 100Бк. Знайти його активність через час, який дорівнює половині його періоду піврозпаду.

20.23. Визначити вік стародавніх дерев'яних предметів, якщо питома активність **а** нукліда ^{14}C в них становить 60% питомої активності цього самого нукліда в свіже зрубаних деревах. Період його піврозпаду дорівнює 5730 років.

20.24. Знайти масу радону ($^{222}_{86}Rn$), активність якого дорівнює 1 кюрі.

20.25. Знайти сталу розпаду радону, якщо відомо, що кількість атомів радону зменшується за добу на 18.2%.

20.26. Деякий радіоактивний препарат має сталу розпаду $\lambda = 1,44 \cdot 10^{-3}$ год$^{-1}$. Через який час відбудеться розпад 75% начальної кількості ядер?

20.27. Знайти період піврозпаду радіоактивного ізотопу, якщо його активність за 10 суток зменшилась на 24% у порівнянні з первинною.

20.28. Визначити, яка доля радіоактивного ізотопу $^{225}_{89}Ac$ розпадеться упродовж 6 діб.

20.29. Визначити кількість ядер радіоактивного препарату йоду $^{131}_{53}I$ масою m=0,5 мкг, які розпалися упродовж 1 хв.

20.30. Визначити активність радіоактивного препарату $^{90}_{38}Sr$ масою m=1 мкг.

20.31. Знайти середню тривалість життя атомів радіоактивного ізотопу кобальту $^{60}_{27}Co$.

20.32. Визначити масу ізотопу $^{131}_{53}I$, активність якого дорівнює 37ГБк.

20.33. З кожного мільйону атомів деякого радіоактивного ізотопу кожну секунду розпадається 200 атомів. Визначити період піврозпаду цього ізотопу.

20.34. Лічильник α-частинок, установлений поблизу радіоактивного ізотопу при першому вимірюванні за одну хвилину зареєстрував 1406 частинок, а через 4год. тільки 400 частинок за хвилину. Визначити період піврозпаду цього ізотопу.

20.35. Яка ймовірність того, що даний атом ізотопу радіоактивного йоду $^{131}_{53}I$ розпадеться впродовж першої секунди?

20.36. Яка частка первинної кількості радіоактивного ізотопу розпадеться протягом часу, який дорівнює середній тривалості життя атомів цього ізотопу?

20.37. Знайти масу урану ^{238}U, який має таку саму активність, що стронцій ^{90}Sr масою 1мг.

20.38. На скільки відсотків знизиться активність ізотопу іридію ^{192}Ir за 30діб?

20.39. За добу активність ізотопу зменшилась від 118ГКі до 7,4ГКі. Визначити період піврозпаду цього ізотопу.

20.40. Активність препарату за деякий проміжок часу зменшилась у 250разів. Скільком періодам піврозпаду дорівнює цей проміжок часу?

20.41. Яка кількість радіоактивного препарату ізотопу радію $^{226}_{88}Ra$ має активність 1 кюрі?

20.42. Щоб оцінити вік старовинної тканини, знайденої в одній з єгипетських пірамід, була визначена концентрація в ній атомів радіоактивного вуглецю ^{14}C. З'ясували, що вона відповідає 9,2розпадам за хвилину на 1г вуглецю. Концентрація ^{14}C у живих рослинах відповідає 14,0розпадам за хвилину на 1г вуглецю. Оцінити вік тканини.

20.43. Визначити початкову активність радіоактивного препарату магнію ^{27}Mg масою $m = 0,2$ мкг, а також його активність через 6год.

20.44. Маємо пучок нейтронів з кінетичною енергією 0,025еВ. Яка частка нейтронів розпадається на довжині пучка 2м?

20.45. До крові людини ввели малу кількість розчину, який містить ізотоп ^{24}Na активністю $A = 2,1 \cdot 10^3$ Бк. Активність 1см^3 крові, взятої через 5год, дорівнює 0,28 Бк. Знайти об'єм крові в організмі людини.

20.46. Визначити масу свинцю, який виникнув з 1кг ^{238}U за час, який дорівнює віку Землі ($2,5 \cdot 10^9$ років).

20.47. Знайти імовірність розпаду радіоактивного ядра за час $t = 1/\lambda$, де λ – його постійна розпаду.

20.48. За який проміжок часу з 10^7 атомів ^{90}Sr розпадається один атом?

20.49. Визначити постійну розпаду радіоактивного нукліду, активність якого зменшується у 1,07 разів за 100 діб.

20.50. Визначити вік старовинних дерев'яних предметів, у яких питома активність (активність одиниці маси) радіоактивного вуглецю ^{14}C у 2 рази менша за питому активність цього нукліду у тільки що зрублених дерев.

20.51. Препарат містить 1,4мкг радіоактивного ізотопу ^{24}Na. Яку активність буде мати препарат за добу?

20.52. Знайти поріг ядерної реакції $^{7}_{3}Li(p,n)$.

20.53. Якщо бомбардувати бор тепловими нейтронами, йде реакція $^{10}_{5}B(n,\alpha)$. Знайти енергію, яка виділяється при реакції.

20.54. Обчислити енергію ядерної реакції: $^{9}_{4}Be + ^{2}_{1}H \rightarrow ^{10}_{5}B + ^{1}_{0}n$.

20.55. Знайти найменше значення енергії γ-кванта, якої вистачить для здійснення реакції $^{24}_{12}Mg(\gamma,n)$.Знайти також довжину його хвилі.

20.56. Під час вибуху водневої бомби відбувається ядерна реакція утворення гелію із дейтерію та тритію. 1) Написати ядерну реакцію; 2)знайти енергію, яка виділяється.

