

Глушков О.В., Серга І.М., Флорко Т.О., Буяджи В.В.

ВИЩА МАТЕМАТИКА

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

Глушков О.В., Сєрга І.М., Флорко Т.О., Буяджи В.В.

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Конспект лекцій

Одеса – 2017

ББК 2211
Г 93
УДК 519.21

*Друкується за рішенням Вченої ради Одеського державного екологічного університету
(протокол №_____ від _____.____.200__ р.).*

Глушков О.В., Серга І.М., Флорко Т.О., Буяджи В.В.

Вища математика: Конспект лекцій. –Одеса.

Викладені основні питання лінійної алгебри, аналітичної геометрії, теорії границь, диференціального та інтегрального числення функції однієї та багатьох змінних, рядів, диференціальних рівнянь, теорії ймовірностей та математичної статистики.

Для студентів спеціальності 183 "Технологія захисту навколишнього середовища".

Конспект лекцій використовується для денної форми навчання.

© Одеський державний
екологічний університет, 2017

Навчальне видання

Глушков О.В., Сєрга І.М., Флорко Т.О., Буяджи В.В.

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Конспект лекцій

Підп. до друку
Умовн. друк. арк.

Формат
Тираж

Папір
Зам. №

Надруковано з готового оригінал-макета

Одеський державний екологічний університет
65016, Одеса, вул.Львівська, 15

ПЕРЕДМОВА.....	
І ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ.....	
1.1 Визначники. Властивості, засоби обчислення.....	
1.1.1. Основні поняття.....	
1.1.2. Визначники другого і третього порядків, їх властивості.....	
1.1.3. Мінори та алгебраїчні доповнення.....	
1.1.4. Обчислення визначників.....	
1.1.5. Система лінійних рівнянь. Її сумісність та визначеність. Правило Крамера.....	
1.2 Елементи теорії матриць.....	
1.2.1 Основні поняття.....	
1.2.2. Дії з матрицями.....	
1.2.3. Обернена матриця.....	
1.2.4. Ранг матриці.....	
1.2.5. Використання методу Гауса, матричного методу, правила Крамера для розв'язку лінійних рівнянь.....	
1.3 Векторна алгебра. Скалярний, векторний та мішаний добуток.....	
1.3.1 Вектори, лінійні операції над векторами.....	
1.3.2. Скалярний, векторний і змішаний добуток векторів.....	
1.3.3. Найпростіші задачі аналітичної геометрії.....	
1.4 Пряма на площині.....	
1.4.1. Рівняння прямої у просторі.....	
1.4.2. Взаємне розміщення прямої і площини у просторі.....	
1.5 Криві другого порядку: коло, еліпс, гіпербола, парабола.....	
II АНАЛІЗ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ. ДИФЕРЕНЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ТА БАГАТЬОХ ЗМІННИХ.....	
2.1 Елементарні функції та їх властивості.....	
2.1.1. Поняття та основні способи задання функції.....	
2.1.2. Класифікація елементарних функцій.....	
2.1.3. Основні характеристики функцій.....	
2.1.4. Обернена функція.....	
2.1.5. Неявна та параметрична форми задання функцій.....	
2.2 Границя та неперервність функції.....	
2.3 Похідна, її геометричний та фізичний зміст. Таблиця похідних	

основних елементарних функцій. Диференціал функції. Застосування похідної.....	
2.3.1. Означення похідної.....	
2.3.2. Основні правила диференціювання.....	
2.3.3. Похідні від основних елементарних функцій.....	
2.3.4. Похідні вищих порядків.....	
2.4. Частинні похідні, повний диференціал. Частинні похідні другого порядку, диференціал другого порядку.....	
2.4.1 Частинні похідні.....	
2.4.2. Частинний і повний диференціали функції багатьох змінних. Диференційовані функції.....	
III ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ.....	
3.1 Первісна. Невизначений інтеграл.....	
3.1.1. Поняття первісної.....	
3.1.2. Задача інтегрування. Невизначений інтеграл.....	
3.1.3. Властивості невизначеного інтеграла.....	
3.1.4. Таблиця основних інтегралів.....	
3.2 Основні методи інтегрування.....	
3.3 Інтегрування різних класів функцій.....	
3.3.1. Основні означення.....	
3.3.2. Інтегрування дробово-раціональних функцій.....	
3.3.3. Методика інтегрування раціональних функцій.....	
3.3.4. Інтегрування тригонометричних та деяких ірраціональних функцій.....	
3.4. Поняття визначеного інтеграла.....	
3.5 Властивості визначеного інтеграла.....	
3.6 Обчислення визначеного інтегралу. Формула Ньютона—Лейбніца...	
3.7 Застосування визначеного інтеграла.....	
3.8 Невласні інтеграли.....	
3.8.1. Невласні інтеграли I роду (з нескінченими межами).....	
3.8.2. Ознаки збіжності невластних інтегралів першого роду.....	
3.8.3. Невласні інтеграли другого роду (від необмежених функцій).....	
IV ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ.....	
4.1 Основні типи диференціальних рівнянь першого порядку та засоби їх розв'язання.....	
4.1.1. Основні поняття.....	

4.1.2. Диференціальні рівняння першого порядку.....	
4.1.3. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.....	
4.1.4. Однорідні диференціальні рівняння.....	
4.1.5. Лінійні рівняння.....	
4.1.6 Рівняння Бернуллі.....	
4.2 Диференціальні рівняння вищих порядків.....	
4.2.1 Диференціальні рівняння другого порядку, що допускають пониження порядку.....	
4.2.2 Лінійні диференціальні рівняння.....	
4.2.3. ЛОДР - 2 зі сталими коефіцієнтами.....	
4.2.4. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.....	
4.3 Системи звичайних диференціальних рівнянь.....	
V РЯДИ.....	
5.1 Числові ряди. Додатні ряди та основні ознаки їх збіжності.....	
5.1.1. Основні поняття. Деякі властивості збіжних рядів.....	
5.1.2. Достатні ознаки збіжності для рядів з додатними членами.....	
5.2 Знакозмінні ряди. Абсолютна та умовна збіжність знакозмінних рядів.....	
5.3 Функціональні ряди. Степеневі ряди. Ряди Тейлора й Маклорена.....	
5.3.1. Функціональні ряди.....	
5.3.2 Степеневі ряди.....	
5.3.3. Ряди Тейлора й Маклорена.....	
5.4 Тригонометричні ряди.....	
5.4.1. Ряд Фур'є і коефіцієнти Фур'є для періодичної функції періодом 2π	
5.4.2. Розкладання функцій у тригонометричні ряди.....	
VI ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ.....	
6.1 Елементи комбінаторики.....	
6.2 Випадкові події та їх ймовірності.....	
6.2.1. Випадкова подія. Ймовірність події.....	
6.2.2. Теореми додавання ймовірностей. Протилежні випадкові події	
6.2.3. Теореми множення ймовірностей. Умовна імовірність.....	
6.2.4. Формула повної ймовірності. Формула Байєса.....	
6.2.5. Випробування Бернуллі.....	

6.2.6. Локальна та інтегральна теореми Лапласа.....	
6.3 Випадкові величини та їх властивості.....	
6.3.1. Дискретна випадкова величина. Закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини.....	
6.3.2. Математичне сподівання та дисперсія дискретної випадкової величини.....	
6.3.3. Неперервна випадкова величина і її закон розподілу ймовірностей.....	
6.3.4. Числові характеристики неперервної випадкової величини.....	
6.3.5. Мода та медіана випадкової величини.....	
6.4 Системи випадкових величин.....	
6.4.1. Системи дискретних випадкових величин та їх числові характеристики.....	
6.4.2. Умовні закони розподілу системи двох дискретних випадкових величин.....	
6.4.3. Системи неперервних випадкових величин та їх закон розподілу ймовірностей.....	
6.4.4. Числові характеристики системи неперервних випадкових величин.....	
6.4.5. Умовні закони розподілу неперервних випадкових величин.....	
6.5 Елементи математичної статистика.....	
6.5.1. Основні відомості з математичної статистики.....	
6.5.2. Генеральна та вибіркова сукупності	
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	

ПЕРЕДМОВА

Дисципліна “Вища математика” є однією з основних дисциплін фундаментального циклу у підготовці фахівців зі спеціальності 183 «Технології захисту навколишнього середовища». Вона відображує нові вимоги, що ставляться до математичної освіти сучасного інженера. Її характеризують прикладна спрямованість та орієнтація на навчання студентів застосуванню математичних методів для вирішення прикладних задач.

Мета дисципліни – розгляд проблем векторної алгебри, матричного числення, аналітичної геометрії, засвоєння основних методів розв’язання систем лінійних рівнянь, теорії ймовірностей, вивчення математичного аналізу, до складу якого входять диференціальне числення, інтегральне числення та теорія функцій дійсної змінної, ряди, теорія диференціальних рівнянь, аналіз отриманих результатів.

В результаті вивчення цієї дисципліни студент повинен знати математичну символіку, визначення, основні теореми, передбачені програмою дисципліни, вміти влучно і стисло виражати математичну думку під час розв’язання конкретних задач, самостійно розв’язувати типові задачі, що найбільш часто зустрічаються, використовуючи для цього набуті під час вивчення цієї дисципліни знання, аналізувати отримані результати.

Здобуті у процесі вивчення вищої математики знання повинні створити базу, необхідну для вивчення багатьох спеціальних дисциплін професійно – орієнтованого циклу, що формують фахівця в галузі.

І ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

1.1 Визначники. Властивості, засоби обчислення

1.1.1. Основні поняття

Предметом розгляду лінійної алгебри для економістів є насамперед теорія систем лінійних рівнянь, які в загальному вигляді можна подати так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (1.1)$$

Система (1.1) називається системою m лінійних рівнянь з невідомими (змінними), де $x_1, x_2, \dots, x_n$ — невідомі; a_{ij} ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$) — коефіцієнти системи рівнянь; b_i ($i = \overline{1, m}$) — вільні члени, або праві частини системи рівнянь. Якщо всі $b_i = 0$ ($i = \overline{1, m}$), то система лінійних рівнянь називається однорідною.

Розв'язком системи рівнянь (1.1) є множина таких чисел $k_1, k_2, \dots, k_n$, у результаті підставлення яких замість відповідних невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$ у кожне з рівнянь системи (1.1) останні перетворюються на правильні числові рівності.

Якщо система рівнянь не має жодного розв'язку, вона називається несумісною, а якщо має хоча б один розв'язок — сумісною. Сумісна система рівнянь називається визначеною, якщо вона має єдиний розв'язок, і невизначеною, якщо розв'язків більш як один.

1.1.2. Визначники другого і третього порядків, їх властивості

Розглянемо спочатку системи рівнянь, в яких кількість невідомих і кількість рівнянь рівні між собою, тобто $m = n$. Нехай, наприклад, $n = m = 2$, тоді маємо систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

Визначником другого порядку називається вираз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Приклад.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - (-1) \cdot 4 = 10.$$

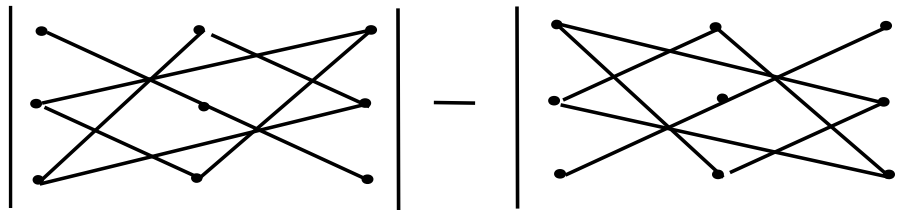
Якщо $n = m = 3$, то маємо систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Визначником третього порядку називається вираз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \quad (1.2)$$

Для запам'ятовування правила обчислення визначника третього порядку пропонуємо таку схему (правило трикутників):



Позначимо точками елементи визначника, тоді доданки зі знаком «плюс» — це добутки елементів a_{11} , a_{22} , a_{33} , розміщених на головній діагоналі визначника, і добутки елементів a_{13} , a_{21} , a_{32} і a_{12} , a_{23} , a_{31} , розміщених у вершинах рівнобедрених трикутників, основи яких паралельні головній діагоналі. Зі знаком «мінус» беруться доданки, що є добутками елементів a_{13} , a_{22} , a_{31} , розміщених на сторонній діагоналі визначника, та у вершинах рівнобедрених трикутників, основи яких паралельні сторонній діагоналі визначника — a_{11} , a_{23} , a_{32} і a_{12} , a_{21} , a_{33} .

Запропонуємо ще одне правило обчислення визначника третього порядку (правило Саррюса).

У початковому визначнику за третім стовпцем запишемо ще раз перший і другий стовпці:

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right|$$

Для знаходження визначника за цим правилом треба утворити зі знаком «плюс» алгебраїчну суму добутків елементів, розміщених на головній діагоналі визначника, і на діагоналях, паралельних їй, а зі знаком «мінус» — добутків елементів, розміщених на сторонній діагоналі, та на діагоналях, паралельних їй.

Визначник:

$$\left| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{array} \right|,$$

рядки якого є стовпцями попереднього визначника, є транспонованим щодо визначника (1.2).

Властивість 1. Визначник не змінюється в результаті транспонування.

З властивості 1 випливає, що будь-яке твердження, котре справджується для рядків визначника, справджується і для його стовпців, і навпаки.

Властивість 2. Якщо один із рядків визначника складається лише з нулів, то такий визначник дорівнює нулю.

Властивість 3. Якщо поміняти місцями будь-які два рядки визначника, то його знак зміниться на протилежний.

Властивість 4. Визначник, який має два однакові рядки, дорівнює нулю.

Властивість 5. Якщо елементи будь-якого рядка визначника помножити на стале число C , то й визначник помножиться на C .

З останньої властивості випливає, що спільний множник елементів рядка можна виносити за знак визначника.

Властивість 6. Визначник, який має два пропорційні рядки, дорівнює нулю.

Властивість 7. Якщо всі елементи будь-якого рядка визначника можна подати у вигляді суми двох доданків, то такий визначник дорівнює сумі двох визначників, у яких елементами цього рядка будуть відповідно перший доданок у першому визначнику і другий доданок у другому

визначнику, а решта елементів будуть ті самі, що й у початковому визначнику.

Властивість 8. Визначник не зміниться, якщо до елементів будь-якого рядка додати відповідні елементи довільного іншого рядка, попередньо помножені на деяке число.

1.1.3. Мінори та алгебраїчні доповнення

Нехай визначник має n рядків і n стовпців. Мінором k -го порядку $k \in [1; n-1]$ називається визначник, утворений з елементів, розміщених на перетині будь-яких k рядків і k стовпців визначника. Зрозуміло, що мінор першого порядку — це будь-який елемент визначника.

Приклад. Утворити кілька мінорів другого і один мінор третього порядку такого визначника:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 6 & -7 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$M_2^1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, M_2^2 = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, M_2^3 = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \dots, M_3^1 = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 2 & -7 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Мінори M_2^1 , M_2^2 , M_2^3 другого порядку утворюються з елементів, розміщених на перетині першого, другого рядків; першого, другого стовпців; третього, четвертого рядків; першого, третього стовпців; другого, четвертого рядків; третього, четвертого стовпців. Мінор M_3^1 третього порядку утворюється з елементів, розміщених на перетині другого, третього, четвертого рядків і першого, третього, четвертого стовпців.

Верхній індекс означає нумерацію мінорів; нижній індекс — порядок мінора.

Доповняльним мінором для мінора k -го порядку називається такий мінор, який лишається у визначнику після викреслювання тих k рядків і тих k стовпців, на перетині яких містяться елементи, що утворили мінор k -го порядку.

Нехай мінор k -го порядку утворено з елементів, розміщених на перетині $i_1, i_2, \dots, i_k$ рядків і $j_1, j_2, \dots, j_k$ стовпців.

Алгебраїчним доповненням до мінора k -го порядку є доповняльний мінор $(n-k)$ -го порядку, узятий зі знаком $(-1)^{S_m}$, де $S_m = i_1 + i_2 + \dots + i_k + j_1 + j_2 + \dots + j_k$. Якщо сума s_m номерів рядків і стовпців парна, то

береться знак «+», якщо непарна — то знак «-».

Далі важливу роль відіграватиме алгебраїчне доповнення до мінора першого порядку. Нехай a_{ij} — будь-який елемент-мінор першого порядку у визначнику n -го порядку, тоді $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{n-1}$ буде алгебраїчним доповненням до мінора a_{ij} . Тут M_{n-1} — доповняльний мінор $(n-1)$ -го порядку, утворений викреслюванням i -рядка і j -стовпця в початковому визначнику n -го порядку.

1.1.4. Обчислення визначників

Означення. Визначником n -го порядку називається число Δ , яке дорівнює алгебраїчній сумі добутків елементів будь-якого рядка або стовпця на відповідні їм алгебраїчні доповнення:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{ij}A_{ij} + \dots + a_{in}A_{in} =$$

$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{ij}A_{ij} + \dots + a_{nj}A_{nj}. \quad (1.3)$$

Алгебраїчні доповнення, що входять до формули (1.3), за якою обчислюють визначник, є, у свою чергу, мінорами, узятими з відповідними знаками, тобто визначниками $(n-1)$ -го порядку. Отже, обчислення визначника n -го порядку зводиться до обчислення n визначників $(n-1)$ -го порядку.

Але з формули (1.3) випливає, що за наявності у визначнику нульових елементів відповідні алгебраїчні доповнення обчислювати не потрібно.

Згідно з властивістю 8, яка справджується для визначників будь-якого порядку, можна визначник перетворити так, щоб у його рядках або стовпцях усі елементи, крім одного, дорівнювали нулю. І тоді, розклавши визначник за елементами цього рядка або стовпця, зведемо задачу знаходження визначника n -го порядку до знаходження одного визначника $n-1$ -го порядку.

1.1.5. Система лінійних рівнянь. Її сумісність та визначеність. Правило Крамера

Розглянемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nj}x_j + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1.4)$$

Величини $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{mn}$ зовуть коефіцієнтами даної лінійної системи рівнянь. Індекси біля коефіцієнтів означають номер рівняння системи та номер невідомого.

Величини $b_1, b_2, \dots, b_m \in \mathbb{R}$ вільні члени системи.

Система рівнянь однорідна, якщо всі $b_i = 0$ ($i = \overline{1, m}$), і неоднорідна, якщо хоча б одне $b_i \neq 0$.

Упорядковану множину n чисел $k_1, k_2, \dots, k_n$ зовуть розв'язком системи, якщо при їх підстановці у систему замість невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$ усі рівняння системи перетворюються у тотожності. Система рівнянь сумісна, якщо вона має хоча б один розв'язок, і несумісна, якщо вона не має жодного розв'язку.

Сумісну систему лінійних рівнянь зовуть визначеною, якщо вона має єдиний розв'язок, тобто існує тільки один набір n чисел $k_1, k_2, \dots, k_n$, який перетворює усі рівняння системи у тотожності.

Сумісна система лінійних рівнянь є невизначеною, якщо розв'язків більше ніж один.

Система однорідних рівнянь завжди має нульовий розв'язок:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0.$$

Якщо система однорідних рівнянь має ненульовий розв'язок $k_1, k_2, \dots, k_n$, (тобто, хоча б одне з цих чисел відмінне від нуля), то така система має і незліченну множину розв'язків вигляду $\alpha k_1, \alpha k_2, \dots, \alpha k_n$, де $\alpha \in \mathbb{R}$.

Теорема. Якщо головний визначник Δ , складений із коефіцієнтів при невідомих системи n лінійних рівнянь з n невідомими (1.4), відмінний від

нуля, то така система рівнянь має єдиний розв'язок (сумісна і визначена), який обчислюється за формулами:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

де Δ — головний визначник системи, який утворюється з коефіцієнтів при невідомих у лівій частині системи (1.4);

Δ_j — визначник, який утворюється заміною j -го стовпця в головному визначнику на стовець вільних членів.

1.2 Елементи теорії матриць

1.2.1 Основні поняття

Розглянемо ще один математичний об'єкт, пов'язаний із системою рівнянь (1.1).

Означення. Матрицею називається прямокутна таблиця чисел, яка має m рядків і n стовпців. Якщо повернутися до системи рівнянь (1.1), то коефіцієнти при невідомих у лівій частині якраз і утворюють таку прямокутну таблицю:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа a_{ij} називаються елементами матриці, а запис $m \times n$ означає її розмір. Зауважимо, що на першому місці в цьому запису зазначено кількість рядків матриці, а на другому — кількість стовпців. Наприклад, запис розміру матриці 5×3 означає, що в ній п'ять рядків і три стовпці. Якщо кількість рядків матриці дорівнює кількості її стовпців, то матриця називається квадратною.

Дві матриці рівні між собою, якщо вони мають однаковий розмір і всі їх відповідні елементи рівні між собою.

Елементи з двома однаковими індексами $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ утворюють головну діагональ матриці. Якщо $a_{ij} = a_{ji}$, то матриця називається симетричною.

Квадратна матриця, в якій елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці, а всі інші нулю, називається одиничною матрицею:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Коли всі елементи матриці, що містяться по один бік від головної діагоналі, дорівнюють нулю, то матриця називається трикутною.

Кожній квадратній матриці можна поставити у відповідність визначник, який складається з тих самих елементів.

$$\Delta(A) = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Якщо такий визначник відмінний від нуля, то матриця називається неособливою, або невиродженою. Якщо визначник дорівнює нулю, то матриця особлива, або вироджена.

1.2.2. Дії з матрицями

1. Сумою матриць одного й того самого порядку $A = (a_{ij})$ і $B = (b_{ij})$ називається матриця $C = A + B$; $C = (c_{ij})$, будь-який елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів матриць

A і B : $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Наприклад обидві матриці $A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -7 & 3 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & -7 & 10 \\ 1 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ мають розмір 3×4 , тому за означенням можна

утворити їх суму — матрицю

2.

$$C = \begin{pmatrix} 5+0 & -8+1 & 0+2 & 2-1 \\ 4+5 & 3+6 & 1-7 & 2+10 \\ -1+1 & 2-3 & -7+4 & 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 2 & 1 \\ 9 & 9 & -6 & 12 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Добутком матриці $A = (a_{ij})$ на деяке число α називається така

матриця C , кожен елемент якої c_{ij} утворюється множенням відповідних елементів матриці A на α , $c_{ij} = \alpha a_{ij}$.

Приклад. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\alpha = -2$; $C = \alpha A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -6 & -2 & -4 \end{pmatrix}$.

Очевидно, що для суми матриць і добутку матриць на число виконуються рівності:

1) $A + B = B + A$; 2) $\alpha A = A\alpha$; 3) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$; 4) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$, 5) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.

Добутком матриці $A = (a_{ij})$ розміру $m \times p$ на матрицю $B = (b_{ij})$ розміру $p \times n$ називається така матриця $C = AB$ розміру $m \times n$, $C = (c_{ij})$, кожен елемент можна знайти за формулою:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj}.$$

Кожний елемент матриці C утворюється як сума добутків відповідних елементів i -го рядка матриці A на відповідні елементи j -го стовпця матриці B , тобто за схемою:

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \vdots & b_{1j} & \vdots \\ \vdots & b_{2j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & b_{pj} & \vdots \end{pmatrix}$$

Зазначимо, що в результаті множення дістанемо матрицю розміру $m \times n$.

З означення випливає, що добуток матриць некомутативний: $AB \neq BA$.

Повернемося до системи рівнянь (1.1) і утворимо матриці: A — коефіцієнтів при невідомих, X — невідомих, B — вільних членів:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Тоді згідно з означенням добутку матриць систему рівнянь (1.1) можна записати в матричному вигляді:

$$AX = B, \tag{1.5}$$

який значно скорочує запис системи рівнянь.

1.2.3. Обернена матриця

Означення. Матриця A^{-1} називається оберненою матрицею до квадратної невинродженої матриці A , якщо виконуються співвідношення: $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Нехай дано квадратну матрицю A . Доведемо, що коли $\Delta(A) \neq 0$, існує обернена матриця A^{-1} . Розглянемо матрицю:

$$B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Утворимо добутки AB і BA .

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = C.$$

За правилом множення матриць елементи матриці C знаходимо за формулою:

$$c_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn}. \quad (1.6)$$

Якщо $i = j$, то згідно з формулою (1.3) маємо: $c_{ii} = \Delta(A)$, тобто знаходимо значення визначника матриці A ; якщо $i \neq j$, то вираз (1.6) є сумою добутків елементів i -го рядка визначника на алгебраїчні доповнення, що відповідають j -му рядку цього самого визначника. За властивістю 9 визначників така алгебраїчна сума дорівнює нулю. Отже,

$c_{ij} = 0$, якщо $i \neq j$. Матриця C набирає вигляду: $C = \begin{pmatrix} \Delta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Delta & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \Delta \end{pmatrix}$. Щоб

ця матриця стала одиничною, треба помножити її на $\frac{1}{\Delta(A)}$.

$$E = \frac{1}{\Delta(A)} C = A \frac{1}{\Delta(A)} B = AA^{-1}.$$

Отже, обернена матриця має вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Доведемо, що для матриці A матриця A^{-1} єдина. Для цього припустимо протилежне. Нехай існує одна матриця C , така що $AC = CA = E$. Тоді

$$CAA^{-1} = C(AA^{-1}) = CE = C,$$

а водночас

$$CAA^{-1} = (CA)A^{-1} = EA^{-1} = A^{-1}, \text{ звідси } C = A^{-1}.$$

Доходимо висновку, що початкове припущення неправильне, тобто обернена матриця єдина.