20.57(вар.1–25)*. Визначити товщину захисного шару, який дозволяє знизити інтенсивність вузького пучка γ- випромінювання до допустимого рівня інтенсивності радіоактивного випромінювання $I = 1 мкДж \cdot с^{-1} \cdot м^2$. Інтенсивність неослабленого пучка I_0, енергія γ- квантів та речовина захисту приведені у таблиці 20.2.

Таблиця 20.2.

Номер задачі	Інтенсивність $I = 1 мкДж \cdot с^{-1} \cdot м^2$	Енергія γ - квантів, МеВ	Речовина захисту
20.57.1	1000	7,0	Свинець
20.57.2	100	6,0	Чавун
20.57.3	50	6,0	Бетон
20.57.4	10	7,0	Вода
20.57.5	10000	1,4	Свинець
20.57.6	300	3,0	Бетон
20.57.7	3000	1,0	Чавун
20.57.8	100	6,0	Свинець
20.57.9	50	3,0	Вода
20.57.10	70	8,8	Чавун
20.57.11	100	0,5	Вода
20.57.12	500	5,6	Свинець
20.57.13	2500	2,0	Чавун
20.57.14	50	3,6	Чавун
20.57.15	700	5,0	Свинець
20.57.16	100	1,7	Бетон
20.57.17	250	3,0	Свинець
20.57.18	5000	4,0	Свинець
20.57.19	500	2,2	Чавун
20.57.20	500	1,0	Вода
20.57.21	500	0,5	Чавун
20.57.22	70	1,0	Бетон
20.57.23	300	2,2	Свинець
20.57.24	50	0,7	Чавун
20.57.25	20	0,5	Бетон

Тестові завдання

1. До складу ядра атома входять елементарні частинки
   1. електрони і протони 2. позитрони і електрони
   3. нейтрони і протони 4. нейтрони і електрони
2. До складу ядра входять елементарні частинки:
   1. електрони 2. протони 3. позітрони 4. нейтрино

3. Ізобарами називають атоми, ядра яких мають

1.однакові кількості нуклонів 2. однакові кількості протонів

3. однакові кількості нейтронів 4. однаковий час життя

4. З наведених ядер $^{7}_{3}Li$, $^{7}_{4}Be$, $^{13}_{7}N$, $^{6}_{3}Li$ є ізобарами

1. $^{7}_{3}Li$ і $^{6}_{3}Li$ 2. $^{6}_{3}Li$ і $^{7}_{4}Be$ 3. $^{7}_{4}Be$ і $^{7}_{3}Li$ 4. $^{7}_{3}Li$ і $^{13}_{7}N$

5. Ізотонами називають атоми, ядра яких мають:

1.однакові кількості нуклонів 2. однакові кількості протонів

3. однакові кількості нейтронів 4. однаковий час життя

6. З наведених ядер $^{7}_{3}Li$, $^{7}_{4}Be$, $^{13}_{7}N$, $^{6}_{3}Li$ ізотонами є

1. $^{7}_{3}Li$ і $^{6}_{3}Li$ 2. $^{6}_{3}Li$ і $^{7}_{4}Be$ 3. $^{7}_{4}Be$ і $^{7}_{3}Li$ 4. $^{7}_{3}Li$ і $^{13}_{7}N$

7. Ізотопами називають атоми, ядра яких мають:

1.однакові кількості нуклонів 2. однакові кількості протонів

3. однакові кількості нейтронів 4. однаковий час життя

8. З наведених ядер $^{7}_{3}Li$, $^{7}_{4}Be$, $^{13}_{7}N$, $^{6}_{3}Li$ є ізотопами

1. $^{7}_{3}Li$ і $^{6}_{3}Li$ 2. $^{6}_{3}Li$ і $^{7}_{4}Be$ 3. $^{7}_{4}Be$ і $^{7}_{3}Li$ 4. $^{7}_{3}Li$ і $^{13}_{7}N$

9. Ізомерами називають атоми, ядра яких мають

1.однакові кількості нуклонів 2. однакові кількості протонів

3. однакові кількості нейтронів 4. однаковий час життя

10. Реакцію ділення важких ядер найбільш слушно описує

1. модель ядерних оболонок 2. краплинна модель ядра

3. оптична модель ядра 4. усі названі моделі

11. Існування найбільш стійких (магічних) ядер найбільш слушно описує

1. модель ядерних оболонок 2. краплинна модель ядра

3. оптична модель ядра 4. усі названі моделі

12. У магнітному полі відхиляється від напрямку поширення потік

1. нейтронів 2. β-променів 3. γ-променів 4. нейтрино

13. У магнітному полі не відхиляються від напрямку поширення:

1. α- промені 2. γ- промені 3. β^{+}-промені 4. β^{-}-промені

<u>Установити відповідність:</u>

14.

Вид ланцюгової реакції	Значення коефіцієнту розмноження нейтронів
1. Вибухова ланцюгова реакція	А. $k = 1$
2. Керована ланцюгова реакція	Б. $k > 1$
3. Згасаюча ланцюгова реакція	В. $k < 1$

15. До складу атома урану $^{239}_{92}U$ входить

частинки	їх кількість
1. електронів	А. 239
2. нейтронів	Б. 92
3. протонів	В. 92
4. сумарна кількість нуклонів	Г. 147

16. До складу ядра урану $^{235}_{92}U$ входить

частинки	їх кількість
1. електронів	А. 235
2. нейтронів	Б. 92
3. протонів	В. 143
4. сумарна кількість нуклонів	Г. 0

Додатки

Фундаментальні фізичні константи:

Атомна одиниця маси	1 а.о.м. = $1{,}6605655\cdot10^{-27}$кг
Гравітаційна стала	$G = 6{,}6720\cdot10^{-11}$Н· м^2/кг^2
Електрична стала	$\varepsilon_0 = 8{,}85418782\cdot10^{-12}$ Ф/м
Елементарний заряд	$e = 1{,}6021892\cdot10^{-19}$ Кл
Комптонівська довжина хвилі електрона	$\lambda_c = 2{,}426\cdot10^{-12}$м
Магнітна стала	$\mu_0 = 12{,}5663706144\cdot10^{-7}$ Гн/м
Маса спокою електрону	$m_e = 9{,}109534\cdot10^{-31}$кг
Маса спокою нейтрону	$m_n = 1{,}6749543\cdot10^{-27}$кг
Маса спокою протону	$m_p = 1{,}6726485\cdot10^{-27}$кг
Молярна газова стала	R = 8,31441 Дж/(моль·К)
Молярний об’єм ідеального газу при нормальних умовах	$V_0 = 22{,}41383\cdot10^{-3}$ м^3/моль
Стала Авогадро	$N_A = 6{,}022045\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$
Стала Больцмана	$k = 1{,}380662\cdot10^{-23}$ Дж/К
Стала Планка	$h = 6{,}626176\cdot10^{-34}$ Дж·с
Стала Фарадея	$F = 96{,}48456\cdot10^{3}$ Кл/моль
Швидкість світла в вакуумі	$c = 2{,}99792458\cdot10^{8}$ м/с

Астрономічні величини

Середня відстань від Землі до Місяця	$3{,}844\cdot10^{8}$м
Середня відстань від Землі до Сонця	$1{,}496\cdot10^{11}$м
Радіус Сонця	$6{,}96\cdot10^{8}$м
Радіус Землі	$6{,}37\cdot10^{6}$м
Радіус Місяця	$1{,}74\cdot10^{6}$м
Маса Сонця	$1{,}99\cdot10^{30}$кг
Маса Землі	$3{,}98\cdot10^{24}$кг
Маса Місяця	$7{,}35\cdot10^{22}$кг

Пружні властивості твердих тіл

Речовина	Модуль Юнга E, ГПа	Модуль зсуву G, ГПа	Межа міцності $\sigma_м$,МПа
Алюміній	68,5	24,5	98…390
Гетинакс	10…17	-	
Залізо	200…220	69…83,7	390…590
Латунь	78…98	26…36	98…490
Мідь	112	41,5	156…441
Свинець	16,2	5,62	19,6
Сталі різних марок			
Чавун	195…206	79…89	490…1570
	74…176	49	117…127

Густина деяких речовин

Речовина	$\rho \cdot 10^{-3}$, кг/м^3	Речовина	$\rho \cdot 10^{-3}$, кг/м^3
Тверді речовини(при 293 К)			
Алмаз	3,5	Ніхром	8,3
Алюміній	2,70	Олово	7,3
Вольфрам	19,3	Парафін	9,0
Германій	5,32	Платина	21,5
Графіт	2,1	Куховарська сіль	2,1
Залізо, сталь	7,88	Корка	0,24
Золото	19,3	Свинець	11,3
Іридій	22,4	Срібло	10,5
Цегла	1,8	Слюда	2,8
Константан	8,9	Скло	2,5
Латунь	(8,3…8,7)	Вугілля кам'яне	1,4
Лід (0^0C)	0,91	Уран	18,7
Літій	0,53	Фарфор	2,3
Манганін	8,5	Цезій	1,90
Мідь	8,93	Цинк	7,15
Нікелін	8,8	Чавун	(6,6…7,3)
Нікель	8,90	Ебоніт	1,2
Рідини (при 293 К)			
Анілін	1,02	Масло касторове мінеральне	0,96 0,92
Бензин	0,70	Масло оливкове	0,92
Бензол	0,9	Нафта	0,8-0,9
Вода при 277 К	1,00	Ртуть при 0 ^{0}C	13,6
Вода при 373 К	0,958	Скипидар	0,87
Гліцерин	1,26	Спирт етиловий	0,79
Гас	0,80	Ефір сірний	0,71
Гази (при нормальних умовах)			
Азот	1,25	Кисень	1,43
Аміак	0,77	Криптон	3,74
Аргон	1,78	Ксенон	5,85
Ацетілен	1,17	Метан	0,72
Повітря	1,29	Неон	0,90
Водень	0,09	CO_2	1,98
Гелій	0,18	Хлор	3,21

В'язкість рідин (при 20^0C), Па·с

Гліцерин 1,47	Касторове масло 1,2	Вода $1{,}0 \cdot 10^{-3}$

Діаметри d атомів і молекул, нм

Речовина	d	Речовина	d
Азот	0,31	Гелій	0,19
Аргон	0,29	Кисень	0,29
Водень	0,23	Оксид вуглецю	0,32
Водяна пара	0,26	Хлор	0,37
Вуглекислий газ	0,33		

Тиск і густина насиченої водяної пари при різних температурах

Тиск p, гПа; густина ρ_0, г/м^3

t,◦C	p	ρ_0	t,◦C	p	ρ_0	t,◦C	p	ρ_0	t,◦C	p
0	6,11	4,84	14	15,99	12,1	26	33,61	24,4	40	73,75
1	6,57	5,22	15	17,05	12,8	27	35,65	25,8	45	95,83
2	7,05	5,60	16	18,17	13,6	28	37,80	27,2	50	123,32
3	7,59	5,98	17	19,37	14,5	29	40,05	28,7	55	157,32
4	8,13	6,40	18	20,64	15,4	30	42,42	30,8	60	199,18
5	8,72	6,48	19	21,97	16,3	31	44,93	32,1	65	249,98
6	9,35	7,3	20	23,65	17,3	32	47,54	33,9	70	311,57
7	10,01	7,8	21	24,87	18,3	33	50,30	35,7	75	385,43
8	10,73	8,3	22	26,44	19,4	34	53,20	37,6	80	473,43
9	11,48	8,8	23	28,93	20,6	35	56,24	39,6	85	578,08
10	12,28	9,4	24	29,84	21,8	36	59,41		90	701,00
11	13,12	10,0	25	31,68	23,0	37	62,76		95	845,13
12	14,03	10,7	24	29,84	21,8	38	66,25		100	1013,25
13	14,97	11,4	25	31,68	23,0	39	69,91			