Повернемось тепер до виразу (1.5) — запису системи рівнянь у матричному вигляді $AX = B$. Припустимо, що система складається з n лінійних рівнянь з n невідомими, матриця A — квадратна і $\Delta(A) \neq 0$ — матриця невироджена. Тоді для матриці A побудуємо обернену A^{-1} — вона за тих припущень, які щойно зроблено, існує. Помноживши тепер матричну рівність $AX = B$ зліва на матрицю A^{-1} , дістанемо:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow EX = A^{-1}B,$$

або остаточно $X = A^{-1}B$.

Останній вираз — це розв'язок системи лінійних рівнянь. Зауважимо, що в такому вигляді можна записати розв'язок будь-якого матричного рівняння, якщо матриця A задовольняє умови існування A^{-1} .

1.2.4. Ранг матриці

Розглянемо матрицю A розміром $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

і введемо ще одне важливе поняття.

Означення. Рангом матриці A розміром $m \times n$ називається найвищий порядок відмінного від нуля мінора, утвореного з елементів цієї матриці. Зрозуміло, що $\text{rang} A = r \leq \min(m, n)$, а найбільший можливий ранг матриці може дорівнювати меншому з чисел m і n .

Обчислюючи ранг матриці, потрібно переходити від мінорів менших порядків, відмінних від нуля, до мінорів більших порядків. Якщо вже знайдено відмінний від нуля мінор M k -го порядку, то достатньо обчислити лише мінори $(k+1)$ -го порядку, що обводять мінор M . Якщо всі вони дорівнюють нулю, то ранг матриці дорівнює k . Якщо серед них знайдеться такий, що відмінний від нуля, то далі для нього будуються обвідні мінори $(k+2)$ -го порядку і т. д.

Означення. Елементарними перетвореннями матриці A називаються такі її перетворення:

- 1) заміна місцями двох рядків або двох стовпців матриці;
- 2) множення рядка або стовпця матриці на довільне відмінне від нуля число;
- 3) додавання елементів одного рядка або стовпця до відповідних елементів іншого рядка або стовпця, попередньо помноженого на деяке число.

Теорема. Елементарні перетворення не змінюють рангу матриці.

Далі матриці, які мають рівні ранги, називатимемо еквівалентними матрицями. Еквівалентні матриці об'єднуватимемо знаком « $\sim$ » («тильда»).

1.2.5. Використання методу Гауса, матричного методу, правила Крамера для розв'язку лінійних рівнянь

1. Метод послідовного виключення невідомих (метод Гауса). Цей метод вивчається у середній школі. нагадаємо його.

Приклад. Розв'язати систему:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 5x_4 = -2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$$

Розв'язання. Третє рівняння перепишемо першим і виключимо невідоме x_1 , із решти рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 6x_3 + x_4 = 5, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 5, \\ 2x_3 - 2x_4 = 4. \end{cases}$$

З третього рівняння виключимо x_2 і перепишемо систему так:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 5, \\ 6x_3 + x_4 = 0, \\ 6x_3 + x_4 = 5, \\ x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$$

Маємо два однакових рівняння (третє та четверте). Виключимо невідоме x_3 із останнього рівняння, маємо:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 5, \\ 6x_3 + x_4 = 5, \\ -2x_4 = 2. \end{cases}$$

Остання система еквівалентна першій системі і з неї послідовно знизу

вгору знаходимо: $x_4 = -1$; $x_3 = -1$; $x_2 = 0$; $x_1 = -2$. Тобто, система сумісна і визначена.

3. Формули Крамера. Розглянемо систему (1.4), коли $m = n$. Такі системи звуться крамерівськими. Запишемо визначники:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \quad \Delta_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

Δ_n - головний визначник системи; $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \dots, \Delta_{x_n}$ - допоміжні визначники системи (1.4). Якщо, $\Delta_n \neq 0$, то за формулами Крамера:

$$x_i = \Delta_{x_i} / \Delta_n,$$

де Δ_{x_i} - визначник, який утворено заміною i -го стовпця у головному визначнику стовпцем вільних членів системи (1). Випадок, коли $\Delta_n = 0$ розглянемо нижче.

Приклад. Розв'язати систему:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -8, \\ 2x_2 + 7x_3 = 17. \end{cases}$$

Обчислимо визначники:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 56 - 18 + 21 + 20 = 79$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -8 & 4 & -5 \\ 17 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 84 + 85 + 48 + 304 - 56 + 30 = 395;$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & -8 & -5 \\ 0 & 17 & 7 \end{vmatrix} = -112 - 153 - 63 + 170 = -158;$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -8 \\ 0 & 2 & 17 \end{vmatrix} = 136 + 18 + 51 + 32 = 237;$$

$$x_1 = \Delta_{x_1} / \Delta_3 = 395 / 79 = 5; \quad x_2 = \Delta_{x_2} / \Delta_3 = -158 / 79 = -2;$$

$$x_3 = \Delta_{x_3} / \Delta_3 = 237 / 79 = 3.$$

Система має рішення: $x_1 = 5$; $x_2 = -2$; $x_3 = 3$.

3. Матричний метод. Розглянемо систему (1). Для запису системи m лінійних рівнянь з n невідомими використовується і більш коротка (матрична) форма запису. Записавши коефіцієнти при невідомих у вигляді матриці A , невідомі і вільні члени у вигляді матриць X і B , систему можна записати у вигляді:

$$A \cdot X = B. \quad \text{Тут} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = X, \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = B.$$

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

— основна матриця системи (1),

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_3 \end{array} \right)$$

є розширена матриця системи (1). Визначник Δ_n матриці A є головним визначником системи (1).

Повну відповідь на питання про існування розв'язку системи m лінійних рівнянь з n невідомими дає теорема Кронекера--Капеллі, яку приймемо без доведення.

Теорема. Щоб система рівнянь (1) мала розв'язок, необхідно і достатньо, щоб ранг розширеної матриці дорівнював рангу основної матриці. Якщо ранги основної і розширеної матриць збігаються з числом невідомих, то система має єдиний розв'язок. Якщо ранг основної і розширеної матриць менший від числа невідомих, то система має більш ніж один розв'язок.

В останньому випадку число "вільних" невідомих, через які виражається решта невідомих, які мають назву "базові" невідомі, дорівнює $n - r$. Припустимо, що $\text{rang } A = \text{rang } \bar{A} = n$ і $m = n$. Тоді матриця A є невиродженою і для неї є обернена матриця A^{-1} . Розв'яжемо матричне рівняння таким чином:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

Оскільки $A^{-1} \cdot A = E$, тоді $X = A^{-1} \cdot B$. Тобто для рішення системи n лінійних рівнянь з n невідомими, коли матриця A є невиродженою, достатньо знайти обернену матрицю A^{-1} і знайти добуток двох матриць A^{-1} і B , це буде матриця стовпець. Відповідні елементи матриці стовпця X будуть дорівнювати елементам матриці стовпця добутку. Це і буде розв'язком системи.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь матричним методом:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 4y + z = 3, \\ x - 5y + 3z = -1, \\ x - y + z = 1. \end{array} \right\}$$

Запишемо розширену матрицю системи і визначимо її ранг.

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right), \quad \text{rang } \bar{A} = 3.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -10 - 12 - 1 + 5 + 4 + 6 = -8 \neq 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \text{є невивродженою. } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо матрицю A^{-1} . Транспонуємо матрицю A :

$$A_T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & -5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -7;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} = -6.$$

Тут ураховано $(-1)^{i+j}$.

$$A^{-1} = -1/8 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Таким чином

$$\begin{aligned} X &= -1/8 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1/8 \begin{pmatrix} -2 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) - 7 \cdot 1, \\ 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) - 5 \cdot 1, \\ 4 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) - 6 \cdot 1, \end{pmatrix} = \\ &= -1/8 \cdot \begin{pmatrix} -16 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ тобто } x = 2, y = 0, z = -1 - \text{розв'язок системи} \end{aligned}$$

трьох лінійних рівнянь.

Приклад. Розв'язати систему однорідних рівнянь;

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Обчислимо визначник цієї системи:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 36 - 5 + 8 + 8 - 6 - 30 = 11.$$

Оскільки $\Delta_3 \neq 0$, система має тривіальний розв'язок:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

Приклад. Розв'язати систему однорідних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Обчислимо визначник цієї системи:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -36 + 80 - 1 - 12 - 16 - 15 = 0.$$

Оскільки $\Delta_3 = 0$ - система сумісна, але невизначена. Ранг цієї системи дорівнює двом. Одне з рівнянь можна виключити. Тоді

$$\left. \begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - x_3 &= 0, \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 &= 0, \end{aligned} \right\}$$

Виразимо x_1 і x_2 через x_3 :

$$\left. \begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &= x_3, \\ x_1 - 3x_2 &= -5x_3, \end{aligned} \right\}$$

Розв'яжемо останню систему за формулами Крамера:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 4 = -13;$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} x_3 & 4 \\ -5x_3 & -3 \end{vmatrix} = -3x_3 + 20x_3 = 17x_3;$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 3 & x_3 \\ 1 & -5x_3 \end{vmatrix} = -15x_3 - x_3 = -16x_3.$$

Звідси: $x_1 = (-17/13)x_3$; $x_2 = (16/13)x_3$. Нехай $x_3 = 13k$, де $k \in R$, тоді розв'язок початкової системи:

1.3 Векторна алгебра. Скалярний, векторний та мішаний добуток

1.3.1 Вектори, лінійні операції над векторами

Означення. Вектором називається напрямлений відрізок. Позначати вектори будемо $\vec{a}, \vec{b}, \dots$. Якщо, скажімо, точка А — початок вектора, а точка В — його кінець, то маємо $\vec{AB}$.

Вектор, в якого початок і кінець збігаються, називається нульовим вектором.

Вектор вважається заданим, коли відома його довжина $|\vec{AB}|$, $|\vec{a}|$ і напрям щодо деякої осі.

Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються колінеарними, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вважаються рівними, коли вони: 1) колінеарні; 2) однаково напрямлені; 3) їхні довжини рівні.

З останнього випливає, що при паралельному перенесенні вектора

дістаємо новий вектор, що дорівнює попередньому, тому вектори в аналітичній геометрії називають вільними.

Нехай у просторі задано деяку вісь l і вектор $\vec{AB}$. Проведемо через точки A і B площини, перпендикулярно до осі l (рис. 1.1). Позначимо точки перетину цих площин з віссю l відповідно A' і B' .

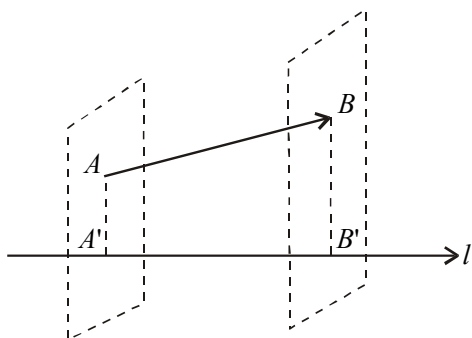


Рисунок 1.1

Означення. Проекцією вектора $\vec{AB}$ на вісь l називається довжина $A'B'$ напрямленого відрізка $\vec{A'B'}$ на осі l . Слід зазначити, що $A'B' = |\vec{A'B'}|$, якщо напрям $\vec{A'B'}$ збігається з напрямом l і $A'B' = -|\vec{A'B'}|$, якщо напрям $\vec{A'B'}$ протилежний напрямку l .

Позначається проекція вектора $\vec{AB}$ на вісь l — $\text{пр}_l \vec{AB}$. З рис. 1.1 випливає формула знаходження проекції вектора на вісь:

$$\text{пр}_l \vec{AB} = |\vec{AB}| \cos \varphi,$$

де φ — кут між вектором і віссю.

Якщо розглянути прямокутну декартову систему координат і точки початку $A(x_1, y_1, z_1)$ і кінця $B(x_2, y_2, z_2)$ вектора $\vec{AB}$, то проекції вектора $\vec{AB}$ на кожну з осей мають вигляд:

$$\text{Ох: } a_x = x_2 - x_1, \quad \text{Оу: } a_y = y_2 - y_1, \quad \text{Оz: } a_z = z_2 - z_1.$$

Довжина вектора подається формулою:

$$|\vec{a}| = |\vec{AB}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (1.7)$$

Якщо позначити α, β, γ — кути між вектором $\vec{a}$ і відповідними осями системи координат, то їх косинуси можна знайти за формулами:

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}. \quad (1.8)$$

У подальшому називатимемо їх напрямними косинусами вектора $\vec{a}$. Піднісши кожну з формул (1.8) до квадрата і скориставшись (1.7), дістанемо:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Дії з векторами виконуються за правилами:

1. Додавання:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z).$$

2. Множення вектора на число $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\alpha \vec{a} = (\alpha a_x, \alpha a_y, \alpha a_z).$$

Для лінійних операцій з векторами виконуються властивості:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
3. $\alpha(\beta \vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$.
4. $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$.
5. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$.

Теорема. Проекція суми двох векторів на вісь дорівнює сумі їхніх проекцій на цю вісь:

$$np_l(\vec{a} + \vec{b}) = np_l \vec{a} + np_l \vec{b}.$$

Теорема. При множенні вектора на число його проекція на цю вісь також множиться на це число:

$$np_l(\alpha \vec{a}) = \alpha np_l \vec{a}.$$

Нехай вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ такі, що за напрямом збігаються відповідно з осями Ox, Oy, Oz і $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$. Такі вектори надалі називатимемо одиничними векторами осей системи координат. Тоді

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}. \quad (1.9)$$

1.3.2. Скалярний, векторний і змішаний добуток векторів

Означення. Скалярним добутком двох ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число (скаляр), яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними. Якщо хоча б один із векторів дорівнює нулю, то кут між векторами не визначений і за означенням скалярний добуток дорівнює нулю.

Отже:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi,$$

де φ — кут між векторами. Використовуючи формулу проекції вектора, можна також записати:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}| np_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| np_{\vec{a}} \vec{b}.$$

Властивості скалярного добутку:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.
2. $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$.
3. $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$.
4. $(\vec{a} \cdot \vec{a}) = |\vec{a}|^2; \sqrt{(\vec{a} \cdot \vec{a})} = |\vec{a}|$.
5. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, якщо $\vec{a} \perp \vec{b}$, і навпаки, $\vec{a} \perp \vec{b}$, якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, $\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0$.

Нехай вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задано за допомогою (1.9), тоді, використовуючи властивості скалярного добутку, умови $\vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k}$, маємо:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (\vec{a}_x \vec{i} + \vec{a}_y \vec{j} + \vec{a}_z \vec{k}) (\vec{b}_x \vec{i} + \vec{b}_y \vec{j} + \vec{b}_z \vec{k}) = \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Отже, $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

З рівності (1.10) випливає, що:

1. Необхідною і достатньою умовою перпендикулярності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$.
2. Кут між двома векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ можна знайти за формулою:

$$\cos \varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Означення. Векторним добутком вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, якщо:

- 1) довжина вектора $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$, де φ — кут між двома векторами;

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

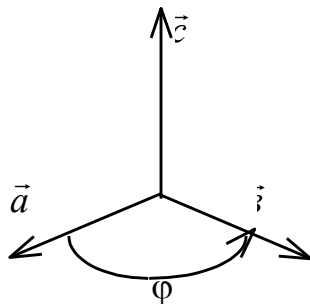


Рисунок 1.2

3) вектор $\vec{c}$ спрямований так, що коли дивитися з його кінця на площину, в якій лежать вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, то поворот вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ відбувається на найменший кут проти годинникової стрілки.

Модуль векторного добутку двох неколінеарних векторів дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах як на сторонах.

Властивості векторного добутку:

1. $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, якщо $\vec{a} \neq 0$ і $\vec{b} \neq 0$ — колінеарні вектори.

2. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

3. $(\lambda \vec{a} \times \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$.

4. $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

Знайдемо векторні добутки одиничних векторів $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. З колінеарності векторів випливає: $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$. З того, що одиничні вектори збігаються з напрямом осей прямокутної системи координат, маємо:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}.$$

Знайдемо координати вектора $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, якщо $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$.

$$\begin{aligned} \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} \end{aligned} \quad (1.11)$$

або

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Означення. Мішаним добутком векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називається число, яке дорівнює скалярному добутку вектора $\vec{a}$ на векторний добуток векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$, тобто $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

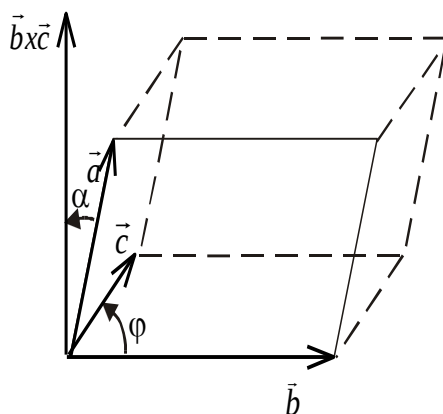


Рисунок 1.3

Розглянемо геометричний зміст змішаного добутку. Для цього побудуємо на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, вважаючи, що вони не лежать в одній площині, тобто не компланарні, паралелепіпед (рис. 1.3).

Знайдемо об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (рис.1.3). Площа основи його дорівнює модулю векторного добутку векторів $\vec{b} \times \vec{c}$ $s = |\vec{b} \times \vec{c}| = |\vec{c}| |\vec{b}| \sin \varphi$. Висота дорівнює $|\vec{a}| \cos \alpha$. Отже, остаточно маємо:

$$V = |\vec{a}| \cos \alpha \cdot |\vec{b}| |\vec{c}| \sin \varphi = |\vec{a}| |\vec{b} \times \vec{c}| \cos \alpha = |\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})|. \quad (1.12)$$

З останнього випливає, що модуль мішаного добутку чисельно дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. З рівності (1.12) маємо умову компланарності трьох векторів $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$.

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0.$$

Ураховуючи формули (1.10) і (1.11) знаходження скалярного і векторного добутків, маємо:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \left(\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} \vec{j} + \right. \\ &\quad \left. + \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \vec{k} \right) = a_x \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - a_y \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + a_z \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

або

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Властивості мішаного добутку:

1. $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$.
2. $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c})$.

1.3.3. Найпростіші задачі аналітичної геометрії

1. Відстань між двома точками.

Нехай задано дві точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$ (рис.1.4).

$$|M_1K| = |x_2 - x_1|, |M_2K| = |y_2 - y_1|.$$

Трикутник M_1M_2K — прямокутний, тому за теоремою Піфагора маємо:

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (1.13)$$

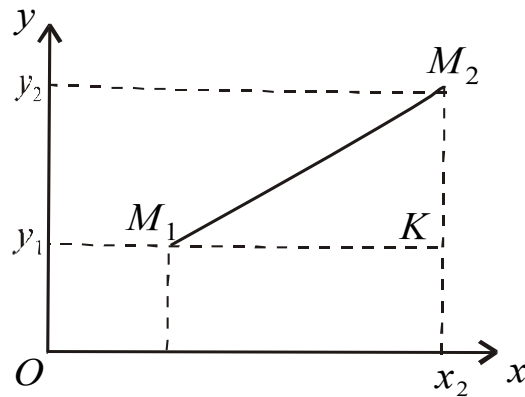


Рисунок 1.4

2. Поділ відрізка у заданому відношенні.

Число λ — називається відношенням, в якому точка M ділить відрізок M_1M_2 (рис. 1.5), якщо

$$\lambda = \frac{|M_1M|}{|MM_2|}.$$

Нехай задано λ і координати точок $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$, треба знайти координати точки $M(x, y)$.

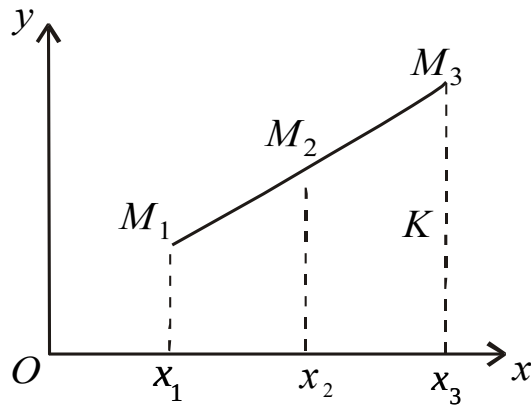


Рисунок 1.5

З рис.1.5 і теореми про пропорційні відрізки, що відтинають паралельні прямі на сторонах кута, випливають співвідношення:

$$\frac{|x - x_1|}{|x_2 - x|} = \frac{|M_1M|}{|MM_2|} = \lambda.$$

Оскільки числа $x - x_1$ і $x_2 - x$ одного й того самого знака (при $x_1 < x_2$ вони додатні, а при $x_1 > x_2$ — від'ємні), то $\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$. Отже,

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda.$$

Звідси:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}. \quad (1.14)$$

Аналогічно до попереднього дістанемо формулу для знаходження координати y

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \quad (1.15)$$

Наслідок. Якщо точка $M(x, y)$ — середина відрізка M_1M_2 , то $\lambda = 1$ і формули (2.11), (2.12) набувають вигляду:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

3. Площа трикутника.

Нехай задано координати вершин деякого трикутника $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ (рис. 2.12).

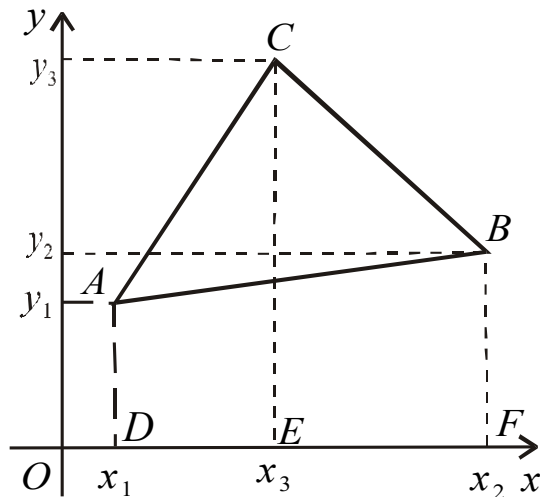


Рисунок 1.6

Знайдемо площу цього трикутника.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

1.4 Пряма на площині

1.4.1. Рівняння прямої у просторі

Пряму у просторі можна задати як лінію перетину двох площин у прямокутній системі координат:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (1.16)$$

Зрозуміло, що ці площини мають бути непаралельними, тобто їхні нормальні вектори $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ — не колінеарні. Система (1.16) називається загальним рівнянням прямої. Дістанемо ще деякі форми рівняння прямої.

Канонічне рівняння прямої. Нехай у системі координат Охуз задано пряму l і ненульовий вектор $\vec{s}$, колінеарний цій прямій. Точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ належить прямій, а напрямний вектор $\vec{s} = (m, n, p)$. Тоді довільна точка $M(x, y, z)$ лежатиме на прямій тоді і тільки тоді, коли вектори $\overline{M_0M}$ і $\vec{s}$ колінеарні:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \quad (1.17)$$

Рівняння (1.17) називається канонічним рівнянням прямої у просторі.
Параметричне рівняння.

У рівнянні прямої (1.17) позначимо через t кожне з рівних відношень.
Тоді

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t.$$

Звідси дістаємо:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$$

Параметричне рівняння прямої в просторі.

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.

Нехай дві точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$ належать прямій у просторі. Тоді вектор $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ можна розглядати як напрямний вектор прямої. Замінюючи ним вектор $\vec{s} = (m, n, p)$ у рівнянні (1.17), дістанемо шукане рівняння прямої у просторі

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Для знаходження кута між двома прямими

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \quad \text{і} \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

візьмемо до уваги, що вектори $\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ і $\vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ колінеарні відповідним прямим і скористаємося формулою:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1| |\vec{s}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

З останньої формули впливає умова перпендикулярності двох прямих

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0,$$

а умову паралельності двох прямих дістанемо як умову колінеарності напрямних векторів $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Розглянемо ще задачу знаходження відстані від точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямої $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$.

Шукану відстань можна розглянути як довжину висоти паралелограма, побудованого на векторах $\overline{M_0M_1}$ і $\vec{s}$ (рис. 1.7). Відомо, що площа паралелограма дорівнює модулю векторного добутку векторів, на яких побудовано цей паралелограм.

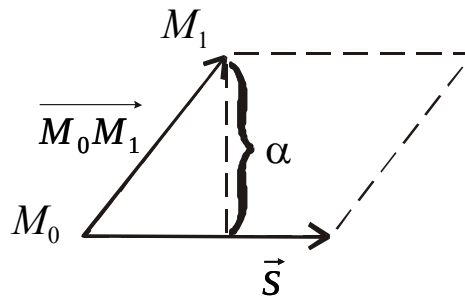


Рисунок 1.7

Доходимо висновку, що шукану висоту, а отже, і відстань від точки до прямої можна знайти за формулою:

$$d = \frac{|\overline{M_0M_1} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|} = \frac{\sqrt{\left| \begin{matrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ n & p \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ m & p \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ m & n \end{matrix} \right|^2}}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \quad (1.18)$$

1.4.2. Взаємне розміщення прямої і площини у просторі

Нехай задано пряму $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ і площину $Ax + By + Cz + D = 0$ у просторі. Якщо

$$\frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C},$$

то пряма перпендикулярна до площини, а коли

$$Am + Bn + Cp = 0,$$

пряма паралельна площині.

Нехай $Am + Bn + Cp \neq 0$. Знайдемо координати точки перетину площини і прямої. Перейдемо до канонічного рівняння прямої

$$x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + nt, \quad z = z_0 + pt.$$

Знайдемо кут між площиною і прямою.