Густина води ρ, кг/м^3, при різних температурах

t,◦C	ρ	t,◦C	ρ	t,◦C	ρ	t,◦C	ρ
0	999,87	9	999,81	18	998,62	27	996,54
1	999,93	10	999,73	19	998,43	28	996,26
2	999,97	11	999,63	20	998,23	29	995,97
3	999,99	12	999,52	21	998,02	30	995,67
4	1000,00	13	999,40	22	997,80	31	995,37
5	999,99	14	999,27	23	997,57	32	995,05
6	999,97	15	999,13	24	997,32	33	994,72
7	999,93	16	998,97	25	997,07	34	994,40
8	999,88	17	998,80	26	996,81	35	994,06

Параметри газів (за нормальних умов)

Температурний коефіцієнт тиску β, К$^{-1}$; питома теплоємність c_p Дж/(кг·К); відношення теплоємностей $\gamma = C_p/C_v$; теплопровідність λ, Вт/(м·К); в'язкість η, мкПа·с

Газ	$\beta, 10^{-3}$	c_p	γ	λ	η
Азот	3,674	$1{,}0\cdot10^3$	1,40	0,0239	16,7
Водень	3,662	$1{,}43\cdot10^4$	1,40	0,169	8,4
Вуглекислий газ	3,726	848	1,30	0,0147	14,0
Гелій	3,660	5240	1,66	0,143	18,9
Кисень	3,674	913	1,40	0,0245	19,2
Повітря сухе*	3,674	1011	1,40	0,0241	17,5

* Склад повітря за об'ємом, %: 78,03 N_2; 20,99 O_2; 0,933 Ar; 0,03 CO_2; 0,01 H_2; 0,0018 He та ін.

Критичні значення температури і тиску

Речовина	$T_к$, К	$p_к$, МПа	Речовина	$T_к$, К	$p_к$, МПа
Азот	126	3,4	Діоксид вуглецю (CO_2)	304	7,4
Аргон	151	4,87	Гелій	5,2	0,23
Водень	33	1,28	Кисень	154,78	5,01
Водяна пара	647	21,8	Хлор	417	7,71

Поправки Ван-дер-Ваальса

Речовина	$a, \frac{Па \cdot м^6}{моль^2}$	$b, 10^{-5} \frac{м^3}{моль}$	Речовина	$a, \frac{Па \cdot м^6}{моль^2}$	$b, 10^{-5} \frac{м^3}{моль}$
Азот (N_2)	0,136	3,9	Водяна пара (H_2O)	0,554	3,0
Аргон (Ar)	0,132	3,2	Діоксид вуглецю (CO_2)	0,367	4,3
Водень (H_2)	0,024	2,7	Кисень	0,137	3,2

Питома теплоємність деяких речовин

Речовина	c, Дж/(кг · К)	Речовина	c, Дж/(кг · К)	Речовина	c, Дж/(кг · К)
Тверді речовини					
Алюминий	880	Лід ($0\ ^0$ C)	2090	Свинець	130
Бетон	880	Мідь	380	Сіра	712
Дерево	2700	Нафталін	1300	Срібло	250
Залізо,сталь	460	Олово	250	Скло	840
Золото	125	Парафін	3200	Цемент	800
Цегла	750	Песок	970	Цинк	400
Латунь	380	Платина	125	Чавун	550
Рідини					
Вода	4187	Гас	2140	Ртуть	125
Гліцерин	2430	Масло машинне	2100	Спирт (етіл.)	2430
Залізо	830	Масло трансформ.	2093	Ефір сірний	2330
Гази (при постійному тиску)					
Азот	1000	Водяна пара	2200	Кисень	920
Аміак	2100	Повітря (M=0,029 кг/моль)	1000	CO_2	830
Водень	14300	Гелій	5200		

Температура кипіння і питома теплота пароутворення

Речовина	T, K	T,^{0}C	r, МДж/кг	Речовина	T, K	T,^{0}C	r, МДж/кг
Аміак	239,6	-33,4	1,37	Ртуть	630	357	0,258
Ацетон	329,2	56,2	0,52	Скипідар	433	160	0,294
Бензин	423	150	0,3	Спирт етіловий	351	78	0,857
Вода	373	100	2,26	Фреон-12	243,2	-29,8	1,68
Повітря	81	-192	0,21	Ефир сірний	308	35	0,352
Залізо	3323	3050	0,058				