Кут φ між площиною і прямою дорівнює куту між прямою і її проекцією на площину (рис.1.8). Вектор $\vec{N} = (A, B, C)$ — перпендикулярний до площини, а кут α , який він утворює з вектором $\vec{s}$, разом з φ у сумі дорівнює 90° . Тобто $\alpha + \varphi = 90^\circ$.

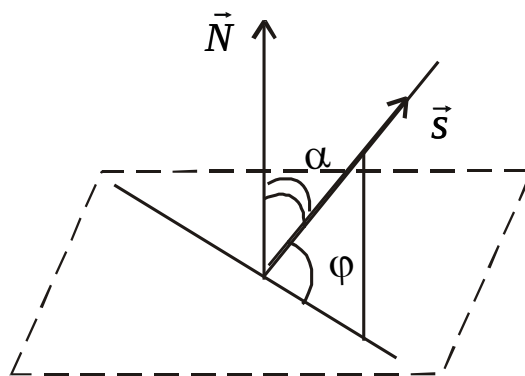


Рисунок 1.8

Знайдемо кут α як кут між двома векторами.

$$\cos \alpha = \frac{\vec{N} \cdot \vec{s}}{|\vec{N}| |\vec{s}|}.$$

Якщо $\alpha < 90^\circ$, то $\cos \alpha = \cos(90 - \varphi) = \sin \varphi$, а якщо $\alpha > 90^\circ$, то $\cos \alpha = \cos(90 - \varphi) = -\sin \varphi$, у будь-якому разі $\sin \varphi = |\cos \alpha|$. Отже,

$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

1.5 Криві другого порядку: коло, еліпс, гіпербола, парабола

Розглянемо тепер лінії другого порядку, які на площині в загальному випадку можна записати так:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \quad (1.19)$$

Рівняння (1.19) описує всі криві другого порядку в загальному випадку. Спинимось спочатку на простіших, так званих канонічних рівняннях ліній другого порядку.

Еліпс. Означення. Множина точок площини, для яких сума відстаней від двох заданих точок, що називаються фокусами, є величина стала й така, що дорівнює $2a$ і більша, ніж відстань між фокусами, називається еліпсом.

На рис.1.9 зображено $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ — фокуси еліпса, $M(x, y)$ — точка множини, яка задовольняє означення, тобто $|MF_1| + |MF_2| = 2a$, причому $2c < 2a \Rightarrow a > c$.

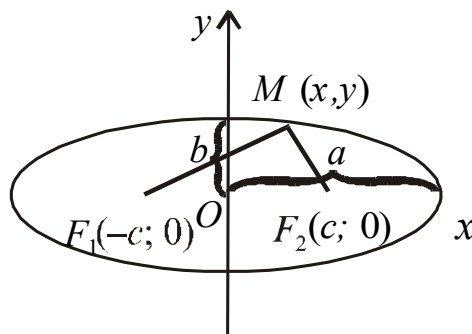


Рисунок 1.9

Тоді

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1.20)$$

канонічне рівняння еліпса, де $b^2 = a^2 - c^2$.

Розглянемо геометричний зміст параметрів, що входять в рівняння (1.20). Якщо $x = 0$, $y = \pm b$, тобто точки $(0, b)$ і $(0, -b)$ є точками перетину еліпса з віссю Oy. Відрізок завдовжки b називають малою піввіссю еліпса.

При $y=0$, $x=\pm a$ і відповідно $(a,0)$; $(-a, 0)$ є точками перетину еліпса з віссю Ox . Відрізок завдовжки a — велика піввісь еліпса. З парності виразу (1.20) за x і за y впливає симетрія еліпса відносно осей Ox і Oy . На рис.1.9 зображено еліпс.

Ексцентриситет еліпса — це відношення $\varepsilon = \frac{c}{a}$; за означенням $c < a$ і $\varepsilon \in [0, 1)$. Оскільки $\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2$, то $\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$. З останньої рівності впливає геометричний зміст ексцентриситету, який полягає в тому, що він характеризує ступінь витягнутості еліпса. Так, при $\varepsilon = 0 \Rightarrow a = b$ маємо коло, якщо ε наближається до одиниці, то відношення довжини півосей еліпса стає малим, тобто еліпс витягується вздовж осі Ox .

Гіпербола. Означення. Множина точок площини, для яких модуль різниці відстаней від двох заданих точок, що називаються фокусами, є величиною сталою, яка дорівнює $2a$ і менша за відстань між фокусами, називається гіперболою.

Скористаємось рис. 2.17, з якого бачимо, що точки $F_1(-c, 0)$ і $F_2(c, 0)$ — фокуси гіперболи, точка $M(x, y)$ — точка визначеної множини. Тоді $||MF_1| - |MF_2|| = 2a$, $a < c$.

Канонічне рівняння гіперболи має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ де } b^2 = c^2 - a^2.$$

Дослідимо здобуте рівняння. Гіпербола не перетинає вісь Oy . При $y=0$; $x=\pm a$ і точки $(-a,0)$; $(a,0)$ — точки перетину з віссю Ox . Розглянемо ще рівняння прямих $y = \pm \frac{b}{a}x$, які далі називатимемо асимптотами гіперболи.

Враховуючи симетрію відносно осей Ox і Oy , будуємо графік гіперболи, який зображено на рис. 1.10.

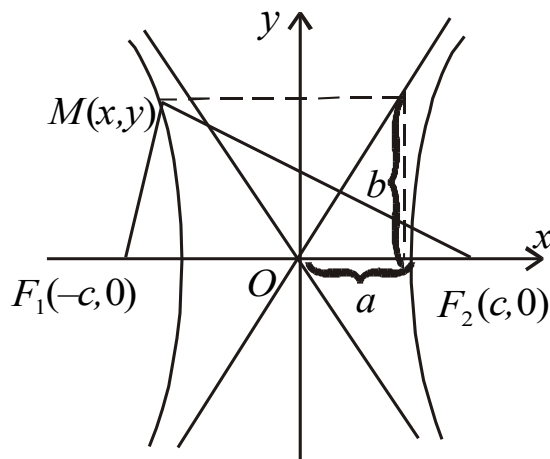


Рисунок 1.10

Відрізки завдовжки b і a називають відповідно уявною і дійсною осями гіперболи.

Ексцентриситет гіперболи $\varepsilon = \frac{c}{a}$, але $c > a$ і $\varepsilon > 1$. Беручи до уваги, що

$$c^2 = a^2 + b^2, \text{ дістаємо: } \varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2, \text{ або } \frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}.$$

З останньої рівності випливає, що для гіперболи ексцентриситет характеризує ступінь нахилу віток гіперболи до осі Ox .

Дві прямі, рівняння яких $x = -\frac{a}{\varepsilon}$; $x = \frac{a}{\varepsilon}$, називаються директрисами

еліпса і гіперболи. Для еліпса $0 \leq \varepsilon < 1$ і відношення $\frac{a}{\varepsilon} > a$, директриси еліпса — це дві прямі, що розміщені симетрично відносно осі Oy і проходять зовні еліпса. Для гіперболи $\varepsilon > 1$ і відношення $\frac{a}{\varepsilon} < a$. Тобто директриси гіперболи розміщені симетрично відносно осі Oy і лежать між вітками гіперболи.

Для еліпса і гіперболи можна сформулювати важливе твердження: якщо r — відстань від деякої точки еліпса або гіперболи до будь-якого фокуса, а d — відстань від цієї самої точки до директриси, яка відповідає цьому фокусу, то відношення $\frac{r}{d}$ стає й дорівнює ексцентриситету, тобто

$$\varepsilon = \frac{r}{d}.$$

Розглянуте твердження можна покласти в основу означення цих ліній.

Означення. Множина точок, для яких відношення відстаней від фокуса і до відповідної директриси — величина стала, що дорівнює ексцентриситету ε , є еліпс, якщо $\varepsilon < 1$, і гіпербола, якщо $\varepsilon > 1$.

Парабола. Означення. Множина точок площини, що містяться на однаковій відстані від даної точки фокуса і даної прямої, яка не проходить через фокус і називається директрисою, є парабола.

За означенням $r = d$, отже (див. рис. 1.11):

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}, \text{ або } y^2 = 2px$$

канонічне рівняння параболи, коли $\varepsilon = 1$. Парабола симетрична осі Ox , проходить через початок системи координат. Її графік подано на рис. 1.11.

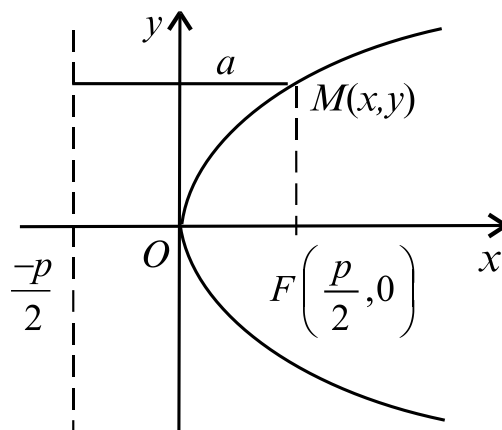


Рисунок 1.11

Коло. До кривих другого порядку належить і добре відома лінія, яка називається колом (рис. 1.12).

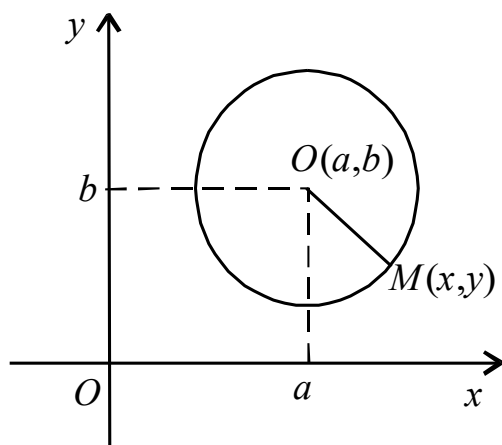


Рисунок 1.12

Означення. Множина точок, що містяться на однаковій відстані від заданої точки — центра, називається колом. За означенням $OM = R$ або $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$.

Піднісши обидві частини рівняння до квадрата, дістанемо:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \quad (1.21)$$

— канонічне рівняння кола. Тут (a, b) — координати центра кола, R — його радіус. Розкривши дужки в лівій частині (1.21), дістанемо, очевидно, рівняння другого степеня, тобто коло — також крива другого порядку.

II АНАЛІЗ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ. ДИФЕРЕНЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ТА БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

2.1 Елементарні функції та їх властивості

2.1.3. Поняття та основні способи задання функції

Певна величина у деякому процесі може набувати різних або однакових числових значень. У першому випадку величину називають *змінною*, у другому – *сталою*. Предметом математичного аналізу є дослідження змінних величин. Вивчаючи певне явище, дослідник здебільшого вивчає кілька змінних величин, які пов'язані між собою так, що зміна деяких з них приводить до зміни інших. Такий взаємозв'язок у математиці виражається за допомогою поняття функції, що ввів у практику наукових досліджень видатний німецький математик Г.В. Лейбніц.

Отже, поняття функції пов'язане з встановленням залежності між елементами двох множин.

Означення. Якщо кожному числу x з деякої числової множини X за певним правилом поставлене у відповідність єдине число y , то кажуть, що y є *функція* від x і пишуть $y = f(x)$, $x \in X$.

Змінну x називають *незалежною змінною*, або *аргументом*, а змінну y – *залежною змінною*, або *функцією*. Під символом f розуміють правило, за яким кожному значенню змінної x ставиться у відповідність значення y , або операції, які потрібно виконати над аргументом x , щоб дістати відповідне значення функції y . Множину X називають *областю визначення функції*. Множину Y всіх чисел y , таких, що $y = f(x)$ для кожного $x \in X$, називають *множиною значень функції*, тобто $Y = \{y : y = f(x) \forall x \in X\}$. Область визначення функції $y = f(x)$ часто позначають $D(y)$, або $D(f)$, а множину значень функції – $E(y)$, або $E(f)$.

Значення функції $y = f(x)$, що відповідає значенню аргументу $x = a$ позначають $f(a)$.

Означення. *Графіком функції* $y = f(x)$ називають множину всіх точок $(x; y)$ координатної площини Oxy , для кожної з яких x є значенням аргументу, а y – відповідним значенням функції.

Наприклад, графіком функції $y = x^2$ є парабола з вершиною у початку координат, віссю симетрії Ox , вітки якої направлені вгору. Графік функції $y = x$ – це бісектриса першої та третьої чвертей координатної площини.

Щоб задати функцію $y = f(x)$, треба вказати її область визначення $D(y)$, множину значень $E(y)$ та правило f , за яким для довільного аргументу $x \in D(y)$ можна знайти відповідне йому значення функції $y \in E(y)$. Найчастіше використовують три способи задання функції: аналітичний, табличний та графічний.

При використанні *аналітичного способу* задання функції відповідність між аргументом та функцією задають у вигляді однієї або кількох формул (аналітичних виразів). Ці формули визначають, які дії потрібно виконати над значенням аргументу, щоб отримати відповідне значення функції. Якщо при цьому область визначення не вказується, то під нею розуміють область існування відповідного аналітичного виразу. Однією й тією ж формулою можна задавати різні функції, і, навпаки, одна й та сама функція на різних проміжках її області визначення може задаватися різними формулами. Так, функції $y = x^2$, $x \in [0; 1]$ та $y = x^2$, $x \in [2; 4]$ – це різні функції, бо вони мають різні області визначення.

Функція

$$y = \begin{cases} 2x^2 + 1, & x < 0; \\ x^3 + 2, & x \geq 0 \end{cases}$$

визначена на всій числовій прямій, але для від'ємних та невід'ємних значень аргументу вона задається різними формулами.

Областю існування функції можуть бути різноманітні множини: числова пряма, відрізок, відкритий інтервал, кілька відрізків або відкритих інтервалів, множина окремих точок тощо.

При *графічному способі* задання функції $y = f(x)$ відповідність між змінними x та y задається з допомогою графіка. Графічним способом задання функції широко користуються при дослідженнях, пов'язаних з використанням таких самописних приладів, як барограф (для запису змін атмосферного тиску), осцилограф (для запису змін сили електричного струму або напруги), термограф (для запису змін температури повітря) тощо. Графіками широко користуються також для наочного геометричного зображення функцій, навіть якщо самі ці функції задані аналітичними виразами.

Зауважимо, що в прямокутній системі координат Oxy функцію визначає лише така крива, яку кожна пряма, що проходить через точку $x \in D(y)$ паралельно осі Ox , перетинає лише у одній точці. Це пояснюється тим, що при заданні функції кожному значенню x з її області визначення відповідає єдине значення змінної y .

Табличний спосіб задання функції полягає у тому, що відповідність між змінними x та y задається у вигляді таблиці. Він часто використовується при записі результатів експерименту, коли для певної сукупності значень аргументу $x_1, x_2, \dots, x_n$ дослідним шляхом знаходять відповідні значення функції $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Крім розглянутих, існують і інші способи задання функції. Так, функції, що є розв'язками складних математичних задач, можуть задаватися у вигляді комп'ютерних програм, що реалізують алгоритми розв'язання цих задач. Функцію можна задати також словесним описом залежності між змінними. Наприклад, *функція Діріхле* – це функція, що кожному раціональному значенню аргументу ставить у відповідність одиницю, а ірраціональному – нуль.

2.1.4. Класифікація елементарних функцій

До основних елементарних функцій відносять наступні:

1. Степенева функція $y = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Показникові функція $y = a^x$, $a > 0, a \neq 1$.
3. Логарифмічна функція $y = \log_a x$, $a > 0, a \neq 1$.
4. Тригонометричні функції $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.
5. Обернені тригонометричні функції $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Властивості вказаних основних елементарних функцій та їх графіки детально розглянуті у шкільному курсі алгебри та початків аналізу.

Визначимо арифметичні операції над функціями. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на множині A , а функція $y = g(x)$ – на множині B і при цьому переріз цих множин $C = A \cap B \neq \emptyset$. Тоді на множині C можна визначити суму цих функцій $y = f(x) + g(x)$, їх різницю $y = f(x) - g(x)$, добуток $y = f(x) \cdot g(x)$. За умови $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in C$ на множині C визначено також частку функцій $y = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Над функціями виконують також операцію суперпозиції, або побудови складеної функції.

Означення. Нехай функція $y = f(u)$ визначена на множині A , а функція $u = g(x)$ – на множині B , причому для кожного значення $x \in B$ відповідне значення $u = g(x) \in A$. Тоді на множині B визначена функція $y = f(g(x))$, яку називають *складеною функцією* змінної x , або *суперпозицією функцій* f та g . Для складеної функції використовують

позначення $y = (f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Змінну $u = g(x)$ функції $y = f(u)$ називають *проміжним аргументом* або *внутрішньою функцією*, а змінну $y = f(u)$ – *зовнішньою функцією*.

Наприклад, функція $y = \sin x^2$ є суперпозицією двох функцій – тригонометричної та степеневі. Тут зовнішня функція – $y = \sin u$, внутрішня функція – $u = x^2$. Складені функції можна утворювати за допомогою суперпозиції не лише двох, але й кількох функцій, наприклад, $y = \sin(\ln(2 + \sqrt{x}))$.

Означення. Основні елементарні функції, а також функції, утворені шляхом виконання скінченного числа арифметичних операцій та утворення суперпозицій основних елементарних функцій, називають *елементарними*.

Наприклад, функція $y = \cos\left(\frac{2}{x^2}\right) + 4\ln(x+3) - 2e^x$ є елементарною. Функція Діріхле, описана у п. 1.4 не є елементарною. Не є елементарними також функції $y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$, $y = [x]$ та $y = \{x\}$.

Функція $y = [x]$ (ціла частина числа x) кожному значенню аргументу $x \in \mathbb{R}$ ставить у відповідність найбільше ціле число, що не перевищує x . Так, $[3,8] = 3$, $[-4,2] = -5$. Функція $y = \{x\} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ визначається як різниця між числом та його цілою частиною: $\{x\} = x - [x]$. Наприклад, $\{5,2\} = 5,2 - [5,2] = 5,2 - 5 = 0,2$, $\{-3,7\} = -3,7 - [-3,7] = -3,7 - (-4) = 0,3$. Множиною значень функції $y = [x]$ є множина цілих чисел, для $y = \{x\}$ множина значень – це проміжок $[0;1)$.

Елементарні функції поділяють на наступні класи.

1. Функції виду $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, де $n \in \mathbb{N}_0$, коефіцієнти $a_0, a_1, \dots, a_n$ є дійсними числами, називають *цілими раціональними функціями*, або *многочленами (поліномами) степеня n* . Многочлен першого степеня називають також *лінійною функцією*, а многочлен другого степеня – *квадратичною функцією*.

2. Функції виду $R(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m}$, що є відношенням

двох многочленів, називають *дробовими раціональними функціями*, або *раціональними дробами*. Сукупність многочленів та раціональних дробів утворює клас *раціональних функцій*.

3. Функції, утворені за допомогою скінченного числа суперпозицій та арифметичних операцій над раціональними функціями і над степеневими

функціями з дробовими показником степеня, які не є раціональними, називають *ірраціональними функціями*. Наприклад, $y = \sqrt[3]{x+5} + 2x - 1$ є ірраціональною функцією. Раціональні та ірраціональні функції називають *алгебраїчними*.

4. Елементарні функції, які не є раціональними чи ірраціональними, називають *трансцендентними функціями*. Зокрема, до трансцендентних належать показникові, логарифмічні, тригонометричні та обернені тригонометричні функції. Наприклад, функції $y = \sin 2x$, $y = \ln(1+x^2)$ є трансцендентними.

2.1.3. Основні характеристики функцій

Означення. Функцію $y = f(x)$, визначену на множині $D(y)$, називають *парною*, якщо $\forall x \in D(y) -x \in D(y)$ та $f(-x) = f(x)$. Функцію $y = f(x)$, визначену на множині $D(y)$, називають *непарною*, якщо $\forall x \in D(y) -x \in D(y)$ та $f(-x) = -f(x)$.

Наприклад, функції $y = x^2$, $y = \cos x$, $y = |x|$ є парними, функції $y = \frac{1}{x}$, $y = x^3$, $y = \arcsin x$ – непарними, а функції $y = \arccos x$, $y = \ln x$, $y = 2x - x^2$ є прикладами ні парних, ні непарних функцій.

Графік парної функції є симетричним відносно осі Оу, а графік непарної функції симетричний відносно початку координат.

Означення. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на множині $D(y)$ і $D_1 \subset D(y)$. Якщо $\forall x_1 \in D_1 \forall x_2 \in D_1 \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, то функцію називають *зростаючою* на множині D_1 . Якщо $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, то $f(x)$ називають *неспадною* на множині D_1 . За умови $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ $f(x)$ називають *спадною* на множині D_1 . Якщо ж $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$, то функцію $f(x)$ називають *незростаючою* на множині D_1 .

Прикладом зростаючої на всій числовій прямій функції є $f(x) = 2x + 3$. Функція $y = x^2$ зростає на множині $D_1 = (0; +\infty)$, ця ж функція спадає на множині $D_2 = (-\infty; 0)$.

Означення. Зростаючі, не зростаючі, спадні та неспадні на множині D_1 функції називають *монотонними* на цій множині. Зростаючі та спадні функції називають *строго монотонними*.

Означення. Функцію $y = f(x)$, визначену на множині $D(y)$, називають *обмеженою* зверху на цій множині, якщо

$\exists M_1 : \forall x \in D(y) \ f(x) \leq M_1$. Функцію $y = f(x)$, визначену на множині $D(y)$, називають *обмеженою знизу* на цій множині, якщо $\exists M_2 : \forall x \in D(y) \ f(x) \geq M_2$. Функцію $y = f(x)$, визначену на множині $D(y)$, називають *обмеженою* на цій множині, якщо $\exists M > 0 : \forall x \in D(y) \ |f(x)| \leq M$.

Обмежена функція є обмеженою зверху і знизу.

Аналогічним чином можна визначити функцію, обмежену на будь-якій множині $D_1 \subset D(y)$.

З означення обмеженої функції випливає, що множина її значень є підмножиною відрізка $[-M; M]$, тому її графік розташований між прямими $y = -M$ та $y = M$. Так, функція $y = \arctg x$ є обмеженою на своїй області визначення – всій числовій прямій, оскільки $|\arctg x| < \frac{\pi}{2} \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Відповідно, графік цієї функції розташований між прямими $y = -\frac{\pi}{2}$ та $y = \frac{\pi}{2}$.

Означення. Функцію $y = f(x)$, визначену на множині $D(y)$, називають *періодичною* на цій множині, якщо існує таке число $T \neq 0$, що $x + T \in D(y)$ і $f(x + T) = f(x) \ \forall x \in D(y)$.

Якщо число T є періодом функції $y = f(x)$, то її періодами є також числа виду kT , $k \in \mathbb{Z}$. Далі під періодом функції розумітимемо найменший з її додатних періодів. Такий період називають *основним*.

Прикладами періодичних функцій є тригонометричні функції $y = \sin x$ та $y = \cos x$, період яких $T = 2\pi$, $y = \tg x$ та $y = \ctg x$ з періодом $T = \pi$. У п.1.5 була визначена функція $y = \{x\}$, її період $T = 1$.

2.1.4. Обернена функція

Нехай задано функцію $y = f(x)$ з областю визначення X та множиною значень Y . Функція $f(x)$ кожному значенню $x_0 \in X$ ставить у відповідність єдине значення $y_0 \in Y$. При цьому може виявитися, що різним значенням аргументу x_1 і x_2 відповідає одне й те ж значення функції y_1 . Будемо додатково вимагати, щоб функція $y = f(x)$ різним значенням x ставила у відповідність різні значення y . Тоді кожному значенню $y \in Y$ відповідатиме єдине значення $x \in X$, тобто можна

визначити функцію $x = \varphi(y)$ з областю визначення Y і множиною значень X .

Означення. Функція $x = \varphi(y)$ є *оберненою* до функції $y = f(x)$, якщо областю визначення функції φ є множина значень функції f , множина значень функції φ є областю визначення функції f , а кожному значенню змінної $y \in Y$ відповідає єдине значення $x \in X$.

З цього означення випливає, що кожна з функцій $y = f(x)$ і $x = \varphi(y)$ може бути названа прямою чи оберненою, тобто ці функції є взаємно оберненими.

Щоб знайти функцію $x = \varphi(y)$, обернену до функції $y = f(x)$, достатньо розв'язати рівняння $y = f(x)$ відносно змінної x (якщо це можливо). Оскільки кожна точка $(x; y)$ кривої $y = f(x)$ є одночасно точкою кривої $x = \varphi(y)$, то графіки взаємно обернених функцій $y = f(x)$ і $x = \varphi(y)$ збігаються. Якщо у оберненій функції $x = \varphi(y)$ незалежну змінну позначити через x , а залежну – через y , то замість функції $x = \varphi(y)$ отримаємо функцію $y = \varphi(x)$. Графіки взаємно обернених функцій $y = f(x)$ та $y = \varphi(x)$ є симетричними відносно прямої $y = x$.