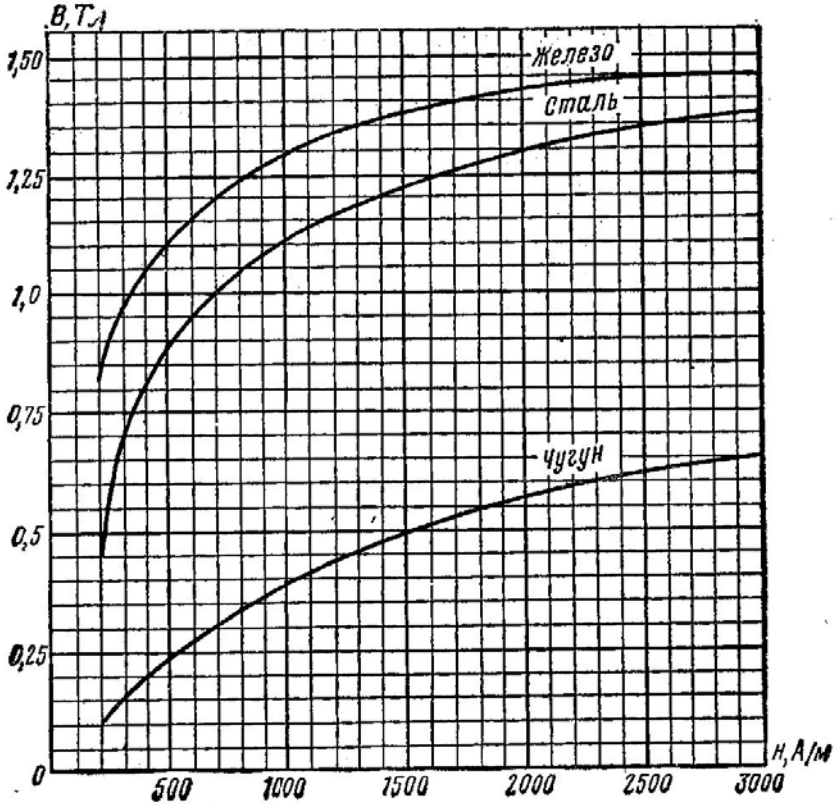
Діелектрична проникність

Речовина	ε	Речовина	ε
Вода	81	Масло трансформаторне	2,2
Восковий папір	3,7	Парафін	2
Гас	2	Скло	5,5…10
Ебоніт	2,6	Слюда	6
Кварц	2,7	Фарфор	6

Питомий опір ρ і температурний коефіцієнт опору α (при температурі t =20°C)

Провідник	ρ, í Î ì ·ì	α, K^{-1}	Провідник	ρ, í Î ì ·ì	α, K^{-1}
Алюміній	28	0,0038	Нікелін	400	0,000017
Вольфрам	55	0,0051	Ніхром	980	0,00026
Вугілля	40	-0,0008	Платина	107	0,0039
Графіт	8000	-	Ртуть	958	0,0009
Залізо	98	0,0062	Свинець	211	0,0042
Константан	480	0,00002	Сталь	120	0,006
Мідь	17,2	0,0043			

Залежність індукції B у феромагнетиках від напруженості магнітного поля H



Показники заломлення світла n в деяких речовинах

Гази	n	Рідини	n	Тверді тіла	n
Азот	1,00030	Бензол	1,50	Алмаз	2,42
Повітря	1,00029	Вода	1,33	Кварц плавлений	1,46
Кисень	1,00027	Гліцерин	1,47	Скло (звичайне)	1,50
		Сірковуглець	1,63		

Примітка. Показники заломлення залежать також від довжини хвилі світла, тому наведені значення n слід розглядати як умовні.

Робота виходу електронів з металу

Метал	А. еВ	Метал	А. еВ	Метал	А. еВ
Алюміній	3,74	Калій	2,15	Нікель	4.84
Барій	2,29	Кобальт	4,25	Платина	5,29
Вісмут	4,62	Літій	2,39	Срібло	4,28
Вольфрам	4,50	Мідь	4,47	Титан	3,92
Залізо	4,36	Молібден	4,27	Цезій	1.89
Золото	4.58	Натрій	2.27	Цинк	3,74

Назви, символи та атомні маси деяких хімічних елементів

№ п/п	Назва	Символ	Атомна маса	№ п/п	Назва	Символ	Атомна маса
1	Водень	H	1,0079	56	Барій	Ba	137,33
2	Гелій	He	4,00260	57	Лантан	La	138,9055
3	Літій	Li	6,90041	58	Церій	Se	140,12
4	Берилій	Be	9,01218	59	Празеодим	Pr	140,9077
5	Бор	B	10,81	60	Неодим	Nd	144,24
6	Вуглець	C	12,011	61	Прометій	Pn	[145]
7	Азот	N	14,0067	62	Самарій	Sn	150,4
8	Кисень	O	15,9994	63	Європій	Eo	151,96
9	Фтор	F	18,9984	64	Гадоліній	Gd	157,25
10	Неон	Ne	20,179	65	Тербій	Tb	158,9254
11	Натрій	Na	22,98977	66	Диспрозій	Dy	162,50
12	Магній	Mg	24,305	67	Гольмій	Ho	164,9304
13	Алюміній	Al	26,98154	68	Ербій	Er	167,26
14	Кремній	Si	28,0855	69	Тулій	Tm	168,9342
15	Фосфор	P	30,97376	70	Ітербій	Yb	173,04
16	Сера	S	32,06	71	Лютецій	Lu	174,967
17	Хлор	Cl	35,453	72	Гафній	Hf	178,49
18	Аргон	Ar	39,948	73	Тантал	Ta	180,947
19	Калій	K	39,0983	74	Вольфрам	W	183,85
20	Кальцій	Ca	40,08	75	Реній	Re	186,21