З означення оберненої функції випливає, що функція $y = \varphi(x)$, $x \in X$, $y \in Y$, має обернену функцію тоді і тільки тоді, коли вона встановлює взаємно однозначну відповідність між множинами X та Y , тобто кожному значенню $x \in X$ ставиться у відповідність єдине значення $y \in Y$ і, навпаки, кожному значенню $y \in Y$ відповідає єдине значення $x \in X$. Взаємно однозначну відповідність між областю визначення та множиною значень встановлюють строго монотонні функції. Так, для зростаючої на проміжку функції $y(x)$ $x_1 < x_2 \Rightarrow y(x_1) < y(x_2)$, для функції, що строго спадає на деякому проміжку, $x_1 < x_2 \Rightarrow y(x_1) > y(x_2)$. Таким чином, будь-яка строго монотонна на проміжку функція має на цьому проміжку обернену функцію. При цьому, якщо пряма функція строго зростає (спадає) на проміжку, то обернена їй функція також строго зростає (спадає) на цьому проміжку.

2.1.6. Неявна та параметрична форми задання функцій

Якщо функція задана рівнянням $y = f(x)$, розв'язаним відносно залежної змінної y , то кажуть, що функція задана у явній формі або є явною.

Означення. Під *неявно заданою функцією* розуміють функцію, задану

у вигляді рівняння $F(x, y) = 0$, не розв'язаного відносно залежної змінної.

Це рівняння задає функцію лише тоді, коли множина впорядкованих пар чисел (x, y) , що є розв'язками даного рівняння, така, що будь-якому числу x_0 у цій множині відповідає не більше однієї впорядкованої пари (x_0, y_0) . Так, рівняння $4x - 3y + 2 = 0$ задає функцію, а рівняння $x^2 + y^2 = 16$ функцію не визначає, оскільки кожному значенню x_0 відповідає дві впорядковані пари чисел: $(x_0, \sqrt{16 - x_0^2})$ та $(x_0, -\sqrt{16 - x_0^2})$.

Довільну явно задану функцію $y = f(x)$ можна записати як неявну рівнянням $f(x) - y = 0$, але неявну функцію не завжди можна записати у вигляді явної. Це пояснюється тим, що рівняння $F(x, y) = 0$ не завжди можна розв'язати відносно y .

Нехай задано дві функції $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ однієї незалежної змінної t , визначені на одному й тому ж числовому проміжку. Якщо функція $x = \varphi(t)$ є строго монотонною, то вона має обернену функцію $t = \Phi(x)$. Тому змінну y можна розглядати як складену функцію змінної x : $y = \psi(\Phi(x))$.

Означення. Задання функціональної залежності між змінними x та y у вигляді двох функцій $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ називають *параметричним заданням функції*. Допоміжну змінну t називають при цьому *параметром*.

Всяка параметрично задана функція визначає на площині xOy деяку криву, проте не всяка крива на площині, задана у параметричній формі, визначає функцію. Наприклад, рівняння $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0; 2\pi]$ визначають на декартовій площині xOy коло з центром у початку координат та одиничним радіусом, проте вони не визначають функції, оскільки кожному значенню аргументу x з відрізка $[-1; 1]$ на даному колі відповідають два значення змінної y . Відзначимо, що параметричні рівняння $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0; \pi]$, що визначають на координатній площині верхнє півколо $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$, визначають при цьому і функцію, задану у параметричній формі, оскільки тут кожному значенню x відповідає єдине значення змінної y .

2.2 Границя та неперервність функції

Нехай функція $y = f(x)$ визначена у деякому околі точки x_0 , можливо, окрім самої точки x_0 . Сформулюємо два еквівалентних

означення границі цієї функції у точці x_0 .

Означення. (Означення границі функції за Коші). Число A називають *границею функції* $f(x)$ у точці x_0 (при $x \rightarrow x_0$), якщо $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$: $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

Використовують запис: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

З означення випливає, що границею сталої величини є сама стала. Дійсно, якщо $f(x) = C = \text{const}$, то $|f(x) - C| = |C - C| = 0 < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$.

Геометричний зміст цього означення полягає у тому, що функція $f(x)$ має границю A у точці x_0 , якщо для довільного ε - околу точки A існує такий δ - окіл точки x_0 , що для довільного $x \neq x_0$ з цього δ - околу відповідні значення функції $f(x)$ знаходяться у ε - околі точки A .

Означення. (Означення границі функції за Гейне). Число A називають *границею функції* $f(x)$ у точці x_0 (при $x \rightarrow x_0$), якщо для довільної послідовності $\{x_n\}$ допустимих значень аргументу, що має свою границю точку x_0 , послідовність відповідних значень функції $\{f(x_n)\}$ має своєю границею число A : $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

З означення границі функції випливає, що для всіх значень аргументу, достатньо близьких до x_0 , відповідні значення функції $f(x)$ як завгодно мало відрізняються від числа A .

Використання означення границі функції за Гейне дозволяє у багатьох випадках дослідити її існування у певній точці. У якості прикладу такого застосування покажемо, що функція $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ не має границі у точці $x = 0$.

Основні властивості границь.

Теорема 1. Границя суми (різниці) двох функцій дорівнює сумі (різниці) їх границь, якщо ці границі існують:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

Теорема 2. Границя добутку двох функцій дорівнює добутку цих границь, якщо вони існують:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

Наслідок 1. Сталій множник можна виносити за знак границі:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (C \cdot f(x)) = C \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

Наслідок 2. Якщо існує $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, то існує $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n$, $n \in \mathbb{Z}$, при

цьому

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = A^n.$$

Теорема 3. Границя відношення двох функцій дорівнює відношенню границь цих функцій, якщо вони існують, а границя знаменника відмінна від нуля:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0.$$

Теорема 4 (теорема про границю проміжної функції). Нехай у деякому околі точки x_0 , крім, можливо, самої точки x_0 , визначені функції $\varphi(x)$, $f(x)$ та $\psi(x)$ і виконуються нерівності

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x).$$

Тоді, якщо функції $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ при $x \rightarrow x_0$ мають одну й ту ж границю

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = A,$$

то цю ж границю має й функція $f(x)$.

Теорема 5 (теорема про граничний перехід у нерівностях). Якщо у деякому околі точки x_0 , крім, можливо, самої точки x_0 , виконується нерівність $f(x) \geq 0$ і існує границя $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$, то $b \geq 0$.

Наслідок. Якщо у деякому околі точки x_0 , крім, можливо самої цієї точки, виконується нерівність $f(x) \geq \varphi(x)$ і існують границі $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ та $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$.

Теорема 6 (теорема про границю монотонної функції). Якщо функція $f(x)$ монотонна і обмежена при $x < x_0$ (при $x > x_0$), то існує її ліва границя $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0-0)$ (права границя $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0+0)$).

Важливі границі. При обчисленні границь, що містять тригонометричні функції та зводяться до невизначеності виду $\left(\frac{0}{0}\right)$, часто

використовують першу важливу границю: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Доведемо цю рівність. Для цього використаємо відому подвійну нерівність $\sin x < x < \operatorname{tg} x$, що виконується при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Поділимо всі частини цієї подвійної нерівності на $\sin x > 0$. Отримаємо нерівність:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Звідси маємо: $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. Перейдемо у цій нерівності до границі при $x \rightarrow 0$. Отримуємо:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0} 1.$$

Оскільки $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$, то, за теоремою 4, отримуємо, що $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Нехай $x \rightarrow 0$ і при цьому $x < 0$. Тоді $\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x)}{-x}$, $-x > 0$. У цьому випадку маємо:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{-x \rightarrow 0} \frac{\sin(-x)}{-x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

При обчисленні цієї границі ми використали заміну $-x = t$. При $x \rightarrow 0$ $t \rightarrow 0$.

Таким чином, і у цьому випадку має місце рівність $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Доведемо формулу:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e.$$

Цю формулу називають другою важливою границею.

Для доведення формули розглянемо два випадки.

1. Нехай $x \rightarrow +\infty$. Кожне значення змінної x знаходиться між двома послідовними натуральними числами: $n \leq x < n+1$, де $n = [x]$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді виконується нерівність $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$, звідки $1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{n}$. З цієї нерівності отримаємо:

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

При $x \rightarrow +\infty$ $n \rightarrow \infty$, тому, перейшовши у останній подвійній нерівності до границі при $n \rightarrow \infty$, маємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Далі використаємо формулу, згідно з якою $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, $n \in \mathbb{N}$.

2. Нехай $x \rightarrow -\infty$. Зробимо заміну змінної $-x = t$. Тоді знаходимо:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t-1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{t-1}\right)^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^t = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^{t-1} \cdot \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right) = e \cdot 1 = e.\end{aligned}$$

Таким чином, вихідна формула виконується при $x \rightarrow \pm\infty$.

Виконавши у границі $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ заміну змінної $\frac{1}{x} = t$, отримаємо,

що при $x \rightarrow \infty$ $t \rightarrow 0$. Маємо $\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$.

Другу важливу границю використовують, коли при обчисленні границі мають справу з невизначеністю виду (1^∞) . При обчисленні границь, пов'язаних з другою важливою границею, часто застосовують наступне твердження: якщо існують границі $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ та $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$, причому

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, то існує також границя $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{\varphi(x)}$, яка обчислюється за формулою:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{\varphi(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)}.$$

Неперервність функції у точці. Нехай функція $y = f(x)$ визначена у точці x_0 і у деякому околі цієї точки.

Означення. Функцію $y = f(x)$ називають *неперервною у точці x_0* , якщо границя функції $f(x)$ у цій точці дорівнює значенню функції у ній:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

З означення випливає, що для неперервності функції у точці x_0 необхідним та достатнім є виконання наступних умов:

- 1) $f(x)$ визначена у точці x_0 , тобто $\exists f(x_0)$;
- 2) $\exists \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$;
- 3) $\exists \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0)$.

Запишемо рівність $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ у вигляді: $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$.

Позначимо $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$. Величину Δx називають *приростом аргументу* у точці x_0 , Δy – *приростом функції* у цій точці.

Умова $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ є рівносильною умові $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$. З цієї рівності випливає інше означення неперервності функції у точці.

Означення. Функцію $y = f(x)$ називають *неперервною у точці x_0* , якщо нескінченно малому приросту аргументу $\Delta x = x - x_0$ у цій точці відповідає нескінченно малий приріст функції $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, тобто

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0.$$

2.3 Похідна, її геометричний та фізичний зміст. Таблиця похідних основних елементарних функцій. Диференціал функції. Застосування похідної

2.3.2. Означення похідної

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на деякому проміжку $(a; b)$. Візьмемо значення $x \in (a; b)$ і надамо аргументу приросту Δx . Тоді функція набуде приросту $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Розглянемо відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx і перейдемо до границі при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (2.1)$$

Якщо границя (2.1) існує і скінченна, вона називається похідною функції $y = f(x)$ за змінною x і позначається

$$y', \quad y'_x, \quad \frac{dy}{dx}, \quad f'(x), \quad \frac{df(x)}{dx}.$$

Означення. Похідною функції $y = f(x)$ за аргументом x називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.

Операція знаходження похідної називається диференціюванням цієї функції.

Користуючись означенням похідної, знайти похідні функцій.

Приклад. Функція $y = x^2$. Знайти похідну в точках $x = 3$ і $x = -4$.

● Надамо аргументу x приросту Δx , тоді функція набуде приросту $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2 + x^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$.

Складемо відношення приросту функції до приросту аргументу

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$, відшукаємо границю $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x$. Таким чином, $f'(x) = 2x$.

Похідна в точці $x = 3$ $f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$, а похідна при $x = -4$ буде $f'(-4) = 2 \cdot (-4) = -8$.

Приклад. $y = C$, де $c = \text{const}$.

● Надавши аргументу x приросту Δx , дістанемо приріст функції $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0$. Тепер знайдемо границю відношення $\Delta y / \Delta x$ при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0, \text{ тобто } C' = 0.$$

Приклад. $y = \sin x$.

● Користуючись відомою з тригонометрії формулою

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2},$$

знайдемо приріст функції у точці x і обчислимо границю:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x;$$

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Аналогічно можна дістати: $(\cos x)' = -\sin x$.

Приклад. $y = e^x$.

● Для цієї функції маємо

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \cdot 1 = e^x,$$

$$\text{тобто } (e^x)' = e^x.$$

2.3.2. Основні правила диференціювання

Теорема 1. Похідна сталої дорівнює нулю, тобто якщо $y = c$, де $c = \text{const}$, то $y' = 0$.

Теорема 2. Похідна алгебраїчної суми скінченної кількості диференційовних функцій дорівнює алгебраїчній сумі похідних цих функцій: $(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$.

Теорема 3. Похідна добутку двох диференційованих функцій дорівнює добутку першого множника на похідну другого плюс добуток другого множника на похідну першого:

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Теорема 4. Сталий множник можна виносити за знак похідної:

$$(cu)' = cu', \text{ де } c = \text{const}.$$

Теорема 5. Якщо чисельник і знаменник дробу диференційовні функції (знаменник не перетворюється в нуль), то похідна дробу також дорівнює дробу, чисельник якого є різницею добутків знаменника на похідну чисельника і чисельника на похідну знаменника, а знаменник є квадратом знаменника початкового дробу $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Зауваження. Похідну від функції $y = \frac{u(x)}{c}$, де $c = \text{const}$, зручно обчислювати як похідну від добутку сталої величини $\frac{1}{c}$ на функцію $u(x)$:

$$\left(\frac{u(x)}{c}\right)' = \left(\frac{1}{c}u(x)\right)' = \frac{1}{c}u'(x).$$

Приклад. Обчислити похідну для функції $y = \text{tg}x$.

$$y' = (\text{tg}x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Таким чином, $(\text{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Похідна складної функції. Нехай $y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$, тобто

$y = f(\varphi(x))$. Функція $f(u)$ називається зовнішньою, а функція $\varphi(x)$ — внутрішньою, або проміжним аргументом.

Теорема 6. Якщо $y = f(u)$ та $u = \varphi(x)$ — диференційовані функції від своїх аргументів, то похідна складної функції існує і дорівнює $y'_x = f'_u \cdot u'_x$.

Таким чином, похідна складної функції дорівнює добутку похідної зовнішньої функції за проміжним аргументом на похідну проміжного аргументу за незалежною змінною.

Похідна неявної функції. Нехай рівняння $F(x, y) = 0$ визначає y як неявну функцію від x . Надалі будемо вважати, що ця функція — диференційована.

Продиференціювавши за x обидві частини рівняння $F(x, y) = 0$, дістанемо рівняння першого степеня відносно y' . З цього рівняння легко знайти y' , тобто похідну неявної функції.

Приклад. Знайти y'_x з рівняння $x^2 + y^2 = 4$.

● Оскільки y є функцією від x , то y^2 розглядатимемо як складну функцію від x , тобто $(y^2)' = 2y \cdot y'$.

Продиференціювавши по x обидві частини заданого рівняння, дістанемо $2x + 2yy' = 0$. Звідси $y' = -\frac{x}{y}$.

Похідна оберненої функції. Нехай задані дві взаємно обернені диференційовні функції

$$y = f(x) \text{ та } x = \varphi(y) (f(\varphi(y)) = y).$$

Теорема 7. Похідна x'_y оберненої функції $x = \varphi(y)$ по змінній y дорівнює оберненій величині похідної y'_x від прямої функції $y = f(x)$: $x'_y = \frac{1}{y'_x}$.

Приклад. Обчислити похідну для функції $x = \arcsin y$.

● Задана функція обернена до функції $y = \sin x$. Згідно з теоремою 7 можна записати

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

$$\text{Звідси } (\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Якщо в останньому виразі замість y записати x , то дістанемо

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2.3.3. Похідні від основних елементарних функцій

За аналогією з попередніми прикладами можна дістати похідні від основних елементарних функцій:

- | | |
|--|--|
| 1. $(x)' = 1;$ | 2. $(x^m)' = mx^{m-1};$ |
| 3. $(e^x)' = e^x;$ | 4. $(a^x)' = a^x \ln a;$ |
| 5. $(\ln x)' = \frac{1}{x};$ | 6. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a};$ |
| 7. $(\sin x)' = \cos x;$ | 8. $(\cos x)' = -\sin x;$ |
| 9. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$ | 10. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$ |
| 11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$ | 12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$ |
| 13. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$ | 14. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$ |

Продиференціюємо подані далі функції.

Приклад. $y = 3x^2 - \sqrt[3]{x} + \ln x.$

● Дана функція є алгебраїчною сумою функцій, тому використовуємо теорему 2:

$$y' = (3x^2)' - \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' + (\ln x)'.$$

У здобутому виразі перший доданок алгебраїчної суми є добуток сталої величини на степеневу функцію $\Rightarrow$ — застосуємо до нього теорему 4 і формулу (2) таблиці похідних; другий — ірраціональна функція з показником $m = \frac{1}{3}$ — застосуємо формулу (2) таблиці похідних; третій — логарифмічна функція з основою $e \Rightarrow$ — використаємо формулу (5):

$$y' = 3 \cdot 2x - \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{x} = 6x - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{x}.$$

Приклад. $y = 6^{\arcsin(x^5-4)}$.

● Задана функція складна: зовнішня — показникова функція з основою 6, внутрішня для неї — обернена тригонометрична. Обернена тригонометрична, у свою чергу, є складною, для якої внутрішня функція — алгебраїчна сума $x^5 - 4$. Для суми аргументом (скінченним) є x .

Таким чином, задана функція є суперпозицією трьох функцій.

При диференціюванні послідовно застосовуємо два рази теорему 6:

$$\begin{aligned} y &= \left[6^{\arcsin(x^5-4)} \right]_{\arcsin(x^5-4)} \left[\arcsin(x^5-4) \right]'_x = \\ &= \left[6^{\arcsin(x^5-4)} \right]_{\arcsin(x^5-4)} \left[\arcsin(x^5-4) \right]'_{x^5-4} \left[x^5-4 \right]'_x. \end{aligned}$$

У цьому виразі знизу біля кожної квадратної дужки вказано аргумент, за яким слід диференціювати функцію, взяту в дужки.

Тепер послідовно скористаємося формулами (4), (11), (2) таблиці похідних та теоремами 1, 2. Дістанемо:

$$y' = 6^{\arcsin(x^5-4)} \ln 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(x^5-4)^2}} \cdot 5x^4.$$

Взагалі використані правила та формули не фіксують, а записують кінцевий результат їх застосування.

Приклад. $y = (tg 3x)^{\sin 4x}$.

● Задана функція є степенєво-показниковим виразом виду

$$y = (u(x))^{v(x)}, \text{ де } u(x) = tg 3x, v(x) = \sin 4x. \quad (2.2)$$

Прологарифмуємо функцію (2.2) за основою e :

$$\ln y = v \ln u. \quad (2.3)$$

Оскільки $\ln y$ і $\ln u$ — складні функції, після диференціювання обох частин рівності (2.3) дістанемо:

$$\frac{1}{y} y' = v' \ln u + \frac{1}{u} u' v.$$

$$\text{Звідси } y' = y \left(v' \ln u + \frac{u'}{u} v \right) = u^v \left(v' \ln u + \frac{u'}{u} v \right).$$

Таким чином, дістали формулу для знаходження похідної від степенево-показникової функції виду (2.2).

$$y' = u^v \left(v' \ln u + \frac{u'}{u} v \right). \quad (2.4)$$

У даному випадку формула (2.4) виглядає як

$$y' = (tg 3x)^{\sin 4x} \cdot \left(4 \cos 4x \cdot \ln tg 3x + \frac{3 \sin 4x}{tg 3x \cdot \cos^2 3x} \right).$$

2.3.4. Похідні вищих порядків

Похідна $y' = f'(x)$ від функції $y = f(x)$ називається похідною першого порядку і являє собою деяку нову функцію. Можливі випадки, коли ця функція сама має похідну. Тоді похідна від похідної першого порядку $(y')'$ називається похідною другого порядку від функції $y = f(x)$ і позначається y'' , $f''(x)$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

Похідна від похідної другого порядку $(y'')'$ називається похідною третього порядку і означається y''' , $f'''(x)$, $\frac{d^3 x}{dx^3}$.

Похідна від похідної $(n - 1)$ -го порядку $(y^{(n-1)})'$ називається похідною n -го порядку і позначається $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^n y}{dx^n}$.

Таким чином, $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$, $n = 1, 2, \dots$

Приклад. Знайти похідну третього порядку для функції $y = \sin(5x + 4)$.

$$\bullet \quad y' = 5 \cos(5x + 4); \quad y'' = -25 \sin(5x + 4); \quad y''' = -125 \cos(5x + 4).$$

2.5 Частинні похідні, повний диференціал. Частинні похідні другого порядку, диференціал другого порядку

2.5.1 Частинні похідні

Означення частинних похідних. Нехай у деякій області простору задано функцію n незалежних змінних: $U=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Візьмемо довільну точку в області визначення функції багатьох змінних $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Зафіксуємо x_i і надамо аргументу x_i довільного приросту Δx_i , залишаючи значення інших $(n-1)$ змінних сталими.

Дістанемо нову точку $P_1(x_1, x_2, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n)$. Приріст Δx_i спричинить відповідний приріст функції, який називається частинним:

$$\Delta U_i = \Delta_{x_i} U = f(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

Поділимо частинний приріст ΔU_i на приріст Δx_i . Відношення $\frac{\Delta U_i}{\Delta x_i}$ виражає

середню швидкість зміни функції $U=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ за змінною x_i на ділянці від точки $P(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$ до точки $P_1(x_1, x_2, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n)$.

Перейдемо до границі у відношенні $\frac{\Delta U_i}{\Delta x_i}$, спрямовуючи Δx_i до 0.

Частинною похідною першого порядку по x_i в точці $P(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$ називається границя відношення частинного приросту функції ΔU_i до приросту аргументу Δx_i при $\Delta x_i \rightarrow 0$, якщо ця границя існує і скінченна. Записують це так:

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta U_i}{\Delta x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\Delta x_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i}$$

Для частинних похідних прийняте позначення:

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}, U'_{x_i}, \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i}, f'_{x_i}(x_1, \dots, x_n), \frac{\partial f(P)}{\partial x_i}.$$

Частинна похідна $\frac{\partial U}{\partial x_i}$ характеризує швидкість зміни функції

$U=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в точці $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в напрямі осі Ox_i . Для функції n змінних за цим принципом можна побудувати n частинних похідних першого порядку:

$$\frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial U}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial U}{\partial x_n}.$$

Для функції двох змінних $z=f(x, y)$ можна побудувати дві частинні похідні першого порядку:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{z(x + \Delta x, y) - z(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z_x}{\Delta x}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{z(x, y + \Delta y) - z(x, y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta z_y}{\Delta y}.\end{aligned}$$

Частинні похідні вищих порядків. Теорема Шварца

Частинні похідні вищих порядків знаходять аналогічно звичайним похідним вищих порядків. Припустимо, що функція $U = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(X)$ має усі перші частинні похідні за своїми змінними. При цьому результатом диференціювання є функції

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial U}{\partial x_i} = f'_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n); i = 1, n \quad (2.5)$$

Нехай функції $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ мають, у свою чергу, перші частинні похідні за тими самими змінними, тобто

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} = \psi_{ik}(x_1, x_2, \dots, x_n); (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

Використовуючи формулу (2.5), дістанемо

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x_k \partial x_i} = \psi_{ik}(X). \quad (2.6)$$

Частинні похідні

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_k}$$

називаються *другими частинними похідними*, або частинними похідними другого порядку. Для других частинних похідних від функції $U = f(X)$ прийнято також ще й такі позначення:

$$U''_{x_i x_k}; U''_{x_k x_i}; f''_{x_i x_k}; f''_{x_k x_i}$$

Похідні $U''_{x_i x_k}$, $i, k = 1, 2, \dots, n$, $i \neq k$ називаються *мішаними*, їх дістають диференціюванням функції $U = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, спочатку по x_k , а потім по x_i . Функція $U = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ може мати n^2 похідних другого порядку.

Теорема Шварца. Якщо функція $U = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ визначена разом із своїми частинними похідними

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, i = 1, 2, \dots, n; \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}, k = 1, 2, \dots, n$$

в деякому околі точки $P_0(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$, причому

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}; i, k = 1, 2, \dots, n, i \neq k$$

неперервні в точці P_0 , то значення мішаних похідних другого порядку за різними змінними не залежить від порядку диференціювання:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}; i, k = 1, 2, \dots, n, i \neq k$$

Теорема справджується і для мішаних похідних більш високого порядку.

Наприклад, для функції $z = x^3 y^2 - 3xy^3 - 7xy + 5$ маємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 3x^2 y^2 - 3y^3 - 7y; \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3 y - 9xy^2 - 7x; \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= 6xy^2; \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6x^2 y - 9y^2 - 7; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x^2y - 9y^2 - 7; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^3 - 18xy.$$

Тобто

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Аналогічно можна довести, що

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$$

Зауважимо, що коли якась умова теореми Шварца не виконана, то мішані похідні можуть залежати від порядку диференціювання.

2.4.3. Частинний і повний диференціали функції багатьох змінних. Диференційовані функції.

Теорема. Якщо функція $U = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ має неперервні частинні похідні в деякій точці $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то її повний приріст зображується у вигляді (1.10), причому $\frac{\partial U}{\partial x_i}$ не залежить від Δx_i .

Позначивши $\frac{\partial U}{\partial x_i} = A_i$, повний приріст функції $U = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можна зобразити у вигляді

$$\Delta U = \sum_{i=1}^n A_i \Delta x_i + \sum_{i=1}^n \alpha_i \Delta x_i \quad (2.7)$$

Якщо приріст функції U в точці $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можна зобразити у вигляді (2.7), де A_i не залежить від Δx_i , то функція U називається *диференційованою в точці*. Якщо $U = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ диференційована в кожній точці області свого визначення, то вона називається *диференційованою в області*.