21	Скандій	Sc	44,9559	76	Осмій	Os	190,2
22	Титан	Ti	47,90	77	Іридій	Ir	192,22
23	Ванадій	V	50,9415	78	Платина	Pt	195,08
24	Хром	Cr	51,996	79	Золото	Au	196,97
25	Марганець	Mn	54,9380	80	Ртуть	Hg	200,59
26	Залізо	Fe	55,847	81	Талій	Tl	204,38
27	Кобальт	Co	58,9332	82	Свинець	Pb	207,2
28	Нікель	Ni	58,71	83	Вісмут	Bi	208,98
29	Мідь	Cu	63,546	84	Полоній	Po	[209]
30	Цинк	Zn	65,38	85	Астат	At	[210]
31	Галій	Ga	69,735	86	Радон	Rn	[222]
32	Германій	Ge	72,59	87	Францій	Fr	[223]
33	Миш'як	As	74,9216	88	Радій	Ra	226,03
34	Селен	Se	78,96	89	Актиній	Ac	[227]
35	Бром	Br	79,904	90	Торій	Th	232,04
36	Криптон	Kr	83,80	91	Протактиній	Pa	[231]
37	Рубідій	Rb	85,467	92	Уран	U	238,03
38	Стронцій	Sr	87,62	93	Нептуній	Np	[237]
39	Ітрій	Y	88,9059	94	Плутоній	Pu	[244]
40	Цирконій	Zr	91,22	95	Америцій	Am	[247]
41	Ніобій	Nb	92,9064	96	Кюрій	Cm	[247]
42	Молібден	Mo	96,94	97	Берклій	Bk	[247]
43	Технецій	Tc	98,9062	98	Каліфорній	Cf	[251]
44	Рутеній	Ru	101,07	99	Ейнштейній	Es	[252]
45	Родій	Rh	102,9055	100	Фермій	Fm	[257]
46	Паладій	Pd	106,4	101	Менделевій	Md	[258]
47	Срібло	Ag	107,868	102	Нобелій	No	[259]
48	Кадмій	Cd	112,401	103	Лоуренсій	Lr	[260]
49	Індій	In	114,82	104	Дубній	Db	[261]
50	Олово	Sn	118,69	105	Джоліотій	Jl	[262]
51	Сурма	Sb	122,75	106	Резерфордій	Rf	[263]
52	Телур	Te	127,60	107	Борій	Bh	[262]
53	Йод	I	125,9045	108	Ганій	Hn	[265]
54	Ксенон	Xe	131,30	109	Майтнерій	Mt	[266]
55	Цезій	Cs	132,9054	110	Унуннілій	Uun	

Атомна маса $m_{ат}$ деяких нуклідів

Нуклід	$m_{ат}$	Нуклід	$m_{ат}$
Водень (^{1}H)	1,007825	Титан (^{50}Ti)	49,944736
Дейтерій (^{2}H)	2,014108	Титан (^{51}Ti)	50,949858
Тритій (^{3}H)	3,016028	Ванадій (^{52}V)	51,944800
Гелій(^{3}He)	3,016045	Марганець (^{55}Mn)	54,930249
Гелій(^{4}He)	4,002596	Кобальт (^{58}Co)	57,935776
Літій (^{6}Li)	6,015110	Стронцій (^{90}Sr)	89,907711
Літій (^{7}Li)	7,016046	Полоній (^{210}Po)	209,982760
Берилій (^{7}Be)	7,016925	Радон (^{226}Rn)	222,017422
Бор (^{11}B)	11,009304	Радій (^{226}Ra)	226,025279
Вуглець (^{14}C)	14,003217	Торій (^{232}Th)	232,038112
Силіцій (^{31}Si)	30,975350	Уран (^{238}U)	238,050637
Фосфор (^{31}P)	30,973762	Уран (^{239}U)	239,054149
Кальцій (^{44}Ca)	43,95549	Плутоній (^{239}Pu)	239,052037

Період піврозпаду $T_{1/2}$ деяких радіоактивних нуклідів

Нуклід	$T_{1/2}$	Нуклід	$T_{1/2}$
Вуглець (^{14}C)	5 730 років	Радій (^{226}Ra)	1 620 років
Кобальт (^{58}Co)	71 доба	Торій (^{232}Th)	$1{,}41\cdot10^{10}$ років
Стронцій (^{90}Sr)	28 років	Уран (^{238}U)	$4{,}5\cdot10^{9}$ років
Полоній (^{210}Po)	140 діб	Уран (^{239}U)	23,54 хвилини
Радон (^{226}Rn)	3,82 доби	Плутоній (^{239}Pu)	24 390 років

Масові коефіцієнти ослаблення (рентгенівське випромінювання, вузький пучок)

λ, пм	Масовий коефіцієнт ослаблення μ/ρ, см^3/г				
	Повітря	Вода	Алюміній	Мідь	Свинець
10		0,16	0,16	0,36	3,8
20		0,18	0,28	1,5	4,9
30		0,29	0,47	4,3	14
40		0,44	1,1	9,8	31
50	0,48	0,66	2,0	19	54
60	0,75	1.0	3,4	32	90
70	1,3	1,5	5,1	48	139
80	1,6	2,1	7,4	70	
90	2,1	2,8	11	98	
100	2,6	3.8	15	131	
150	8,7	12	46	49	
200	21	28	102	108	
250	39	51	194	198	

Предметний покажчик

Абсолютно тверде тіло 13
Активність 538
Ампер (одиниця струму) 343;379
Аналізатор 471

Биття 431

Вебер (од. магнітного потоку) 380
Вага тіла 49
Вектор 12
– електричного зміщення 294
– магнітної індукції 374
– Умова-Пойнтінга 440
Випромінювання теплове 472
Вольт 288
Вузол 435

Генрі (одиниця індуктивності) 382
Гістерезіс магнітний 386
Градієнт 279
Граничний кут 464
Густина енергії електричного поля 297
– – магнітного поля 386
– заряду лінійна 284
– – поверхнева 284
– – об'ємна 284
– потоку енергії 440
– струму 343

Декремент логарифмічний 427
Дефект маси 537
Деформація пружна 50
Дивергенція 279
Дисперсія 436
– дифракційної гратки кутова 469
– – – лінійна 469
Диполь електричний 291
Дипольний момент 291
Дифракційна ґратка 468
Дифракція 468
– Фраунгофера 468
Діелектрики 291
Діелектрична проникність 283; 294
− сприйнятливість 293
Джерело струму 344
Добротність 427
Добуток векторів скалярний 12
− − векторний 12

Еквіпотенціальна поверхня 289
Електричне поле 277
Електричний диполь 291
– заряд 277
– опір 346
– струм 343
Електроємність конденсатора 295
– – плоского 295
– – сферичного 296
– – циліндричного 296
– провідника 295
Електрон 277
Електрорушійна сила 345
– – індукції 380
– – самоіндукції 382
Елемент струму 375
Енергія електростатична 297
– зв'язку 537
− кінетична 76
− обертального руху 102
− потенціальна 77
Енергетичний вихід реакції 539
Ефект Допплера 439
– Керра 472
– Комптона 475
– Коттона-Мутона 472
Ефективний
– діаметр 194
– переріз 194
Закон Авогадро 158
– Амонтона - Кулона 52
– Ампера 378
− Архімеда 132
– Біо-Савара-Лапласа 375
– Бойля – Маріотта 157
– Брюстера 470
– Віна 473
– всесвітнього тяжіння 48
– Гука 50
– Гей-Люссака 157
– Дальтона 159
− Джоуля-Ленца 348
− заломлення світла 48
– збереження імпульсу 75
– – заряду 278
− − енергії 77
− − моменту імпульсу 102
– Ейнштейна 475

Закон індукції електромагнітної 380
– Комптона 475
– Кулона 283
– Малюса 471
– Мозлі 523
− Ньютона 46, 47
– ослаблення випромінювання 539
– Ома 345; 347
– – в диференціальній формі 346
– Паскаля 132
− радіоактивного розпаду 538
− руху рівнозмінного прямолінійного 16
− − рівномірного прямолінійного 17
− сполучених посудин 132
− Столєтова 474
– Фіка 196
– Фур'є 197
– Шарля 157
Заряд електричний 277
– вільний 294
– зв'язаний 293
– негативний 277
– позитивний 277
– точковий 283
Звуку висота 438
− гучність 438
– інтенсивність 438
– тембр 438
Здатність випромінювальна 472
– – спектральна 473
– поглинальна 473
Зони Френеля 468

Індуктивність 382
Інтенсивність 437
Інтерференція 466
Імпульс (кількість руху) 47
Індукція електростатична 295
− електромагнітна 380
Кілограм 9
Кільця Ньютона 467
Когерентність 466
Коефіцієнт взаємної індукції 382
– внутрішнього тертя 196
– дифузії 196
– згасання 10,11
– Пуассона 212
– теплопровідності 197
Коливання 422
– вільні 423,426
– вимушені 427
– власні 423
– гармонічні 423
– електромагнітні 422
– механічні 422
– періодичні 423
– амплітуда 423
– період 423
– фаза 423
– частота 423
– – циклічна 423
Конденсатор 295
Контур коливальний 426
Кути Ейлера 20

Лінія
– напруженості електричного поля 285
– магнітної індукції 374

Магнетики 385
Магнітна проникність 386
– сприйнятливість 386
Магнітний потік 379
Матеріальна точка 13
Маятник математичний 425
– пружний 424
– фізичний 424
Метр 8
Моль 144
Момент дипольний електричний 291
Момент інерції тіла 99
− імпульсу 101
− сили 100
– струму магнітний 376

Намагниченість 385
Напруга електричного поля 345
Напруженість поля електричного 284
– – магнітного 374
Нерівність Клаузіуса 242

Ом (одиниця опору) 346
Оператор «набла» 279
– Лапласа 280
Опір електричний 346
– – внутрішній 347
– – зовнішній 347
– питомий 346

Оптична різниця ходу 466
Оптична сила
– лінзи 465
– сферичного дзеркала 465
Освітленість 462

Парамагнетики 386
Параметри
– критичні 256
– термодинамічні 151
Переміщення 14
Період дифракційної ґратки 468
– піврозпаду 538
Подвійне променезаломлення 470
Показник заломлення
– абсолютний 464
– відносний 464
Поле векторне 278
– вихрове 278
– диполя 291
– електричне 277
– електромагнітне 277
– електростатичне 277, 283
– магнітне 374
– однорідне 286
– потенціальне 288
– скалярне 278
Поляризатор 471
Поляризація діелектриків 291
Поріг ядерної реакції 540
Потенціал електростатичного поля 288
Потік вектора напруженості 286
– енергії 462
– магнітний 379
– світловий 462
Потужність 76
Потужність струму 348
Принцип Гюйгенса-Френеля 468
– суперпозиції 284, 375
Правила Кірхгофа 347
– лівої руки 377
– свердлика 377
Прискорення вільного падіння 49
− кутове 18
− миттєве 16
− нормальне 16
− середнє 16
Прискорення тангенціальне 16
Провідник 343
Провідність питома 346
Процес адіабатний 157, 213
– ізобарний 157
– ізотермічний 157
–ізохорний 157
– коловий (цикл) 153
– необоротний 153
– оборотний 153
– політропний 214
– релаксації 152
– рівноважний 152

Резонанс 428
Рівняння Бернуллі 134
− Ван-дер-Ваальса 255
− динаміки обертального руху тіла 101
− дифузії 196
− електромагнітної хвилі 440
− Клапейрона – Клаузіуса 261
− коливань
– – вільних (згасаючих) 426
– – вимушених 427
– – власних 423
− Менделєєва –Клапейрона 158
− Мещерського 75
− МКТ ідеальних газів 176
− нерозривності струменю 133
− Ньютона 196
− теплопровідності 197
– хвильове 434
– Шредінгера 521
Різниця потенціалів 288
Робота 76
− сторонніх сил 349
− струму постійного 348
Розгалужені кола 347
Розмірність 10
Ротор вектора 279

Самоіндукція 382
Світло поляризоване 469
– – еліптично 469
– – лінійно 469
– – циркульно 470
– – частково 470
– природне 470