Зміст означення диференційованої функції багатьох змінних зводиться, таким чином, до зображення її повного приросту у вигляді двох частин, одна з яких лінійна відносно приросту незалежних змінних, а друга — нескінченно мала більш високого порядку мализни, ніж перша. Якщо останнє твердження прийняти за означення диференційованої функції багатьох змінних, то справджується така теорема.

Теорема. Для того щоб функція $U = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, була диференційованою в точці, необхідно, щоб вона мала в цій точці частинні похідні, і достатньо, щоб ці частинні похідні були неперервні в точці.

Введемо поняття повного диференціала функції багатьох змінних. Сума частинних диференціалів функції багатьох змінних називається *повним диференціалом*. Для функції $z = f(x, y)$ маємо

$$dz = d_x z + d_y z, \quad dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y$$

Оскільки x і y - незалежні змінні, а для них $\Delta x = \partial x, \Delta y = \partial y$, то

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \partial x + \frac{\partial z}{\partial y} \partial y.$$

Аналогічно повний диференціал функції $U = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ запишемо у вигляді

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial U}{\partial x_n} dx_n = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial x_i} dx_i.$$

Тоді формула (2.7) набуває вигляду

$$\Delta U = dU + \sum_{i=1}^n \alpha_i \Delta x_i$$

Таким чином, доведено таку теорему.

Теорема. Якщо функція багатьох змінних диференційована в деякій точці, то її повний приріст дорівнює сумі повного диференціала і нескінченно малих більш високого порядку мализни.

ІІІ ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

3.1 Первісна. Невизначений інтеграл

3.1.1. Поняття первісної

Означення. Функція $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$ на проміжку I , якщо на цьому проміжку $F'(x) = f(x)$ або $dF(x) = f(x)dx$.

Із означення виходить, що первісна $F(x)$ — диференційована, а значить неперервна функція на проміжку I , і її вигляд суттєво залежить від проміжку, на якому вона розглядається.

Приклад. Первісні для функції $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ мають вигляд:

$$F_1(x) = \operatorname{arctg} x, \text{ бо } F_1'(x) = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$F_2(x) = \operatorname{arctg} x + C, \text{ бо } F_2'(x) = (\operatorname{arctg} x + C)' = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$F_3(x) = -\operatorname{arctg} \frac{1}{x}, \text{ бо}$$

$$F_3'(x) = \left(-\operatorname{arctg} \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty),$$

причому $F_1(x)$, $F_2(x)$ — неперервні $\forall x \in \mathbb{R}$, а $F_3(x)$ у точці $x = 0$ має розрив (рис. 3.1). У цьому прикладі первісні $F_i(x)$ $i = 1, 2, 3$, знайдені методом добору із наступною перевіркою, з використанням таблиці похідних функцій.

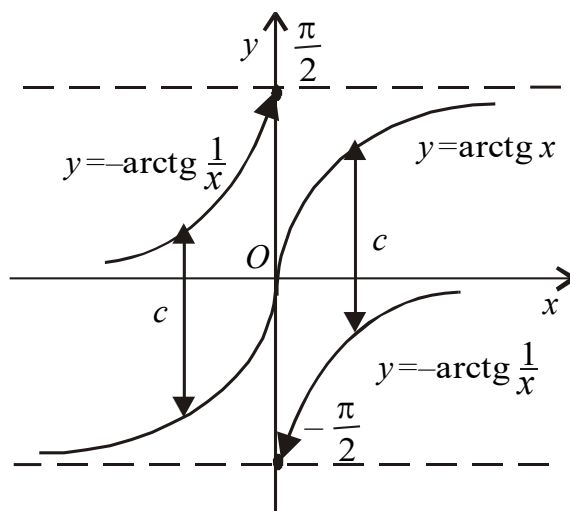


Рисунок 3.1

Теорема 1 (про множину первісних). Якщо $F(x)$ — первісна для функції $f(x)$ на проміжку I , то

- 1) $F(x) + C$ — також первісна для $f(x)$ на проміжку I ;
- 2) будь-яка первісна $\Phi(x)$ для $f(x)$ може бути подана у вигляді $\Phi(x) = F(x) + C$ на проміжку I . (Тут $C = \text{const}$ називається довільною сталою.)

Наслідок. Дві будь-які первісні для однієї й тієї самої функції на проміжку I відрізняються між собою на сталу величину (рис. 3.1).

3.1.2. Задача інтегрування. Невизначений інтеграл

Означення. Операція знаходження первісних для функції $f(x)$ називається інтегруванням $f(x)$.

Задача інтегрування функції на проміжку полягає у тому, щоб знайти всі первісні функції на цьому проміжку, або довести, що функція не має первісних на цьому проміжку.

Для розв'язування задачі інтегрування функції достатньо знайти одну будь-яку первісну на розглядуваному проміжку, наприклад $F(x)$, тоді (за теоремою про множину первісних) $F(x) + C$ — загальний вигляд всієї множини первісних на цьому проміжку.

Означення. Функція $F(x) + C$, що являє собою загальний вигляд всієї множини первісних для функції $f(x)$ на проміжку I , називається невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ на проміжку I і позначається

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad (F'(x) = f(x)), \quad (3.1)$$

де $\int$ — знак невизначеного інтеграла;

$f(x)$ — підінтегральна функція;

$f(x)dx$ — підінтегральний вираз;

dx — диференціал змінної інтегрування.

Геометричний зміст невизначеного інтеграла полягає в тому, що функція $y = F(x) + C$ є рівняння однопараметричної сім'ї кривих, які утворюються одна з одної паралельним перенесенням уздовж осі ординат (рис. 3.2).

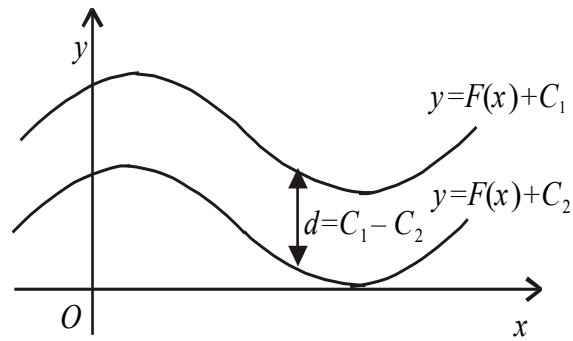


Рисунок 3.2

Теорема 2 (Коші). Для існування невизначеного інтеграла для функції $f(x)$ на певному проміжку достатньо, щоб $f(x)$ була неперервною на цьому проміжку.

Зауваження. Виявляється, є такі невизначені інтеграли від елементарних функцій, які через елементарні функції не виражаються, наприклад:

$$\int e^{-x^2} dx, \int \frac{\sin x}{x}, \int \frac{dx}{\ln x}, \int \cos x^2 dx$$

існують у кожному із проміжків області визначення, але записати їх через основні елементарні функції не можна; в такому розумінні ці інтеграли називають «неінтегрованими».

3.1.3. Властивості невизначеного інтеграла

а) Властивості, що випливають із означення (3.1).

I. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції $\left(\int f(x) dx \right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$.

II. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу.

III. $\int dF(x) = F(x) + C$.

б) Властивості, що відображають основні правила інтегрування.

IV. Сталий множник, що не дорівнює нулю, можна виносити з-під знака інтеграла, тобто

$$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx, \quad k \neq 0. \quad (3.2)$$

V. Невизначений інтеграл від суми функцій дорівнює сумі невизначених інтегралів від цих функцій, якщо вони існують, тобто

$$\int (f_1(x) + f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx. \quad (3.3)$$

3.1.4. Таблиця основних інтегралів

1. $\int 0 \cdot dx = C$; 2. $\int dx = x + C$; 3. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$;
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$; 5. $\int e^x dx = e^x + C$; 6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a \neq 1$;
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$; 8. $\int \cos x dx = \sin x + C$;
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$; 10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;
11. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$; 12. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$;
13. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C$; 14. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$;
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$;
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C$;
17. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C$;
18. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C$;
19. $\int \frac{x dx}{x^2+a} = \frac{1}{2} \ln|x^2+a| + C$;
20. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, a \neq 0$;
21. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C$.

3.2. Основні методи інтегрування

Безпосереднє інтегрування. Обчислення інтегралів за допомогою таблиці найпростіших інтегралів й основних властивостей невизначених інтегралів називається *безпосереднім інтегруванням*.

Метод безпосереднього інтегрування. Коли $\varphi(x)$ є лінійною функцією, тобто $\varphi(x) = ax + b$, дістаємо:

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} \int f(ax+b) \cdot d(ax+b) = \frac{1}{a} F(ax+b) + C.$$

Зауваження. Під знак диференціала можна вносити будь-який сталий доданок (значення диференціала при цьому не зміниться):

Приклад.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x dx}{1+3\cos x} &= \int \frac{d(-\cos x)}{1+3\cos x} = -\frac{1}{3} \int \frac{d(3\cos x)}{1+3\cos x} = \\ &= -\frac{1}{3} \int \frac{d(1+3\cos x)}{1+3\cos x} = -\frac{1}{3} \ln|1+3\cos x| + C. \end{aligned}$$

Метод підстановки (заміна змінної інтегрування). Мета методу підстановки – перетворити даний інтеграл до такого вигляду, який простіше інтегрувати.

Теорема. Якщо $f(x)$ – неперервна, а $x = \varphi(t)$ має неперервну похідну, то:

$$\int f(x) dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) dt; \\ t = \varphi^{-1}(x) \end{array} \right| = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Наслідок.

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \left| \varphi(x) = t \right| = \int f(t) dt.$$

Приклад.

$$\int \sin^5 x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{1}{6} \sin^6 x + C.$$

Метод інтегрування частинами. Формулою інтегрування частинами у невизначеному інтегралі називається формула

$$\int u dv = uv - \int v du$$

де u й v – диференційовані функції по x .

На практиці функції $u(x)$ та $v(x)$ рекомендується вибирати за таким правилом: при інтегруванні частинами підінтегральний вираз $f(x)dx$ розбивають на два множники типу $u \cdot dv$, тобто $f(x)dx = u \cdot dv$; при цьому

функція $u(x)$ вибирається такою, щоб при диференціюванні вона спрощувалась, а за dv беруть залишок підінтегрального виразу, який містить dx , інтеграл від якого відомий, або може бути просто знайдений.

Приклад.

$$\int x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = \sin x dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \int dv = \int \sin x dx \Rightarrow \\ \Rightarrow v = -\cos x \end{array} \right| = -x \cos x - \int -\cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

3.3 Інтегрування різних класів функцій

3.3.1. Основні означення

Означення. Відношення двох многочленів $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ називається *раціональним дробом*.

Означення. Раціональний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ називається *правильним*, якщо степінь многочлена в чисельнику менший від степеня многочлена в знаменнику, тобто $n < m$; якщо $n \geq m$, то дріб називається *неправильним*.

Теорема 1. Будь-який неправильний раціональний дріб можна подати у вигляді суми многочлена (цілої частини) та правильного раціонального дробу.

Всякий правильний дріб можна розкласти на суму простих: I. $\frac{A}{x-a}$; II. $\frac{B}{(x-a)^k}$; III. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$; IV. $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$, де

$$D = p^2 - 4q < 0,$$

$k \geq 2, k \in \mathbb{N}$. Це роблять методом невизначених коефіцієнтів.

Метод невизначених коефіцієнтів. Метод невизначених коефіцієнтів дає алгоритм для знаходження коефіцієнтів розкладу правильного раціонального дробу на суму простих.

Приклад.

$$\frac{5x^3 + 3x - 9}{(x-6)^2(x+4)(x^2+3x+11)^3} = \frac{A_1}{(x-6)} + \frac{A_2}{(x-6)^2} + \frac{B}{(x+4)} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+3x+11)} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+3x+11)^2} + \frac{M_3x+N_3}{(x^2+3x+11)^3}.$$

Це приклад розкладу правильного раціонального дробу на суму простих, де A_1, A_2, B, M_i, N_i – невизначені коефіцієнти. Зводимо праву частину рівності до спільного знаменника. Прирівнюємо відповідні коефіцієнти чисельника лівої частини з коефіцієнтами чисельника правої. Отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв'язки її є коефіцієнтами розкладу.

3.3.2. Інтегрування дробово-раціональних функцій

$$\text{I. } \int \frac{Adx}{x-a} = \left| \frac{t=x-a}{dt=dx} \right| = A \int \frac{dt}{t} = A \ln|t| + C = A \ln|x-a| + C.;$$

$$\begin{aligned} \text{II. } \int \frac{Bdx}{(x-a)^k} &= \left| \frac{t=x-a}{dt=dx} \right| = B \int \frac{dt}{t^k} = B \int t^{-k} dt = B \frac{t^{-k+1}}{-k+1} + C = \\ &= \frac{A}{1-k} t^{-k+1} + C = \frac{A}{1-k} (x-a)^{-k+1} + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{III. } \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx &= \left| (x^2+px+q)' = 2x+p \right| \int \frac{\frac{M}{2}(2x+p) + (N - \frac{Mp}{2})}{x^2+px+q} dx = \\ &= \frac{M}{2} \int \frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q} + \left(N - \frac{Mp}{2} \right) \int \frac{dx}{x^2+px+q} = \end{aligned}$$

Обчислимо обидва інтеграли. В першому зробимо заміну $t = x^2 + px + q$; $dt = 2x + p$, одержимо інтеграл

$$\int \frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x^2+px+q| + C.$$

Відносно другого маємо

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2+px+q} &= \int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + a^2} = \left| \frac{t = x + \frac{p}{2}}{dt = dx} \right| = \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \\ &= \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C_1 = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{a} + C_1. \end{aligned}$$

Завдяки цьому

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx = \frac{M}{2} \ln|x^2+px+q| + \frac{2N-Mp}{2a} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{a} + C.$$

Приклад. Знайти $\int \frac{2x-2}{x^2-4x+8} dx$.

На практиці інтеграли такого типу обчислюють, виділивши в знаменнику повний квадрат $x^2 - 4x + 8 = x^2 - 4x + 4 + 4 = (x - 2)^2 + 2^2$.

$$\begin{aligned} \int \frac{2x-2}{x^2-4x+8} dx &= \int \frac{2x-2}{(x-2)^2+2^2} dx = \left| \begin{array}{l} x-2=t \\ x=t+2 \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{2(t+2)-2}{t^2+2^2} dt = \\ \int \frac{2t+2}{t^2+2^2} dt &= \int \frac{2t}{t^2+2^2} dt + \int \frac{2}{t^2+2^2} dt = \int \frac{d(t^2+2^2)}{t^2+2^2} + 2 \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C = \\ \ln|t^2+4| + \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C &= \ln|(x-2)^2+4| + \operatorname{arctg} \frac{x-2}{2} + C. \end{aligned}$$

IV. $\int \frac{(Ax+B)dx}{(x^2+px+q)^k}$ – інтегрується за допомогою рекурентної формули

$$I_k = \frac{t}{2a^2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2a^2(k-1)} I_{k-1}.$$

3.3.3. Методика інтегрування раціональних функцій

1. Якщо підінтегральна функція – неправильний раціональний дріб, то за допомогою ділення його розкладають на суму многочлена та правильного раціонального дробу.

2. Знаменник правильного раціонального дробу розкладають на множники. За виглядом знаменника правильний раціональний дріб подають у вигляді суми найпростіших дроби, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів.

3. Інтегрують цілу частину та найпростіші дроби.

3.3.4. Інтегрування тригонометричних та деяких ірраціональних функцій

Інтегрування тригонометричних функцій. Розглянемо $\int R(\sin x, \cos x) dx$, де R – раціональна функція відносно $\sin x, \cos x$, тобто над $\sin x, \cos x$ виконуються лише арифметичні дії та піднесення до цілого степеня.

Існують такі підстановки, що за їх допомогою інтеграл $\int R(\sin x, \cos x) dx$ завжди може бути зведений до інтеграла від раціональної функції $\int R^*(t) dt$, загальну схему інтегрування якої

розроблено.

I. Універсальна тригонометрична підстановка $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$.

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}; \\ \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}; \\ \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2} = \int R^*(t) dt.$$

Приклад. $\int \frac{dx}{\sin x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad x = 2 \operatorname{arctg} t, \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}; \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{(1+t^2)2dt}{2t(1+t^2)} =$

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

Зауваження. На практиці універсальну тригонометричну підстановку використовують, якщо $\sin x$, $\cos x$ входять у невисокому степені (інакше розрахунки будуть дуже складні).

II. Підінтегральна функція – непарна відносно $\sin x$, тоді роблять підстановку $\cos x = t$.

Приклад. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x \cdot \sin x}{\cos^2 x \cdot \sin x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \sin x dx =$

$$= \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \sin x dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| = \int \frac{1-t^2}{t^2} (-dt) =$$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) dt = t + \frac{1}{t} + C = \cos x + \frac{1}{\cos x} + C.$$

III. Підінтегральна функція – непарна відносно $\cos x$ раціоналізується за допомогою підстановки $\sin x = t$.

Приклад. $\int \cos^3 x \sin^2 x dx = \int \cos^2 x \sin^2 x \frac{\cos x}{\cos x} dx =$

$$\begin{aligned}
&= \int \cos^2 x \cdot \sin^2 x \cdot \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x) \sin^2 x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \\
&= \int (1 - t^2) t^2 dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C.
\end{aligned}$$

IV. Підінтегральна функція $R(\sin x, \cos x)$ – парна відносно $\sin x$ і $\cos x$ разом, тобто $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$.

У цьому випадку використовують підстановку $\operatorname{tg} x = t$ або $\operatorname{ctg} x = t$.

V. Підінтегральна функція $R(\operatorname{tg} x)$ раціоналізується підстановкою $\operatorname{tg} x = t$.

Зауваження. В інтегралах $\int \sin^{2n} x \cdot \cos^{2m} x dx$ рекомендується скористатись формулами пониження степеня:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

Приклад.

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{1}{4} \int \sin^2 2x dx = \frac{1}{4} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} dx = \frac{1}{8} \left(x - \frac{1}{4} \sin 4x \right) + C.$$

Зауваження. При інтегруванні інтегралів типу:

$$\int \sin(ax) \cdot \cos(bx) dx, \quad \int \cos(ax) \cdot \cos(bx) dx, \quad \int \sin(ax) \cdot \sin(bx) dx \quad a \neq b$$

користуються формулами: $\sin(ax) \cdot \cos(bx) = \frac{1}{2} (\sin(a+b)x + \sin(a-b)x),$

$$\cos(ax) \cos(bx) = \frac{1}{2} (\cos(a+b)x + \cos(a-b)x),$$

$$\sin(ax) \cdot \sin(bx) = \frac{1}{2} (\cos(a-b)x - \cos(a+b)x).$$

Приклад.

$$\int \cos 2x \cdot \sin 5x \cdot dx = \frac{1}{2} \int (\sin 7x + \sin 3x) dx = -\frac{1}{14} \cos 7x - \frac{1}{6} \cos 3x + C.$$

Інтегрування деяких ірраціональних функцій. Розглянемо підстановки для інтегрування деяких типів ірраціональних функцій, при цьому символ $R(x; y)$ означає раціональну залежність від змінних x та y .

$$\text{I. } \int R\left(x, \sqrt[n]{(ax+b)^m}\right) dx = \left| \begin{array}{l} ax+b = t^n \\ x = \frac{1}{a}(t^n - b) \\ dx = \frac{n}{a} t^{n-1} dt \end{array} \right| = \int R\left(\frac{t^n - b}{a}, t^n\right) \frac{nt^{n-1} dt}{a} = \int R^*(t) dt.$$

Приклад. $\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} = \left| \begin{array}{l} x+1=t^3 \\ x=t^3-1 \\ dx=3t^2 dt \end{array} \right| = \int \frac{(t^3-1)3t^2 dt}{t^2} = 3 \int (t^3-1) dt =$
 $= \frac{3}{4} t^4 - 3t + C = \frac{3}{4} \sqrt[3]{(x+1)^4} - \sqrt[3]{x+1} + C.$

II. $\int R \left(x, \sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^m} \right) dx = \left| \frac{ax+b}{cx+d} = t^n \right| = \int R^*(t) dt.$

Приклад.

$$\int \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx = \left| \begin{array}{l} \frac{x+1}{x-1} = t^2, x+1=t^2(x-1), \\ x = \frac{t^2+1}{t^2-1}; dx = \frac{-4t dt}{(t^2-1)^2} \end{array} \right| = \int \frac{(t^2-1)^2 t (-4t) dt}{(t^2+1)^2 (t^2-1)^2} =$$

$$= 2 \int \frac{t \cdot (-2t) dt}{(t^2+1)^2} = \left| \begin{array}{l} u=t, du=dt; \\ \frac{-2t dt}{(t^2+1)^2} = dv \Rightarrow v = \frac{1}{t^2+1} \end{array} \right| = \frac{2t}{t^2+1} - 2 \int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{2t}{t^2+1} - 2 \operatorname{arctg} t + C = 2 \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x+1}{x-1}} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + C =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + C.$$

III. $\int R \left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_k}{n_k}} \right) dx = \left| \frac{ax+b}{cx+d} = t^s \right|,$

$$s = HCK(n_1, n_2, \dots, n_k) \Big| = \int R^*(t) dt.$$

Приклад. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}} = \left| \begin{array}{l} x=t^{12}, 12 = HCK(2, 3, 4) \\ dx=12t^{11} dt; t=\sqrt[12]{x} \end{array} \right| = \int \frac{t^6 \cdot 12t^{11} dt}{t^8 - t^3} =$
 $= 12 \int \frac{t^{14} dt}{t^5 - 1} = 12 \int \frac{t^4 (t^{10} - 1 + 1) dt}{t^5 - 1} = 12 \int \left(t^4 (t^5 + 1) + \frac{t^4}{t^5 - 1} \right) dt =$
 $= 12 \left(\frac{t^{10}}{10} + \frac{t^5}{5} + \frac{1}{5} \ln |t^5 - 1| \right) + C = \frac{6}{5} \sqrt[6]{x^5} + \frac{12}{5} \cdot \sqrt[12]{x^5} + \frac{12}{5} \ln |\sqrt[12]{x} - 1| + C.$

3.4. Поняття визначеного інтеграла

Нехай $y = f(x)$ — деяка функція, що задана на проміжку $[a; b]$. Розіб'ємо $[a; b]$ на n частин точками x_i , так що

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Обчислимо $f(\xi_i)$, де $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$, $i = \overline{1, n}$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Складемо інтегральну суму $S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$.

Позначимо $\lambda = \max \Delta x_i$.

Означення. Якщо існує скінченна границя інтегральних сум S_n при $\lambda \rightarrow 0$ і не залежить ні від способу розбиття $[a; b]$ на частини Δx_i , ні від вибору точок ξ_i , то ця границя називається визначеним інтегралом від функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$ і позначається:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx, \quad (3.4)$$

Де $\int_a^b$ — знак визначеного інтеграла;

a, b — нижня та верхня межі інтегрування;

$f(x)$ — підінтегральна функція;

$f(x)dx$ — підінтегральний вираз;

dx — диференціал змінної інтегрування.

За означенням, визначений інтеграл $\int_a^b f(x) dx$ — число, яке залежить від типу функції $f(x)$ та проміжку $[a; b]$; він не залежить від того, якою буквою позначена змінна інтегрування:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt.$$

Означення. Функція, для якої на $[a; b]$ існує визначений інтеграл $\int_a^b f(x) dx$ називається інтегрованою на цьому проміжку.

Далі буде показано, що неперервні функції — інтегровані.

Геометричний зміст визначеного інтеграла

Якщо $f(x) \geq 0$, $x \in [a; b]$, то $\int_a^b f(x)dx$ дорівнює площі відповідної криволінійної трапеції (рис. 8.4).

3.5 Властивості визначеного інтеграла

I. Якщо $f(x) = c = \text{const}$, то $\int_a^b c dx = c \cdot (b - a)$.

II. Сталий множник можна виносити з-під знака визначеного інтеграла, тобто $\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx$.

III. Якщо $f_1(x)$ та $f_2(x)$ інтегровані на $[a; b]$, то

$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x) dx.$$

IV. Якщо у визначеному інтегралі поміняти місцями межі інтегрування, то інтеграл змінить лише свій знак на протилежний, тобто $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$.

V. Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю $\int_a^a f(x) dx = 0$.

VI. Якщо $f(x)$ — інтегрована в будь-якому із проміжків: $[a; b]$, $[a; c]$, $[c; b]$, то $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

VII. Якщо $f(x) \geq 0$ і інтегрована для $x \in [a, b]$, $b > a$, то $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

VIII. Якщо $f(x)$, $g(x)$ — інтегровані та $f(x) \geq g(x)$ для $x \in [a, b]$, $b > a$, то $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.

IX. Якщо $f(x)$ — інтегрована та $m \leq f(x) \leq M$ для $x \in [a, b]$, $b > a$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

Доведення впливає як наслідок із властивостей I та VIII.

X. Теорема 7 (про середнє).

Якщо функція $f(x)$ — неперервна для $x \in [a, b]$, $b > a$, то знайдеться така точка $x = c \in [a, b]$, що:

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b-a) \quad (3.5)$$

Геометричний зміст теореми про середнє полягає в тому, що існує прямокутник із сторонами $f(c)$, $c \in [a, b]$ та $b - a$, який рівновеликий криволінійній трапеції $aABb$ за умови, що функція $f(x) \geq 0$ та неперервна на проміжку $[a; b]$ (рис. 3.3).

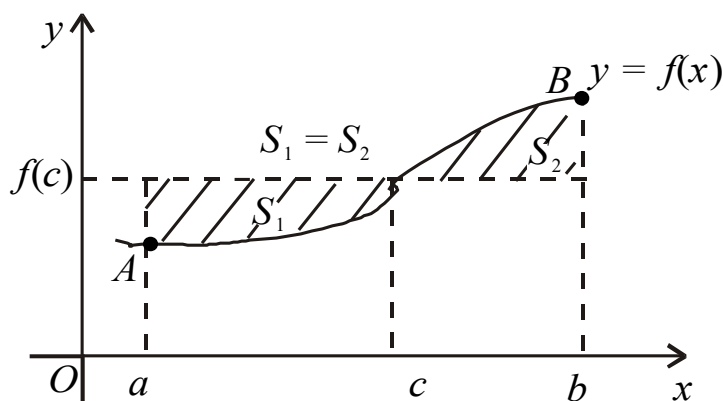


Рисунок 3.3

3.6 Обчислення визначеного інтегралу. Формула Ньютона—Лейбніца

Розглянемо інтеграл $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$, який буде функцією від верхньої межі інтегрування. Змінній x надамо приросту Δx , що зумовить приріст функції.

$$\Delta \Phi = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt. \quad (\text{рис. 3.4})$$

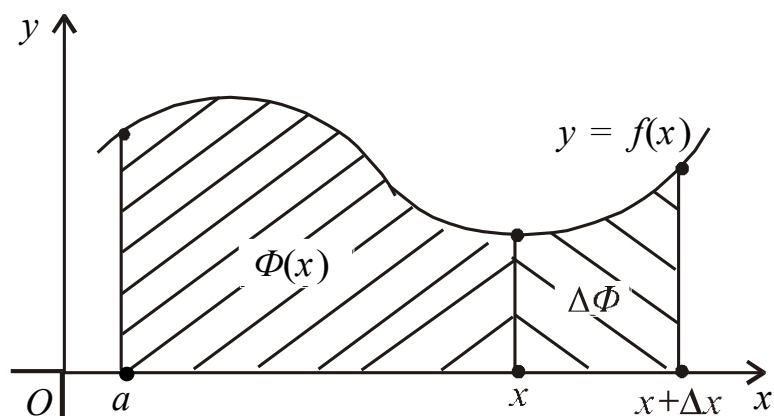


Рисунок 3.4

Теорема 8. Якщо функція $f(x)$ неперервна для будь-якого $x \in [a; b]$, то похідна від інтеграла зі змінною верхньою межею інтегрування по цій межі дорівнює підінтегральній функції від верхньої межі інтегрування, тобто

$$\Phi'_x(x) = \left(\int_a^x f(t) dt \right)'_x = f(x). \quad (3.6)$$

Наслідки:

1. Визначений інтеграл зі змінною верхньою межею від функції $f(x)$ є одна із первісних для $f(x)$.

2. Будь-яка неперервна функція на проміжку $[a; b]$ має на цьому проміжку первісну, яку, наприклад, завжди можна побудувати у вигляді визначеного інтеграла зі змінною верхньою межею, тобто

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Приклад. Знайти $\int \frac{\sin x}{x} dx, x \in [1; +\infty)$.

● Функція $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ — неперервна на проміжку $[1; +\infty)$, тому

$$\int \frac{\sin x}{x} dx = \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt + C, \forall x \in [1; +\infty).$$

Теорема 9. (Ньютона—Лейбніца). Якщо функція $f(x)$ — неперервна для $x \in [a; b]$, то визначений інтеграл від функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$ дорівнює приросту первісної функції $f(x)$ на цьому проміжку, тобто

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a), \text{ де } F'(x) = f(x). \quad (3.7)$$

Позначимо дію подвійної підстановки так: $F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$, тоді зв'язок між визначеним та невизначеним інтегралами можна подати такою рівністю:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b = (F(x) + C) \Big|_a^b = \left(\int f(x)dx \right) \Big|_a^b \quad (3.8)$$

Наслідок. Для обчислення визначеного інтеграла достатньо знайти одну із первісних підінтегральних функцій і виконати над нею подвійну підстановку.

$$\begin{aligned} \text{Приклад. } \int_0^{\ln 2} (e^x - 1)^4 e^x dx &= \int_0^{\ln 2} (e^x - 1)^4 d(e^x - 1) = \frac{1}{5} (e^x - 1)^5 \Big|_0^{\ln 2} = \\ &= \frac{1}{5} \left((e^{\ln 2} - 1)^5 - (e^0 - 1)^5 \right) = \frac{1}{5} \left((2 - 1)^5 - (1 - 1)^5 \right) = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Метод заміни змінної у визначеному інтегралі.

Теорема. Якщо: 1) $f(x)$ – неперервна для $x \in [a; b]$; 2) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$; 3) $\varphi(t)$ та $\varphi'(t)$ – неперервні для $t \in [\alpha; \beta]$; 4) при $t \in [\alpha; \beta] \Rightarrow x \in [a; b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\frac{x}{t} \Big|_a^b}^{\frac{x}{t} \Big|_a^b} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt.$$

Зауваження. При заміні змінної інтегрування у визначеному інтегралі змінюються межі інтегрування, і тому нема потреби повертатись до початкової змінної.

$$\begin{aligned} \text{Приклад. } \int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x+1}} &= \int_{\frac{x}{t} \Big|_4^9}^{\frac{x}{t} \Big|_4^9} \frac{dx}{\sqrt{x+1}} = \int_2^3 \frac{2tdt}{t+1} = 2 \int_2^3 \frac{t+1-1}{t+1} dt = \\ &= 2 \int_2^3 \left(1 - \frac{1}{t+1} \right) dt = 2 \left(t - \ln|t+1| \right) \Big|_2^3 = 2(3 - \ln 4 - (2 - \ln 3)) = 2 \left(1 + \ln \frac{3}{4} \right). \end{aligned}$$

Метод інтегрування частинами.

Теорема. Якщо функції $u(x)$ та $v(x)$ мають неперервні похідні для $x \in [a; b]$, то

$$\int_a^b u dv = (uv) \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Приклад.

$$\int_1^e \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx, v = x \end{array} \right| = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \frac{dx}{x} = e - x \Big|_1^e = 1.$$

3.7 Застосування визначеного інтеграла

Обчислення площ плоских фігур в прямокутній системі координат.
Якою б не була криволінійна фігура, що обмежена неперервними кривими лініями, шляхом її розсікання лініями паралельними осям координат, обчислення площі фігури можна звести до обчислення площ розглянутих нижче фігур.

I. Фігура обмежена лініями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ (рис. 3.5). Функція $f(x)$ — неперервна та $f(x) \geq 0$. Площа S такої криволінійної трапеції за геометричним змістом визначеного інтеграла така:

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

Якщо при виконанні всіх інших умов $f(x) \leq 0$ (рис. 3.6),

$$S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|. \quad (3.9)$$

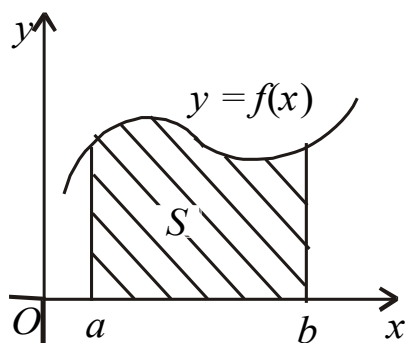


Рисунок 3.5

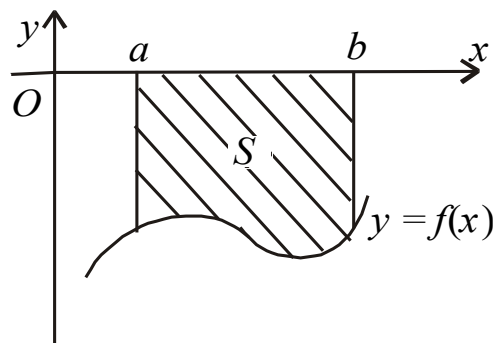


Рисунок 3.6

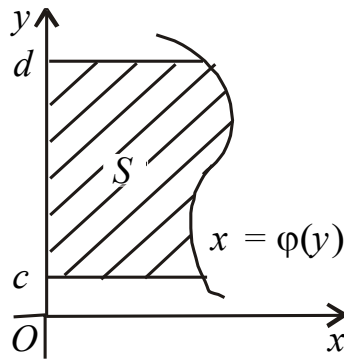


Рисунок 3.7

П. Фігура обмежена лініями $x = \varphi(y)$, $x = 0$, $y = c$, $y = d$ (рис. 3.7). Функція $x = \varphi(y)$ — неперервна та $\varphi(y) \geq 0$. Площа S такої фігури буде

$$S = \int_c^d \varphi(y) dy, \quad (3.10)$$

3.8 Невласні інтеграли

3.8.1. Невласні інтеграли I роду (з нескінченими межами)

Як відомо, ми розглядали визначений інтеграл на скінченному відрізку $[a; b]$. Проте у ряді задач стає потреба розглядати інтеграли на нескінченних проміжках $[a; \infty)$, $(-\infty; b]$, $(-\infty; +\infty)$. Отже, нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a; +\infty)$ і є неперервною на будь-якому відрізку $[a; B]$ де $B > a$. Тоді існує визначений інтеграл $\int_a^b f(x) dx$, який є функцією своєї верхньої межі.

Означення 1. Невласним інтегралом першого роду функції $f(x)$ на проміжку $[a; +\infty)$ називають границю $\lim_{B \rightarrow +\infty} \int_a^B f(x) dx$ і записують

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_a^B f(x) dx \quad (3.11)$$

У цьому випадку інтеграл називають *збіжним*, якщо границя скінченна і *розбіжним*, якщо границя не існує або нескінченна, а підінтегральну функцію — *інтегровною на проміжку $[a; +\infty)$* . Нехай тепер функція $f(x)$ визначена на проміжку $(-\infty; b]$ і є неперервною на будь-якому відрізку $[A; b]$, де $A < b$.

Означення 2. Невласним інтегралом першого роду функції $f(x)$ на проміжку $(-\infty; b]$ називають границю $\lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^b f(x) dx$ і записують

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^b f(x) dx. \quad (3.12)$$

Якщо функція $f(x)$ визначена на проміжку $(-\infty; +\infty)$ і неперервна на будь-якому відрізку $[a; b]$, то можна означити інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^C f(x) dx + \int_C^{+\infty} f(x) dx, \quad (3.13)$$

де C - довільне дійсне число. Інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^C f(x) dx + \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_C^B f(x) dx \quad (3.14)$$

називається також *невласним інтегралом першого роду* функції $f(x)$ на проміжку $(-\infty; +\infty)$.

При цьому, якщо обидва інтеграли в правій частині рівності (3.13) збігаються, то невластний інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ називають *збіжним*. Якщо хоча б один з інтегралів правої частини рівності (3.13) розбігається, то невластний інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ називають *розбіжним*.

Варто відзначити, що іноді питання про збіжність (розбіжність) невластного інтеграла можна вирішити не обчислюючи його. При цьому користуються так званими ознаками збіжності невластних інтегралів.

3.8.2. Ознаки збіжності невластних інтегралів першого роду

1. Ознака порівняння.

Якщо на проміжку $[a; +\infty)$ функції $f(x)$ і $g(x)$ – неперервні і задовольняють умову $0 \leq f(x) \leq g(x)$, то із збіжності інтеграла $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ випливає збіжність інтеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, а із розбіжності інтеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ випливає розбіжність інтеграла $\int_a^{+\infty} g(x) dx$.

2. Гранична ознака порівняння.

Якщо існує границя $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$, $0 < k < +\infty$, ($f(x) > 0$, $g(x) > 0$),

то інтеграли $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ і $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ або одночасно обидва збігаються, або одночасно розбігаються.

Наслідки. а) Якщо $k = 0$, то із збіжності $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ випливає збіжність

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$; б) Якщо $k = +\infty$, то із розбіжності $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ випливає розбіжність $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

3. Якщо інтеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ збігається, то збігається і інтеграл

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$, причому в цьому випадку він називається *абсолютно збіжним*.

Зауваження. Найчастіше при дослідженні інтегралів першого роду для порівняння використовують функції $\frac{1}{x^\alpha}$, оскільки відомо, що інтеграл

$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ ($a > 0$) збігається при $\alpha > 1$ і розбігається при $0 < \alpha \leq 1$.

Приклад.

Дослідити на збіжність (розбіжність) і обчислити інтеграли.

1. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$.

Згідно з формулою (3.11) матимемо:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_1^B \frac{dx}{x} = \lim_{B \rightarrow +\infty} \ln|x| \Big|_1^B = \lim_{B \rightarrow +\infty} (\ln|B| - \ln 1) = \lim_{B \rightarrow +\infty} \ln|B| = +\infty.$$

Границя нескінченна, отже, інтеграл розбігається.

2. $\int_0^{+\infty} e^{-4x+1} dx$.

$$\int_0^{+\infty} e^{-4x+1} dx = \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_0^B e^{-4x+1} dx = -\frac{1}{4} \lim_{B \rightarrow +\infty} e^{-4x+1} \Big|_0^B = -\frac{1}{4} \lim_{B \rightarrow +\infty} (e^{-4B+1} - e^1) =$$

$$= -\frac{1}{4} \lim_{B \rightarrow +\infty} e^{-4B+1} + \frac{1}{4} \lim_{B \rightarrow +\infty} e = -\frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot e = \frac{e}{4}.$$

Границя скінченна, заданий інтеграл збігається.

3.8.3. Невласні інтеграли другого роду (від необмежених функцій)

Як відомо, необхідною умовою інтегрованості функції на відріжку $[a; b]$ є її обмеженість. Проте є задачі, що приводять до розгляду інтеграла від функції, яка майже на всьому відріжку обмежена і стає необмеженою поблизу деякої точки, наприклад, поблизу однієї чи обох меж. Тоді природньо поширити поняття визначеного інтеграла і на такі функції, ввівши при цьому додаткові означення.

Отже, нехай функція $f(x)$ задана на відріжку $[a; b]$, крім, можливо, кінців, і є необмеженою, наприклад, поблизу точки $x = a$, зокрема на відріжку $[a; a + \varepsilon]$, де $0 < \varepsilon < b - a$. Нехай $f(x)$ є обмеженою і інтегрованою на будь-якому відріжку $[a + \varepsilon; b]$. Точку a при цьому називають *особливою точкою* функції $f(x)$.

Означення 1. Невласним інтегралом другого роду функції $f(x)$ на проміжку $(a; b]$ називається границя $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$ і позначають

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx. \quad (3.15)$$

Якщо ця границя скінченна, то інтеграл називається *збіжним*. Якщо границя нескінченна, або взагалі не існує, тоді інтеграл називається *розбіжним*. Функція $f(x)$ при цьому називається інтегрованою на даному проміжку.

Нехай тепер функція $f(x)$ є обмеженою і інтегрованою на будь-якому відріжку $[a; b - \varepsilon]$, $0 < \varepsilon < b - a$ і не є інтегрованою на відріжку $[b - \varepsilon; b]$.

Означення 2. Невласним інтегралом другого роду функції $f(x)$ на проміжку $[a; b)$ називається границя $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$ і позначають

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx. \quad (3.16)$$

У цьому випадку точка b вважається *особливою точкою* функції $f(x)$.

Розглянемо випадок, коли особливими точками функції є одночасно точки $x=a$ й $x=b$. Це означає, що функція $f(x)$ необмежена на $[a; a+\varepsilon]$ та на $[b-\varepsilon; b]$, а на будь-якому відрізку $[\alpha; \beta] \subset (a; b)$ вона є інтегрованою. Тоді покладають $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, де $x=c$ – довільна точка інтервалу $(a; b)$. В цьому разі

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^c f(x)dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_c^{b-\varepsilon} f(x)dx. \quad (3.17)$$

Іноді може трапитися випадок, коли підінтегральна функція $f(x)$ є необмеженою поблизу точки $x=c$, яка знаходиться всередині відрізка $[a; b]$. В інших частинах відрізка $[a; b]$ функція $f(x)$ інтегровна. Тобто точка $x=c$ є *особливою точкою* функції $f(x)$.

Тоді покладають $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, але тепер у цій рівності обидва інтеграла правої частини означаються формулами (3.15) та (3.16). Позначають:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx. \quad (3.18)$$

Зауважимо, що ознаки збіжності невластних інтегралів другого роду аналогічні подібним ознакам для інтегралів першого роду. При дослідженні на збіжність інтегралів, де особливою точкою є точка $x=a$, для порівняння використовують функції $\frac{1}{(x-a)^\alpha}$, інтеграл від яких

$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ збігається, якщо $0 < \alpha < 1$ і розбігається, якщо $\alpha \geq 1$. Якщо особливою точкою функції $f(x)$ є точка $x=b$, використовують функції $\frac{1}{(b-x)^\alpha}$, інтеграл від яких $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ так само збігається при $0 < \alpha < 1$ і розбігається при $\alpha \geq 1$.

Приклади. Дослідити на збіжність (розбіжність) і обчислити інтеграли.

$$\begin{aligned}
1. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sqrt{x} \bigg|_{\varepsilon}^1 = \\
&= 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (\sqrt{1} - \sqrt{\varepsilon}) = 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} 1 - 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sqrt{\varepsilon} = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 2.
\end{aligned}$$

Границя існує і скінченна, отже інтеграл збігається.

$$\begin{aligned}
2. \int_2^4 \frac{dx}{4-x} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_2^{4-\varepsilon} \frac{dx}{4-x} = - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln|4-x| \bigg|_2^{4-\varepsilon} = \\
&= - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (\ln|4-4+\varepsilon| - \ln|4-2|) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln \varepsilon + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln 2 = \infty,
\end{aligned}$$

оскільки перша границя нескінченна (при $\varepsilon \rightarrow +0$ $\ln \varepsilon \rightarrow -\infty$). Тобто наш інтеграл розбігається.

IV ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

4.1 Основні типи диференціальних рівнянь першого порядку та засоби їх розв'язання

4.1.1. Основні поняття

Означення. *Звичайним диференціальним рівнянням* називається рівняння, що залежить від незалежної змінної x , шуканої функції y та її похідних. Символічно це записують так

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (4.1)$$

Означення. Порядок найвищої похідної невідомої функції, що входить у диференціальне рівняння, називається *порядком цього рівняння*.

Приклад.

$$y'' - 2y' + y - x^2 = 0$$

диференціальне рівняння другого порядку.

Означення. *Розв'язком диференціального рівняння* називається функція $y = \varphi(x)$, яка при підстановці в рівняння перетворює його в тотожність.

Найпростішим диференціальним рівнянням є рівняння вигляду

$$y' = f(x). \quad (4.2)$$

Щоб його розв'язати, досить взяти невизначений інтеграл

$$y = \int f(x) dx = F(x) + C, \quad (4.3)$$

де C - довільна стала.

Означення. Процес знаходження розв'язку диференціального рівняння називається *інтегруванням диференціального рівняння*.

У загальному випадку для знаходження розв'язку диференціального рівняння n -го порядку буде потрібно n послідовних інтегрувань, і, виходить, розв'язок загального вигляду буде містити n незалежних довільних сталих.

Означення. *Загальним розв'язком диференціального рівняння n -го порядку* називається функція $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, яка залежить від незалежної змінної x і n незалежних довільних сталих $C_1, C_2, \dots, C_n$, що перетворює разом зі своїми похідними $y', y'', \dots, y^{(n)}$ рівняння (2.1) у

тотожність.

Означення. Частинним розв'язком диференціального рівняння (2.1) називається розв'язок, який можна отримати із загального розв'язку, якщо сталим $C_1, C_2, \dots, C_n$ надати певні числові значення.

Означення. Загальним інтегралом диференціального рівняння (2.1) називається функція $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$, яка визначає загальний розв'язок в неявному вигляді.

Означення. Частинним інтегралом диференціального рівняння (2.1) називається інтеграл, отриманий із загального інтеграла наданням сталим $C_1, C_2, \dots, C_n$ певного числового значення.

Загальний розв'язок або загальний інтеграл диференціального рівняння (2.1) з геометричної точки зору являє собою сімейство кривих на площині, (що залежить від параметрів $C_1, C_2, \dots, C_n$); назовемо їх *інтегральними кривими* диференціального рівняння.

Інтегральна крива диференціального рівняння, таким чином- це графік його розв'язку (інтегралу).

4.1.2. Диференціальні рівняння першого порядку

Диференціальне рівняння першого порядку має вигляд

$$F(x, y, y') = 0 \quad (4.4)$$

Якщо його можна розв'язати відносно y' , воно запишеться у вигляді

$$y' = f(x, y) \quad (4.5)$$

Однією з основних задач теорії диференціальних рівнянь є **задача Коші**:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (4.6)$$

Вона полягає у відшуванні розв'язку (інтегралу) диференціального рівняння, який задовольняє так звані початкові умови (початкові дані). Задача Коші звичайно виникає при аналізі процесів, обумовлених диференціальним законом і початковим станом, математичним вираженням яких і є рівняння і початкова умова (звідки термінологія і вибір позначень: початкові дані задаються при $t = 0$, а розв'язок

знаходиться при $t \geq 0$).

Означення. Загальним розв'язком диференціального рівняння першого порядку називається функція

$$y = \varphi(x, C), \quad (4.7)$$

яка залежить від довільної сталої C , що задовольняє дане диференціальне рівняння при кожному C , і для будь-якої пари значень x_0, y_0 значення $C = C_0$ визначається однозначно. Розв'язати диференціальне рівняння (4.4) або (4.5) - означає знайти його загальний розв'язок. Розв'язати задачу Коші - означає знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє задані початкові умови.

Теорема Коші (про існування і єдність розв'язку):

Якщо в рівнянні $y' = f(x, y)$ функція $f(x, y)$ і її частинна похідна по змінній y неперервні в деякій області S площини xOy , яка містить точку (x_0, y_0) , то існує єдиний розв'язок цього рівняння $y = \varphi(x)$, який задовольняє умову $y(x_0) = y_0$. Геометрично це означає, що через кожну точку області S проходить лише одна інтегральна крива.

4.1.3. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Диференціальне рівняння

$$f_1(x)dx = f_2(y)dy. \quad (4.8)$$

називається диференціальним рівнянням з відокремленими змінними. Якщо $y = \varphi(x)$ - його розв'язок, то маємо тотожність

$$f_1(x)dx = f_2[\varphi(x)]\varphi'(x)dx.$$

Інтегруємо її

$$\int f_1(x)dx = \int f_2[\varphi(x)]\varphi'(x)dx + C. \quad (4.9)$$

У правому інтегралі виконаємо заміну змінної, покладемо $y = \varphi(x)$, тоді рівність (4.9) набуде вигляду

$$\int f_1(x)dx = \int f_2(y)dy + C.$$

Таким чином, щоб розв'язати рівняння (4.8), досить проінтегрувати обидві частини цієї рівності

$$\int f_1(x)dx = \int f_2(y)dy + C \text{ або } F_1(x) = F_2(y) + C.$$

Означення. Диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними називається рівняння вигляду

$$f_1(x) \cdot f_2(y)dx = f_3(x) \cdot f_4(y)dy. \quad (4.10)$$

Вимагаючи, що в розглянутій області $f_2(y) \neq 0$ і $f_3(x) \neq 0$, розділимо обидві частини рівності (2.10) на $f_2(y) \cdot f_3(x)$. Одержимо рівняння з розділеними змінними

$$\frac{f_1(x)}{f_3(x)}dx = \frac{f_4(y)}{f_2(y)}dy.$$

Його залишається лише проінтегрувати.

Розглянемо приклад:

$$(x - y)dy = (y - 2)dx.$$

Відокремлюючи змінні, отримаємо

$$\frac{dy}{y - 2} = \frac{dx}{x - 1}.$$

З останньої рівності слідує, що $x - 1 \neq 0$ і $y - 2 \neq 0$. Інтегруємо обидві частини цієї рівності:

$$\ln|y - 2| = \ln|x - 1| + \ln C, \text{ або } y - 2 = C(x - 1).$$

Розв'язки $x = 1$ та $y = 2$ задовольняють загальний розв'язок диференціального рівняння, але вони не є розв'язками цього рівняння, це так звані загублені розв'язки. З іншого боку, розв'язками рівняння

$$(1 + x)ydx + (1 - y)x dy = 0$$

є $x = 0$ і $y = 0$, але вони не входять у загальний інтеграл $\ln|xy| + x - y = C$ цього рівняння. Отже, вони є особливими розв'язками.

4.1.4. Однорідні диференціальні рівняння

Означення. Функція $f(x, y)$ називається *однорідною функцією k -го виміру*, якщо $f(tx, ty) = t^k \cdot f(x, y)$.

Наприклад,

$$f(x, y) = 4x^3 + 7x^2y - 5xy^2 + 9y^3$$

є однорідною функцією третього виміру, тут сумарний ступінь змінних x і y в кожному доданку дорівнює трьом; функція

$$f(x, y) = \frac{x-y}{x+y} + \frac{y}{x} \ln \frac{x}{y} - 5$$

однорідна нульового виміру.

Означення. Диференціальне рівняння

$$f_1(x, y)dx = f_2(x, y)dy \quad (4.11)$$

називається *однорідним диференціальним рівнянням*, якщо $f_1(x, y)$ і $f_2(x, y)$ - однорідні функції одного й того ж виміру, або, якщо диференціальне рівняння (2.14) можна розв'язати відносно y' , тобто

$$y' = f(x, y), \quad (4.12)$$

то $f(x, y)$ - однорідна функція нульового виміру.