Світність 463
Секунда 8
Сила Архімеда (виштовхування) 132
– Ампера 378
− гравітаційної взаємодії 48
− дисипативна 77
− електрорушійна 345
− інерції 122
− інерції відцентрова 122
− квазіупружна 425
− консервативна 76
− Коріоліса 122
− Лоренца 377
− опору 134
− пружності 50
− реакції опори 52
– стороння 344
– світла 462
– струму 343
− тертя 52
− − в'язкого 134
− − ковзання 52
− − кочення 53
− − сухого 52
− тяжіння 49
Система відліку 14
− інерціальна 46
− неінерціальна 122
Система термодинамічна 151
– адіабатна 151
– відкрита 151
– закрита 151
– замкнена 151
– ізольована 151
Скаляр 12
Співвідношення невизначеностей 520
Стан системи
− − нерівноважний 151
− − рівноважний 151
− − стаціонарний 152
Струм електричний 343
– постійний 343
Ступені вільності 19

Теорема Гауса 286; 294; 380
– Остроградського 281
– Стокса 282
Тесла (од. індукції магнітного поля) 374
Теплоємність молярна 211
Теплоємність системи 211
– питома 211

Тиск 131
− атмосферний 131
− гідростатичний 131
Точка
потрійна 261
критична 256
Траєкторія 14

Формула барометрична 180
– Вульфа-Бреггів 469
– де Бройля 520
Фотоефект зовнішній 474
Функція розподілу Больцмана 180
– – густини ймовірності 177
– – молекул за швидкостями 178
– – у потенціальному полі 180
Функція хвильова 521
Феромагнетики 386

Хвиля 433
– звукова 437
– електромагнітна 439
– пружна 433
– стояча 435

Центр мас 48
Цикл Карно 242
Циркуляція вектора 281
– – напруженості 288
– – магнітної індукції 379

Число Рейнольдса 134

Шкала температур
– абсолютна (Кельвіна) 155
– Цельсія 155
Швидкість кутова 18
– миттєва 15
– світла 439
– середня 15
– хвилі групова 436
– – фазова 436

Юнга модуль 51
Ядерна реакція 539
Яскравість 463

Іменний покажчик

Авогадро 144
Амонтон 52
Ампер А. 378
Архімед 132
Бальмер 522
Бернуллі 134
Біо Ж. 375
Бойль 157
Больцман 159, 180, 473
Брегг 469
Брюстер 470
Ван-дер-Ваальс 255
Він 473
Вульф 469
Галілей 6, 19, 26
Гаус К. 286
Гейзенберг 520
Гей-Люссак 157
Гук 50
Гюйгенс 100, 468
Дальтон 159
Джоуль Дж. 348
Де Бройль 520
Допплер 439
Ейнштейн 7, 475
Ейлер 19
Ірншоу С. 32
Карно 242
Кельвін 155
Керр 472
Клапейрона 159,261
Клаузіус 241, 261
Комптон 475
Коріоліс 122
Коттон 472
Кулон Ш. 52, 283
Лаплас П. 8; 375
Ленц Е.Х. 348
Лоренц Л. 377
Майєр 211
Максвелл 178, 397
Малюс 471
Маріотт 157
Менделєєва 158
Мещерський 75
Мозлі 523
Мутон 472
Нернст 243
Ньютон 6, 46, 47, 196
Ом Г. 346
Паскаль 132
Планк 240,105
Пойнтінг 440
Пуассон 212
Рейнольдс 134
Савар Ф. 375
Стефан 473
Стокс 134
Столєтов 474
Томсон 240
Торрічеллі 56
Умов 440
Фарадей М. 380
Френель 468
Фур'є 431
Шарль 157
Шредінгер 521
Штейнер 100
Юнг 51

Список рекомендованої літератури

1. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики: навч. посіб. – Київ: Техніка, 1999. Т.1. 536с.
2. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики: навч. посіб. – Київ: Техніка, 2001. Т.2. 452с.
3. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики: навч. посіб. – Київ: Техніка, 1999.Т.3. 518с.
4. Савельев И.В. Курс физики: учебн. – Москва: Наука, 1989. Т.1. 352с.
5. Савельев И.В. Курс физики: учебн. – Москва: Наука, 1989. Т.2. 480с.
6. Трофимова Т.И. Курс физики: учебн. – Москва: Наука, 1985. – 432с.
7. Сивухин Д.В. Общий курс физики: учебн. пособ. – Москва: Наука, 1974. Т.1. 519с.
8. Сивухин Д.В. Общий курс физики: учебн. пособ. – Москва: Наука, 1975. Т.2. 551с.
9. Сивухин Д.В. Общий курс физики: учебн. пособ. – Москва: Физматлит, 2006. Т.3. 687с.
10. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Оптика.: учебн. пособ. – Москва: Физматлит, 1980. Т.4. 751с.
11. Калашников С.Г. Электричество: учебн. пособ. – Москва: Оникс, 2005. – 666с.
12. Загальний курс фізики. Збірник задач: навч. посібн. / Гаркуша І.П. та ін. Київ: Техніка, 2003. – 558с.
13. Новиков С.М. Сборник заданий по общей физике: учебн. пособ. – Москва: Оникс, 2007. – 512с.
14. Конспект лекцій із загальної фізики. / Герасимов О.І. та ін. Одеса: ТЕС, 2004. – 200с.

Навчальне видання

Герасимов Олег Іванович,
Андріанова Ірина Сергіївна

ФІЗИКА В ЗАДАЧАХ

Підручник

Підп. до друку Формат 60х84/16 Папір офс.
Умовн. друк. арк. Тираж Зам. №
Надруковано з готового оригінал-макета

Одеський державний екологічний університет
65016, Одеса, вул.Львівська, 15

Підприємство "ТЭС" , (0482)-42-90-98