З співвідношення (4.12) маємо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_1(x, y)}{f_2(x, y)} = f(x, y) \quad (4.13)$$

Функції $f_1(x, y)$ і $f_2(x, y)$ однорідні одного й того ж виміру. Для визначеності будемо вважати, що вимір їх однорідності дорівнює k . З означення однорідної функції маємо

$$f(tx, ty) = \frac{f_1(tx, ty)}{f_2(tx, ty)} = \frac{t^k f_1(x, y)}{t^k f_2(x, y)} = t^0 \frac{f_1(x, y)}{f_2(x, y)} = t^0 f(x, y)$$

Поділивши чисельник і знаменник у рівності (4.13) на x^k , отримаємо

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

За допомогою підстановки $t = \frac{y}{x}$ зведемо диференціальне рівняння (4.12) до рівняння з відокремлюваними змінними.

$$t = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x \cdot t \Rightarrow \frac{dy}{dx} = t + x \frac{dt}{dx}.$$

Підставляємо це в рівняння (4.12):

$$t + x \frac{dt}{dx} = f(t) \Rightarrow \frac{dt}{f(t) - t} = \frac{dx}{x}.$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$(x - y)dy = (x + y)dx.$$

Запишемо це рівняння у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y}.$$

Розділимо чисельник і знаменник правої частини на x :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}}.$$

Покладемо

$$t = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xt \Rightarrow \frac{dy}{dx} = t + x \frac{dt}{dx}.$$

Підставляючи все це в рівняння, отримаємо

$$t + x \frac{dt}{dx} = \frac{1+t}{1-t}.$$

Відокремлюємо змінні:

$$\frac{1-t}{1+t} dt = \frac{dx}{x}.$$

Звідки

$$-t + 2 \ln(1+t) = \ln|x| + C$$

або

$$-\frac{y}{x} + 2 \ln\left(1 + \frac{y}{x}\right) = \ln|x| + C.$$

4.1.5. Лінійні рівняння

Означення. *Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння вигляду*

$$y' + p(x)y = q(x). \quad (4.13)$$

Зробимо підстановку:

$$y = u(x) \cdot v(x),$$

де $u(x)$ і $v(x)$ поки що довільні функції.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}v + u \frac{dv}{dx}.$$

Підставляємо в рівняння:

$$\frac{du}{dx}v + u \frac{dv}{dx} + p(x)uv = q(x).$$

Покладаємо

$$u \frac{dv}{dx} + p(x)uv = 0, \quad u \neq 0.$$

Зауваження. Якщо поставити $u = 0$, отримаємо $y = 0$ й $y' = 0$. Лінійне

рівняння втратить зміст. Маємо

$$\begin{cases} \frac{dv}{dx} + p(x)v = 0 \\ \frac{du}{dx}v = q(x) \end{cases}$$

Розв'яжемо перше рівняння системи:

$$\frac{dv}{v} = -p(x)dx \Rightarrow \ln|v| = -\int p(x)dx. \quad v(x) = e^{-\int p(x)dx}.$$

Отримане значення $v(x)$ підставляємо в друге рівняння системи, і знаходимо

$$u(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C.$$

Шуканий розв'язок

$$y = \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right) e^{-\int p(x)dx}.$$

Зауваження. При розв'язанні конкретних лінійних диференціальних рівнянь першого порядку варто користуватися не остаточною формулою для знаходження шуканої функції, а запропонованою схемою його рішення.

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y' - 2xy = 2x^3$$

Це лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Робимо заміну:

$$y = u \cdot v, \quad y' = \frac{du}{dx}v + u \frac{dv}{dx}.$$

Підставляємо в рівняння:

$$\frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx} - 2xuv = 2x^3.$$

Покладемо

$$\begin{cases} \frac{dv}{dx} - 2xv = 0 \\ \frac{du}{dx} = 2x^3 \end{cases}$$

Розв'яжемо перше рівняння системи:

$$\frac{dv}{v} = 2x dx; \Rightarrow \ln|v| = x^2; \Rightarrow v = e^{x^2}.$$

Підставляємо в друге рівняння системи:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx}e^{x^2} &= 2x^3; \Rightarrow du = 2x^3e^{-x^2} dx; \Rightarrow \\ u &= \int 2x^3e^{-x^2} dx = \left[\begin{matrix} t = -x^2 \\ dt = -2xdx \end{matrix} \right] = -\int te^t dt = \left[\begin{matrix} \text{за частинами:} \\ u = t; dv = e^t dt \\ du = dt; v = e^t \end{matrix} \right] = \\ &= -te^t + \int e^t dt = -te^t + e^t + C = x^2e^{-x^2} + e^{-x^2} + C. \end{aligned}$$

Шуканий розв'язок

$$y = u \cdot v = (x^2e^{-x^2} + e^{-x^2} + C)e^{x^2} = x^2 + 1 + Ce^{x^2}.$$

4.1.6 Рівняння Бернуллі

Означення. Диференціальним рівнянням Бернуллі називається рівняння вигляду

$$y' + p(x)y = q(x)y^n. \quad (4.13)$$

Покажемо спосіб, за допомогою якого рівняння Бернуллі приводиться до лінійного рівняння. Розділимо обидві частини рівності (4.13) на y^n . Отримаємо

$$y^{-n} y' + p(x) y^{1-n} = q(x).$$

Зробимо заміну змінної, покладаючи

$$z = y^{1-n}, \Rightarrow z' = (1-n)y^{-n}.$$

Підставляємо в рівняння

$$z' + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x).$$

Якщо ще позначити

$$P(x) = (1-n)p(x), \quad Q(x) = (1-n)q(x),$$

отримаємо лінійне рівняння щодо невідомої функції $z = z(x)$

$$z' + P(x)z = Q(x).$$

Отримавши розв'язок цього рівняння, легко отримаємо розв'язок рівняння (4.13) з рівності $y = \sqrt[1-n]{z}$.

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння Бернуллі

$$y' - \operatorname{tg} x y = -\cos x \cdot y^2.$$

Розділимо обидві частини цієї рівності на y^2 :

$$y^{-2} y' - \operatorname{tg} x \frac{1}{y} = -\cos x.$$

Робимо заміну:

$$z = \frac{1}{y}; \Rightarrow z' = -\frac{1}{y^2} y'.$$

Підставляємо в рівняння

$$-\frac{1}{y^2} y' + \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{y} = \cos x \quad \text{або} \quad z' + \operatorname{tg} x \cdot z = \cos x$$

- лінійне диференціальне рівняння першого порядку.

$$z = u \cdot v; \quad z' = \frac{du}{dx} v + u \frac{dv}{dx}; \quad \frac{du}{dx} v + u \frac{dv}{dx} + \operatorname{tg} x \cdot u \cdot v = \cos x$$

$$\begin{cases} \frac{dv}{dx} + \operatorname{tg} x \cdot v = 0 \\ \frac{du}{dx} v = \cos x \end{cases} \quad \frac{dv}{v} = -\operatorname{tg} x; \Rightarrow \ln v = \ln \cos x; \Rightarrow v = \cos x$$

$$\frac{du}{dx} \cos x = \cos x; \Rightarrow du = dx; \Rightarrow u = x + C; \quad z = u \cdot v = (x + C) \cos x.$$

Шуканий розв'язок

$$y = \frac{1}{z} = \frac{1}{(x + C) \cos x}.$$

4.2 Диференціальні рівняння вищих порядків

4.2.1 Диференціальні рівняння другого порядку, що допускають пониження порядку

У деяких випадках розв'язок диференціального рівняння другого порядку спрощується за рахунок пониження його порядку.

1) Диференціальне рівняння вигляду

$$y'' = f(x).$$

Інтегруємо по x обидві частини цієї рівності:

$$y' = \int f(x) dx + C_1,$$

де C_1 - стала інтегрування. Шуканий розв'язок

$$y = \int \left(\int f(x) dx + C_1 \right) dx + C = \int \left(\int f(x) dx \right) dx + C_1 x + C_2.$$

2) Диференціальне рівняння не містить явно шукану функцію y :

$$y'' = f(x, y').$$

Введемо нову невідому $p(x) = y'(x)$, тоді $y'' = \frac{dp}{dx}$. А рівняння звелось до рівняння першого порядку щодо шуканої функції $p = p(x, C_1)$. Загальний розв'язок даного рівняння

$$y = \int p(x, C_1) dx + C_2.$$

3) Диференціальне рівняння не містить явно незалежну змінну x

$$y'' = f(y, y').$$

Покладемо $y' = p(x)$; тоді

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p.$$

Підставляємо у вихідне рівняння

$$p \frac{dp}{dy} = f(y, p), \Rightarrow p = p(y, C_1), \text{ або } \frac{dy}{dx} = p(y, C_1).$$

Розділяємо змінні

$$\frac{dy}{p(y, C_1)} = dx.$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння знайдемо із співвідношення

$$x = \int \frac{dy}{p(y, C_1)} + C_2.$$

Зауваження. У загальному випадку розв'язок диференціального рівняння може бути отриманий і у неявному вигляді: $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$.

4.2.2 Лінійні диференціальні рівняння

Означення. Диференціальне рівняння називається *лінійним*, якщо воно лінійне щодо шуканої функції та її похідних

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \quad (4.14)$$

де a_i ($i=1,2,\dots,n$) - або неперервні функції, або постійні.

Означення. Диференціальне рівняння (4.14) називається *неоднорідним*, якщо $f(x) \neq 0$, і *однорідним*, якщо $f(x) \equiv 0$. Розв'яжемо рівняння (4.14) щодо старшої похідної

$$y^{(n)} = f(x) - a_1 y^{(n-1)} - \dots - a_{n-1} y' - a_n y.$$

Воно задовольняє умовам теореми існування і єдності.

Зауваження. Надалі ми іноді будемо посилалися на диференціальні рівняння n -го порядку, але основні доведення будемо проводити лише для рівнянь не вище другого порядку.

Властивості лінійних однорідних рівнянь.

Обмежимося диференціальними рівняннями другого порядку

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0. \quad (4.15)$$

Теорема 1. Якщо y_1 і y_2 - розв'язки рівняння (4.15), то і їхня сума $y_1 + y_2$ також є розв'язком цього рівняння.

Теорема 2. Якщо y_0 є розв'язком рівняння (4.15), тоді і Cy_0 також є розв'язком цього рівняння, де $C = \text{const}$.

Дійсно,

$$y_0'' + a_1(x)y_0' + a_2(x)y_0 \equiv 0.$$

Підставляємо Cy_0 :

$$(Cy_0)'' + a_1(x)(Cy_0)' + a_2(x)(Cy_0) = C(y_0'' + a_1(x)y_0' + a_2(x)y_0) \equiv 0.$$

Означення. Два розв'язки $y_1(x)$ і $y_2(x)$ рівняння (4.15) називаються

лінійно незалежними на відрізку $[a, b]$, якщо $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq \lambda(\text{const})$; і лінійно

залежними, якщо $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \lambda$.

Теорема 3. (про загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння (ЛОДР)). Якщо y_1 і y_2 - лінійно незалежні розв'язки рівняння (4.15), то загальний розв'язок цього рівняння запишеться у вигляді

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \quad (4.16)$$

де C_1 і C_2 - довільні сталі.

Означення. Система n лінійно незалежних розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння n -го порядку (ЛОДР- n) називається її *фундаментальною системою*.

Загальний розв'язок ЛОДР- n є лінійна комбінація з довільними постійними коефіцієнтами його розв'язків, що становлять фундаментальну систему.

Теорема. Якщо відомий один розв'язок y_1 ЛОДР-2 (4.15) $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, то другий розв'язок можна знайти з співвідношення

$$y_2 = y_1(x) \int \frac{e^{-\int a_1(x) dx}}{y_1^2(x)} dx.$$

4.2.3. ЛОДР - 2 зі сталими коефіцієнтами

Лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку має вигляд

$$y'' + py' + qy = 0, \quad (4.17)$$

де коефіцієнти p і q - постійні дійсні числа.

Розв'язки рівняння (4.17) шукаємо у вигляді $y = e^{kx}$.
 $y' = k e^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$. Підставляючи в рівняння, отримаємо

$$e^{kx} (k^2 + pk + q) = 0.$$

Тому що $e^x \neq 0$, маємо

$$k^2 + pk + q = 0.$$

Назвемо цей вираз характеристичним рівнянням. Він являє собою квадратне рівняння відносно k .

Корені квадратного рівняння $k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$. Розглянемо три випадки:

1. Корені характеристичного рівняння дійсні і різні: $k_1 \neq k_2$.

У цьому випадку розв'язки $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$ лінійно незалежні, тому що відношення

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq \text{const}.$$

Загальний розв'язок рівняння запишеться у вигляді

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

2. Корені характеристичного рівняння $k^2 + pk + q = 0$ дійсні й рівні: $k_1 = k_2$.

За теоремою Вієта $k_1 + k_2 = -p$. Але $k_1 = k_2$. Тому $2k_1 + p = 0$ і $k_1 = -\frac{p}{2}$.

Один частинний розв'язок

$$y_1 = e^{-\frac{p}{2}x}.$$

Другий, лінійно незалежний із цим, отримаємо із співвідношення

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p dx}}{y_1^2(x)} dx; \quad y_2 = e^{-\frac{p}{2}x} \int \frac{e^{-\int p dx}}{\left(e^{-\frac{p}{2}x}\right)^2} dx = e^{-\frac{p}{2}x} \int \frac{e^{-px}}{e^{-px}} dx = x e^{-\frac{p}{2}x},$$

а загальний розв'язок рівняння

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x}.$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - 8y' + 16y = 0.$$

Характеристичне рівняння:

$$k^2 - 8k + 16 = 0, \quad k_1 = k_2 = 4.$$

Відповідь: $y = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x}.$

3. Корені характеристичного рівняння комплексно спряжені: $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i.$

У цьому випадку можна покласти

$$y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x}, y_2 = e^{(\alpha - \beta i)x}.$$

Теорема: Якщо розв'язком диференціального рівняння (4.17) є комплексна функція дійсного аргументу $y = u(x) + iv(x)$, то розв'язками рівняння (4.17) будуть його дійсна $u(x)$ та уявна $v(x)$ частини.

Доведення. Підставляємо $y = u(x) + iv(x)$ в рівняння (4.17)

$$(u + iv)'' + p(u + iv)' + q(u + iv) = 0$$

або, у силу властивостей похідних,

$$(u'' + pu' + qu) + i(v'' + pv' + qv) = 0.$$

Відомо, що комплексне число дорівнює нулю, якщо дорівнюють нулю його дійсна та уявна частини. Тому маємо

$$u''(x) + pu'(x) + qu(x) = 0 \quad \text{і} \quad v''(x) + pv'(x) + qv(x) = 0.$$

Теорема доведена.

У відповідності з формулами Ейлера, записані вище розв'язки рівняння (4.17) подамо у вигляді

$$y_1 = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) \quad \text{і} \quad y_2 = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x).$$

В силу доведеної теореми розв'язками рівняння (4.17) зручніше взяти їх

дійсну й уявну частини $u(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x$ й $v(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$. Вони лінійно незалежні

$$\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{e^{\alpha x} \cos \beta x}{e^{\alpha x} \sin \beta x} = \operatorname{ctg} x \neq \operatorname{const}.$$

Загальний розв'язок набуде вигляду

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - 4y' + 20y = 0.$$

Характеристичне рівняння:

$$k^2 - 4k + 20 = 0, \quad k_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 20} = 2 \pm 4i.$$

Відповідь: $y = e^{2x} (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x).$

4.2.4. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Нехай задане диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + py' + qy = f(x), \quad (4.18)$$

права частина якого має спеціальний вигляд, що дозволяє знайти його частинний розв'язок за допомогою невизначених коефіцієнтів

$$f(x) = P_n(x)e^{\lambda x}, \quad (4.19)$$

де $P_n(x)$ - многочлен n -го порядку. Візьмемо функцію

$$y = Q(x)e^{\lambda x}, \quad \text{де } Q(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{n-1} x + A_n -$$

многочлен n -го порядку з невизначеними коефіцієнтами, і підставимо в рівняння (4.18). Після очевидних перетворень отримаємо

$$Q_n''(x) + (2\lambda + p)Q_n'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)Q_n(x) = P_n(x) \quad (4.20)$$

Відзначимо, що, якщо $Q_n(x)$ - многочлен n -го порядку, то $Q_n'(x)$ - $(n-1)$ -го, а $Q_n''(x)$ - $(n-2)$ -го порядку.

1. Нехай λ - дійсне число, що не є коренем характеристичного рівняння. Тоді ліва і права частини рівності (4.20) є многочлени n -го порядку. Частинний розв'язок неоднорідного рівняння потрібно шукати у вигляді

$$y_{\text{ч}} = Q_n(x)e^{\lambda x}. \quad (4.21)$$

2. Нехай λ - дійсний однократний корінь характеристичного рівняння. У цьому випадку в правій частині рівності (4.20) залишиться многочлен n -го порядку, а в лівій - $n-1$ -го, тому що $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. Частинний розв'язок

$$y_{\text{ч}} = xQ_n(x)e^{\lambda x}. \quad (4.22)$$

3. λ - дійсний дворазовий корінь характеристичного рівняння. У рівності (4.20) не тільки $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, але і у силу теореми Вієта $2\lambda + p = 0$. Частинний розв'язок

$$y_{\text{ч}} = x^2Q_n(x)e^{\lambda x}. \quad (4.23)$$

4. Запишемо праву частину рівняння (4.18) так

$$f(x) = P_n(x)e^{\lambda_1 x} + Q_n(x)e^{\lambda_2 x}, \quad (4.24)$$

де $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ - комплексні числа, що не є коренями характеристичного рівняння. Повторюючи міркування, проведені для однорідних рівнянь у випадку комплексно спряжених коренів характеристичного рівняння, отримаємо

$$y_{\text{ч}} = U_n(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + V_n(x)e^{\alpha x} \sin \beta x. \quad (4.25)$$

Можна також показати, що якщо $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta x$ є однократними коренями характеристичного рівняння, то

$$y_{\text{ч}} = x[U_n(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + V_n(x)e^{\alpha x} \sin \beta x.] \quad (4.26)$$

Нехай тепер

$$f(x) = P_{n_1}(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + Q_{n_2}(x)e^{\alpha x} \sin \beta x. \quad (4.27)$$

Покажемо, що рівність (4.27) можна записати у вигляді (4.24). Дійсно, застосовуючи формули Ейлера, запишемо

$$\begin{aligned} f(x) &= P_{n_1}(x)e^{\alpha x} \frac{e^{\beta i x} + e^{-\beta i x}}{2} + Q_{n_2}(x)e^{\alpha x} \frac{e^{\beta i x} - e^{-\beta i x}}{2i} = \\ &= \left[\frac{1}{2} P_{n_1}(x) + \frac{1}{2i} Q_{n_2}(x) \right] e^{(\alpha + \beta i)x} + \left[\frac{1}{2} P_{n_1}(x) - \frac{1}{2i} Q_{n_2}(x) \right] e^{(\alpha - \beta i)x}. \end{aligned}$$

Тут у кожній із квадратних дужок многочлен степеня $n = \max(n_1, n_2)$.

Зауваження. Якщо $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, то $y_{\text{ч}} = y_{\text{ч}_1} + y_{\text{ч}_2}$.

4.3 Системи звичайних диференціальних рівнянь

Розглянемо систему рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(t, x, y) \\ \frac{dy}{dt} = f_2(t, x, y) \end{cases} \quad (4.27)$$

де t - незалежна змінна, x і y - шукані функції.

Система, у лівій частині якої знаходяться похідні шуканих функцій першого порядку, а права не містить похідних, називається нормальною.

Розв'язувати систему будемо зведенням її до рівняння другого порядку щодо однієї з невідомих функцій. Диференціюємо по t перше рівняння системи

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Замінюючи $\frac{dx}{dt}$ і $\frac{dy}{dt}$ на $f_1(t, x, y)$ і $f_2(t, x, y)$, отримаємо

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F(t, x, y).$$

Припускаючи, що y можна виразити через t, x і $\frac{dx}{dt}$ із системи

$(y = \psi(t, x, \frac{dx}{dt}))$, отримаємо диференціальне рівняння другого порядку

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F(t, x, \frac{dx}{dt}).$$

Розв'язуючи це рівняння, знаходимо

$$x = \varphi(t, C_1, C_2).$$

Невідому функцію y знайдемо із співвідношення

$$y = \psi(t, x, \frac{dx}{dt}) = \psi(t, C_1, C_2).$$

Зауваження. Система n диференціальних рівнянь із n невідомими функціями зводиться до диференціального рівняння n -го порядку.

Приклад. Знайти загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 3y \end{cases}$$

Диференціюємо перше рівняння:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + 4\frac{dy}{dt}.$$

Робимо заміну у відповідності із другим рівнянням системи:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + 4(2x + 3y).$$

Виражаємо

$$y = \frac{1}{4}\left(\frac{dx}{dt} - x\right)$$

з першого рівняння системи і підставляємо в останню рівність

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + 8x + 3\frac{dx}{dt} - 3x \quad \text{або} \quad \frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} - 5x = 0.$$

Це однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Характеристичне рівняння

$$k^2 - 4k - 5 = 0; \quad k_1 = -1, k_2 = 5.$$

Розв'язок системи

$$\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t} \\ y = \frac{1}{4}\left(\frac{dx}{dt} - x\right) = \frac{1}{4}(-C_1 e^{-t} + 5C_2 e^{5t} - C_1 e^{-t} - C_2 e^{5t}) = C_2 e^{5t} - \frac{1}{2}C_1 e^{-t}. \end{cases}$$

У РЯДИ

5.1 Числові ряди. Додатні ряди та основні ознаки їх збіжності.

5.1.1. Основні поняття. Деякі властивості збіжних рядів

Означення. Нехай $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ — деяка нескінченна послідовність чисел. Побудований із цих чисел за допомогою знака «+» символ

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (5.1)$$

називається нескінченним рядом (чи просто рядом), а самі числа $u_1, u_2, u_3, \dots$ — членами ряду; n -ий член u_n — називається загальним членом ряду.

Побудуємо частинні суми ряду:

$$\begin{aligned} S_1 &= u_1; \\ S_2 &= u_1 + u_2; \\ S_3 &= u_1 + u_2 + u_3; \\ &\dots \\ S_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n; \\ &\dots \end{aligned} \quad (5.2)$$

Частинні суми ряду (5.2) утворюють числову послідовність: $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$. Надалі основним буде питання про збіжність послідовності частинних сум ряду. Таким чином, поняття ряду вводиться для побудови числових послідовностей спеціального виду — частинних сум ряду. Такі послідовності широко використовуються в математичному аналізі, наприклад, відоме число e можна подати таким рядом

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Означення. Числовий ряд називається збіжним, якщо існує границя послідовності частинних сум ряду

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \quad (5.3)$$

При цьому величина S називається сумою ряду, а число

$$r_n = S - S_n = u_{n+1} + \dots + u_{n+k} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k} \quad (5.4)$$

залишком ряду. Якщо границя S_n не існує (нескінченна), то ряд називається розбіжним.

Приклад. Нехай ряд задано першими трьома членами $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$. Знайти загальний член ряду і дослідити ряд на збіжність.

Загальний член ряду, як правило, знаходять методом перебирання варіантів, виходячи із аналізу заданих перших членів ряду з наступною перевіркою його правильності.

У даному прикладі чисельник кожного члена дорівнює одиниці, а знаменник є добутком трьох послідовних натуральних чисел. Вважатимемо, що $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. Тоді, беручи n послідовно таким, що

дорівнює 1, 2, 3, ..., дістаємо члени ряду $u_1 = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$; $u_2 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}$;

$u_3 = \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5}$, чим упевнюємося, що загальний член ряду $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

побудований правильно.

За допомогою методу невизначених коефіцієнтів u_n можна розкласти на такі дробі:

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \left| \frac{A}{n(n+1)} + \frac{B}{(n+1)(n+2)} \right| = \frac{1}{2n(n+1)} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}.$$

Часткова сума ряду S_n запишеться тоді так:

$$S_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots - \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right).$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) = \frac{1}{4}.$$

$$S = \frac{1}{4}.$$

У цьому прикладі збіжність ряду було встановлено безпосередньо за означенням, тобто обчислено $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$. Для переважної більшості рядів

обчислити $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ неможливо, тому далі буде наведено такі методи й ознаки, за допомогою яких можна встановити збіжність ряду, не

обчислюючи $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

Теорема 1. Якщо збігається ряд, то збігається його залишок; і навпаки, із збіжності залишку випливає збіжність ряду.

Наслідок 1. Із розбіжності ряду випливає розбіжність його залишку, і навпаки.

Наслідок 2. Якщо відкинути скінченну кількість перших членів ряду або додати до нього кілька нових членів, то це не вплине на його збіжність.

Теорема 2. Якщо члени збіжного ряду (5.1) помножити на сталий множник c , то його збіжність не порушиться, а сума (5.3) помножиться на це число c :

$$cu_1 + cu_2 + \dots + cu_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot u_n = c \cdot S.$$

Теорема 3. Збіжні ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$ і $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma$ можна почленно додавати або віднімати, при цьому ряд $(u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \dots + (u_n \pm v_n) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ також збігається, а його сума буде $S \pm \sigma$.

Теорема 4. Послідовність частинних сум збіжного ряду обмежена. Це твердження випливає зі збіжності послідовності частинних сум ряду.

Теорема 5. Якщо ряд збігається, то границя його загального члена прямує до 0, тобто: $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \right) \Rightarrow \left(\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \right)$.

Наслідок. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, тобто необхідна умова збіжності ряду не виконується, то ряд розбігається.

Приклад: Перевірити виконання необхідної умови збіжності для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{5n+2}$. Загальний член ряду $u_n = \frac{2n+1}{5n+2}$. Розглянемо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{5n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{5 + \frac{2}{n}} = \frac{2}{5} \neq 0. \text{ Необхідна умова збіжності ряду не}$$

виконується. Ряд розбігається.

Достатні ознаки збіжності для рядів з додатними членами

Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ з додатними членами $u_1 > 0, u_2 > 0, \dots, u_n > 0, \dots$. Частинні суми ряду (5.2) утворюють при цьому монотонно

зростаючу послідовність $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$.

Теорема 6 (основна). Для того щоб ряд з додатними членами збігався, необхідно і достатньо, щоб усі його частинні суми були обмеженими.

Наслідок. Для того щоб ряд з додатними членами розбігався, необхідно і достатньо, щоб послідовність його частинних сум була необмеженою.

Теорема 7 (ознака порівняння рядів). Якщо для рядів з додатними членами:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad (5.6)$$

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \quad (5.7)$$

виконується умова $v_n \geq u_n$, то:

а) із збіжності ряду (5.7) випливає збіжність ряду (5.6);

б) із розбіжності ряду (5.6) випливає розбіжність ряду (5.7).

Означення. Якщо для рядів (5.6), (5.7) виконується умова $u_n \leq v_n$, то ряд (5.7) називається мажорованим відносно ряду (5.6), а ряд (5.6) — мінорованим відносно ряду (5.7).

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

● Загальний член ряду $u_n = \frac{1}{n!} > 0$. Зауважимо, що

$$\left(n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \geq 1 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{n-1} = 2^{n-1} \right) \Rightarrow \left(u_n = \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} = v_n \right).$$

Ряд порівняння $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ збігається як ряд геометричної прогресії із $q = 0,5 < 1$. Значить, за ознакою порівняння (теорема 7) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ — збігається.

Теорема 8 (ознака порівняння в граничній формі). Якщо для рядів з додатними членами (5.6), (5.7) існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = c$ ($0 < c < +\infty$), то ряди (5.6) і (5.7) збігаються або розбігаються разом.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+5}{n^3+10n+20}}$.

● Загальний член ряду $u_n = \sqrt{\frac{n+5}{n^3+10n+20}}$ являє собою алгебраїчний вираз. Для того щоб цілеспрямовано вибрати ряд порівняння, побудуємо величину, еквівалентну u_n при $n \rightarrow \infty$

$$u_n = \sqrt{\frac{n+5}{n^3+10n+20}} \sim \sqrt{\frac{n}{n^3}} = \frac{1}{n} = v_n.$$

Вибираємо ряд порівняння $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ — гармонічний ряд, він є розбіжним. Обчислюємо

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{n+5}{n^3+10n+20}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{(n+5)n^2}{n^3+10n+20}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1+\frac{5}{n}}{1+\frac{10}{n^2}+\frac{20}{n^3}}} = 1 \quad (0 < 1 < +\infty). \end{aligned}$$

За ознакою порівняння (теорема 8) буде розбіжним і ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+5}{n^3+10n+20}}.$$

Теорема 9 (ознака Даламбера). Якщо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ з додатними членами $u_n > 0$ існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, тоді:

при $l < 1$ ряд збігається;

при $l > 1$ ряд розбігається;

при $l = 1$ питання про збіжність ряду ознака не вирішує.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$.

● Загальний член ряду $u_n = \frac{2^n}{n!} > 0$. Побудуємо $u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2 \cdot 2^n}{n!(n+1)}$ і розглянемо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 2^n \cdot n!}{(n+1) \cdot n! \cdot 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1$. За ознакою Даламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ збігається.

Теорема 10 (ознака Коші (радикальна)). Якщо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ з додатними членами $u_n > 0$ існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, тоді:

при $l < 1$ ряд збігається;

при $l > 1$ ряд розбігається;

при $l = 1$ питання про збіжність ряду ознака не вирішує.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{2n}$.

● Загальний член ряду $u_n = \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{2n} > 0$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n-1} \right)^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3 - \frac{1}{n}} \right)^2 = \frac{1}{9} < 1.$$

За ознакою Коші (теорема 10) ряд збігається.

Теорема 11 (ознака Коші (інтегральна)). Якщо функція $f(x)$ неперервна, додатна і монотонно спадає при $x \geq 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ і невластивий інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ збігаються або розбігаються разом.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд Діріхле (узагальнений гармонічний ряд)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots \quad (5.8)$$

● Загальний член ряду $u_n = \frac{1}{n^p} > 0$. Побудуємо функцію $f(x)$:

$$u_n = \frac{1}{n^p} = f(n) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^p}.$$

Збіжність інтегралу Діріхле $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ встановлено, таким чином, за теоремою 11:

$$\left(\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} - \begin{cases} \text{збігається при } p > 1; \\ \text{розбігається при } p \leq 1 \end{cases} \right) \Leftrightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} - \begin{cases} \text{збігається при } p > 1; \\ \text{розбігається при } p \leq 1 \end{cases} \right).$$

У частинному випадку при $p=1$ маємо гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$, який, як тепер встановлено, буде розбіжним.

Рекомендації щодо використання ознак збіжності рядів з додатними членами

1. Ознака Даламбера, як правило, дає результати тоді, коли загальний член ряду є відношенням алгебраїчного і трансцендентного виразів або відношенням трансцендентних виразів.

Якщо загальний член ряду — алгебраїчний вираз, то ознака Даламбера питання про збіжність не вирішує.

2. Радикальна ознака Коші зручна в тому випадку, коли загальний член ряду містить степеневий вираз.

3. Інтегральна ознака Коші використовується тоді, коли функція загального члена ряду $u_n = f(n) \Rightarrow f(x)$ легко інтегрується.

4. Ознака порівняння рядів може бути використана для рядів з будь-яким загальним членом. При дослідженні ряду за допомогою ознаки порівняння треба вибрати ряд порівняння, збіжність чи розбіжність якого відома. Рядами порівняння зручно вибирати ряд геометричної прогресії (5.8) або ряд Діріхле.

5. Якщо загальний член ряду — алгебраїчний вираз, тоді для дослідження збіжності ряду зручно використовувати ознаку порівняння рядів у граничній формі (теорема 3), як це було показано на прикладі.

6. При дослідженні збіжності рядів рекомендується така послідовність дій: 1) встановити тип ряду (знакододатний чи знакозмінний); 2) перевірити виконання необхідної умови збіжності; 3) використати одну із достатніх ознак збіжності.

Приклад. Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n} = \frac{1^3}{e} + \frac{2^3}{e^2} + \dots + \frac{n^3}{e^n} + \dots; \quad u_n = \frac{n^3}{e^n} > 0 \Rightarrow \text{ряд знакододатний.}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{e^n} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \left| \frac{n \sim x}{n \rightarrow \infty} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^3)'''}{(e^x)'''} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{e^x} = 0 \Rightarrow$$

необхідна умова збіжності виконується (ряд може бути як збіжним, так і

розбіжним).

3) Використаємо достатню ознаку збіжності Даламбера. Побудуємо $u_{n+1} = \frac{(n+1)^3}{e^{n+1}}$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 \cdot e^n}{e^{n+1} \cdot n^3} = \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^3 = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$ за ознакою Даламбера збігається.

5.2 Знакозмінні ряди. Абсолютна та умовна збіжність знакозмінних рядів

Означення. Ряд називається знакозмінним, якщо він містить нескінченне число як додатних, так і від'ємних членів.

Теорема 12 (Коші). Якщо збігається ряд із абсолютних величин членів знакозмінного ряду, то збігається і знакозмінний ряд, тобто $\left(\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| - \text{збіжний} \right) \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n - \text{збіжний} \right)$.

Означення. Знакозмінний ряд називається абсолютно збіжним, якщо збігається ряд із абсолютних величин членів знакозмінного ряду.

Означення. Знакозмінний ряд називається умовно збіжним, якщо цей ряд збігається, а ряд із абсолютних величин його членів розбігається.

Зауваження. Якщо знакозмінний ряд збігається абсолютно, то його збіжність зумовлена достатнім спаданням за абсолютною величиною його членів.

Зауваження. Якщо знакозмінний ряд збігається умовно, то його збіжність зумовлена не тільки спаданням за абсолютною величиною його членів, але і взаємною компенсацією додатних і від'ємних членів ряду.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$.

● Загальний член ряду $u_n = \frac{\sin n}{n^2}$ залежно від n може бути як додатним, так і від'ємним. Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ — знакозмінний. Побудуємо ряд із абсолютних величин членів даного: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^2}$. Цей ряд буде

знакододатним $|u_n| = \frac{|\sin n|}{n^2} > 0$, так що для дослідження його на збіжність можна використати ознаки збіжності знакододатних рядів. Скористаємось ознакою порівняння рядів: $|u_n| = \frac{|\sin n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} = v_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ — ряд порівняння, він збігається, як ряд Діріхле, з $p = 2 > 1$. Отже, за ознакою порівняння (теорема 7) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^2}$ збігається, а це означає, що за

теоремою Коші збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$, причому збігається абсолютно.

Знакозмінні ряди. Ознака Лейбніца

Означення. Ряд, кожний член якого відрізняється знаком від попереднього, називається знакозмінним. Цей ряд має вигляд:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n. \quad (5.9)$$

Загальний член ряду (5.9) $u_n = (-1)^{n-1} a_n$, де $a_n > 0$.

Теорема 13 (Лейбніца). Якщо члени знакозмінного ряду спадають за абсолютною величиною і границя абсолютної величини загального члена ряду дорівнює нулю, то ряд збігається. Коротко цю теорему можна

записати так: $\left(\begin{cases} a_n > a_{n+1} > 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \end{cases} \right) \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \text{ — збіжний} \right)$.

Наслідок 1. Знак суми збіжного знакозмінного ряду такий само, як і знак першого члена ряду (на рис. 5.1 $a_1 > 0, S > 0$).

Геометрична інтерпретація

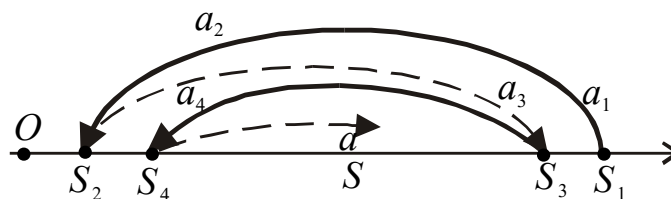


Рисунок 5.1

Наслідок 2. Якщо знакозмінний ряд збігається, то його сума за абсолютною величиною не перевищує першого члена ряду, тобто $|S| < |a_1|$ (на рис. 9.1) $0 < S < a_1$).

Наслідок 3. Якщо при обчисленні суми збіжного знакозмінного ряду обмежитись тільки першими n членами, а всі інші відкинути, то похибка за абсолютною величиною не перевищить першого із відкинутих членів, тобто $|r_n| < |a_{n+1}|$.

Наслідок 4. Якщо для ряду не виконується умова теореми Лейбніца $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, то ряд розбігається (не виконується необхідна умова збіжності).

Приклад. Дослідити збіжність ряду Лейбніца

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots$$

Загальний член ряду $u_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$ по чергово змінює знак, отже, ряд Лейбніца — знакозмінний. Обидві умови теореми Лейбніца для цього ряду виконуються:

$$1) 1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots > \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} > \dots;$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Таким чином, ряд Лейбніца буде збіжним, але збіжність умовна, бо ряд із абсолютних величин: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ — гармонічний ряд, що розбігається.

5.3 Функціональні ряди. Степеневі ряди. Ряди Тейлора й Маклорена

5.3.1. Функціональні ряди

Нехай функція $f_n(x)$, $n \in N$ визначена в області D , $x \in D$
Означення. Вираз

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n x = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$$

називається *функціональним рядом*.

Приклад. Знайдіть область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n}} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^4} + \dots + \frac{1}{1+x^{2n}} + \dots$$

Даний ряд визначений для значень $x \in (-\infty, \infty)$. Якщо $|x| < 1$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^{2n}} = 1 \neq 0$$

і ряд розбігається, тому що не виконується необхідна ознака збіжності ряду; якщо $x = 1$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$ розбігається; якщо

$|x| > 1$: $\frac{1}{1+x^{2n}} < \frac{1}{x^{2n}}$ - нескінченно спадна геометрична прогресія.

Порівняння даного ряду зі збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{2n}}$ при $|x| > 1$ дає область збіжності досліджуваного ряду: $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

При значеннях $x = x_0 \in D$ з функціонального ряду виходить числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) = f_1(x_0) + f_2(x_0) + \dots$$

Якщо для $x_0 \in D$ числовий ряд збігається, то точка x_0 називається *точкою збіжності* функціонального ряду.

Сукупність усіх точок збіжності ряду утворює область його збіжності. Областю збіжності зазвичай буває будь-який інтервал осі Ox .

Якщо в кожній точці $x \in D_1$ числові ряди $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ збігаються, то функціональний ряд називається *збіжним* в області D_1 .

Сума функціонального ряду є деякою функцією від змінної x , визначеної в області збіжності ряду

$$S_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_k(x).$$

Які властивості мають функції $S_k(x)$, якщо відомі властивості членів ряду, тобто $f_1(x); f_2(x); \dots; f_k(x)$?

Безперервність функцій $f_1(x); f_2(x); \dots; f_k(x)$ не достатня для того, щоб зробити висновок про безперервність $S_k(x)$.

Збіжність ряду безперервних функцій до безперервної ж функції забезпечується додатковою умовою, що виражає одну важливу особливість збіжності функціонального ряду.

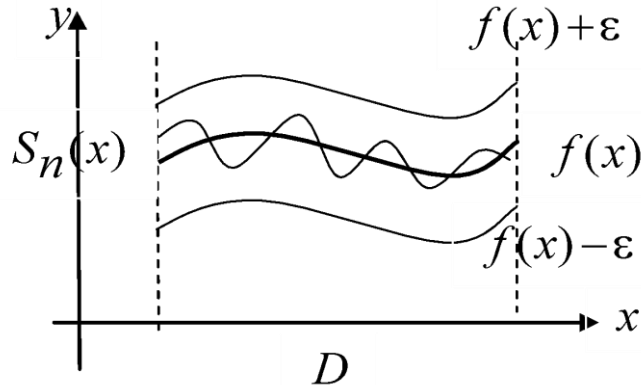
Означення. Функціональний ряд називається *збіжним* в області D , якщо існує границя часткових сум цього ряду, тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x).$$

Означення. Функціональний ряд називається *рівномірно збіжним* в області D , якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$, знайдеться таке число N , що для всіх $n > N(\varepsilon)$ виконується нерівність

$$|S_n(x) - f(x)| < \varepsilon ; \forall x \in D.$$

Геометричний сенс рівномірної збіжності:



Якщо оточити графік функції $y = f(x)$ " ε -смушкою", обумовленою співвідношенням

$$f(x) - \varepsilon < y < f(x) + \varepsilon, \quad x \in D$$

то графіки всіх функцій $S_n(x)$, починаючи з досить великого значення n , цілком лежать в цій " ε -окілу", що оточує графік граничної функції $y = f(x)$.

Властивості ряду, що рівномірно збігається:

1. Сума ряду, що рівномірно збігається в деякій області D , складеного з безперервних функцій, є функцією безперервною у цій області.

2. Такий ряд можна почленно диференціювати.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = f'(x)$$

3. Ряд можна почленно інтегрувати.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^x f_n(x) dx = \int_{x_0}^x f(x) dx$$

Для того, щоб визначити, чи є функціональний ряд рівномірно збіжним, треба скористатися достатньою ознакою збіжності Вейєрштрасса.

Означення. Функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ називається *таким, що мажорується*, в деякій області зміни X , якщо існує такий збіжний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ з додатними членами, що для всіх x з цієї області виконуються нерівності

$$|f_n(x)| \leq u_n, \quad n = 1, 2, \dots.$$

Теорема (Ознака Вейєрштрасса) рівномірної збіжності функціонального ряду: Функціональний ряд збігається рівномірно в області збіжності, якщо він є таким, що мажорується в цій області.

Іншими словами, якщо функції $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ в деякій області $x \in D$ не перевищують по абсолютній величині відповідних додатних чисел $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ і якщо числовий ряд $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ збігається, то функціональний ряд $f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$ у цій області збігається рівномірно.

5.3.2. Степеневі ряди

Серед функціональних рядів існує клас степеневих рядів.

Означення. Функціональний ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots$$

називається *степеневим* за ступенями $(x - x_0)$. Вирази $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ - постійні числа. Якщо $x_0 = 0$, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

є степеневим за ступенями x .

Область збіжності степеневого ряду.

Теорема Абеля. Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збігається в точці x_0 ($x_0 \neq 0$), то він збігається, й притім абсолютно, для будь-якого значення x , за абсолютною величиною меншого x_0 , тобто $|x| < |x_0|$, або в інтервалі $(-x_0, x_0)$.

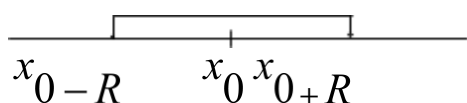
Наслідок: Якщо степеневий ряд розбігається при значенні $x = x_0$, то ряд розбігається при всякому значенні x , більшому за абсолютною величиною x_0 ($|x| > |x_0|$).

З теореми Абеля і наслідку з цієї теореми випливає наступне припущення. Для кожного степеневому ряду, що має як точки збіжності, так і точки розбіжності, існує таке додатне число R , що для всіх x , $|x| < R$, ряд абсолютно збігається, а для значень x , $|x| > R$, ряд розбігається. Що стосується значень $x = R$ або $x = -R$, то тут можливі ситуації, коли ряд збігається в обох точках, або тільки в одній з них, або ні в одній.

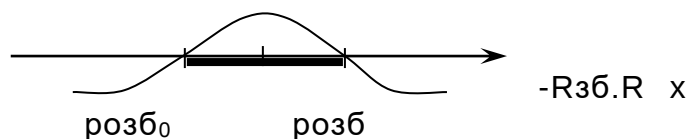
Означення. Число R , таке, що для всіх x , $|x| < R$, степеневий ряд збігається, а для всіх x , $|x| > R$, розбігається, називається *радіусом збіжності* ряду, а інтервал $(-R; R)$ називається *інтервалом збіжності*.

Для ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ інтервал збіжності має вигляд:

$$x \in (x_0 - R, x_0 + R) \text{ з центром в точці } x_0.$$



Для ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ інтервал збіжності має вигляд $x \in (-R, R)$ з центром в точці 0:



У граничних точках $x = \pm R$ поведінка ряду вимагає додаткового

дослідження. Можна вказати правило для знаходження радіуса збіжності степеневого ряду.

Обчислення радіусу збіжності степеневого ряду

Теорема. Якщо існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho,$$

то радіус збіжності ряду дорівнює $\frac{1}{\rho}$, тобто $R = \frac{1}{\rho}$, причому вважаємо $R = 0$, якщо $\rho = \infty$, і $R = \infty$, якщо $\rho = 0$.

Теорема. Якщо існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \rho,$$

то радіус збіжності ряду дорівнює $\frac{1}{\rho}$, тобто $R = \frac{1}{\rho}$, причому ми вважаємо $R = 0$, якщо $\rho = \infty$, і $R = \infty$, якщо $\rho = 0$.

Степеневі ряди в області збіжності збігаються абсолютно і тому для дослідження збіжності можна використовувати ознаки збіжності рядів з додатними членами.

1. За ознакою Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}| |x|^{n+1}}{|a_n| |x|^n} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

Ряд збігається, якщо

$$|x| < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|},$$

звідси радіус збіжності

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

1. За радикальною ознакою Коші:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} |x|^n = |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Ряд збігається, якщо

$$|x| < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

звідси випливає, що

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

5.3.3. Ряди Тейлора й Маклорена

Означення. Якщо функцію $f(x)$ можна розкласти в степеневий ряд за ступенями різниці $(x - x_0)$, то цей ряд обов'язково є *рядом Тейлора* цієї функції:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

де

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

залишковий член у формі Лагранжа ($0 < \theta < 1$).

Необхідною умовою розкладання функції в ряд Тейлора є диференційованість функції нескінченне число разів. Для того, щоб ряд Тейлора збігався до даної функції $f(x)$, абсолютні величини всіх похідних функції $f(x)$ повинні бути обмежені одним і тим же числом $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$, де M - постійна яка не залежить від n . Остаточний член $R_n(x)$ визначається нерівністю

$$|R_n(x)| \leq M \cdot \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Розкладання основних елементарних функцій у степеневі ряди

$$1. f(x) = e^x$$

$$f^{(n)}(x) = (e^x)^{(n)} = e^x; \quad f^{(n)}(0) = 1 \quad \left| f^{(n)}(x) \right| = e^x \leq e^R$$

На будь-якому інтервалі $x \in (-R, R)$ осі x , значить для всіх $x \in (-\infty, \infty)$.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in R.$$

$$2. f(x) = \sin x$$

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leq 1, \quad n = 0, 1, \dots \quad x \in R. \quad f(0) = 0,$$

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) \quad f''(0) = 0$$

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad f^{(n)}(0) = \sin\frac{\pi n}{2}.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in R$$

$$3. f(x) = \cos x$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in R.$$

$$4. f(x) = \ln|1+x|, \quad |x| < 1$$

Продиференціюємо $f(x)$ і розкладемо похідну за формулою суми нескінченно спадної геометричної прогресії:

$$\left[\ln(1+x) \right]' = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots, \quad -1 < x < 1.$$

Продиференціюємо цю рівність почленно:

$$\ln(1+x) = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Постійну інтегрування C знайдемо, вважаючи $x = 0$.

$$\ln 1 = \sum_{n=1}^{\infty} 0 + C \Rightarrow C = 0$$

$$\ln|1+x| = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \quad -1 < x \leq 1$$

5. $f(x) = \arctg x$

Уявимо функцію арктангенс у вигляді інтеграла із змінною верхньою границею $\arctg x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$.

За формулою суми нескінченно спадної геометричної прогресії

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots, \quad -1 < x < 1.$$

$$\arctg x = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - \dots) dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots +$$

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \quad -1 \leq x \leq 1$$

7. $f(x) = (1+x)^m$, m - довільне постійне число,

$$f(x) = (1+x)^m, \quad f(0) = 1$$

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1}, \quad f'(0) = m$$

$$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}, \quad f''(0) = m(m-1)$$

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)\dots[m-(n-1)](1+x)^{m-n},$$

$$f^{(n)}(0) = m(m-1)\dots[m-(n-1)].$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots[m-(n-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} x^n + \dots$$

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n \quad x \in (-1, 1).$$

Область збіжності цього ряду знаходиться за ознакою Даламбера:

$$\begin{aligned} m = \frac{1}{2}: \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \dots \\ m = -\frac{1}{2}: \frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots \\ R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{m(m-1)\dots(m-n)x^{n+1}n!}{(n+1)! m(m-1)\dots[m-(n-1)]x^n} \right| = \\ &= |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-m}{n+1} = |x| < 1. \end{aligned}$$

5.4 Тригонометричні ряди

Означення. Функціональний ряд вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots = \\ = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \end{aligned}$$

називається *тригонометричним рядом*, а постійні числа $a_n, b_n, (n=1, 2, 3, \dots)$ називаються *коефіцієнтами ряду*.

5.4.1. Ряд Фур'є і коефіцієнти Фур'є для періодичної функції з періодом 2π

Теорема. Якщо $y = f(x)$ - безперервна періодична функція з періодом 2π , інтегрована на інтервалі $(-\pi; \pi)$, така, що для всіх x справедливий розклад

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

і ряд збігається до функції $y = f(x)$ рівномірно, то для коефіцієнтів ряду справедливі формули Фур'є:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \end{aligned}$$

Означення. Якщо функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $(-\pi; \pi)$, то числа a_0, a_n, b_n , визначені формулами:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

називаються *коефіцієнтами Фур'є* функції $y = f(x)$, а тригонометричний ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

- *рядом Фур'є* функції $y = f(x)$.

Теорема. Якщо функцію $y = f(x)$ можна розкласти в рівномірно збіжний тригонометричний ряд, то цей ряд є її рядом Фур'є.

5.4.2. Розкладання функцій у тригонометричні ряди

Питання про можливість розкладання функції $y = f(x)$ в тригонометричний ряд зводиться до наступного.

Якими властивостями повинна володіти функція, щоб побудований для неї ряд Фур'є збігався, і його сума зівпала з функцією $y = f(x)$?

На відміну від степеневих рядів, в які розкладаються тільки функції, що мають похідні всіх порядків, в тригонометричні ряди розкладаються майже будь-які функції.

Достатні умови того, що функція може бути розкладена у ряд Фур'є, дає наступна теорема, яку ми приймемо без доведення.

Теорема Діріхле. Якщо функція $y = f(x)$ з періодом 2π обмежена і кусочно-монотонна на відрізку $(-\pi; \pi)$, то ряд Фур'є, побудований для функції $y = f(x)$, збігається в усіх точках цього інтервалу.

При цьому:

- 1) сума $S(x)$ цього ряду дорівнює $f(x)$ в точках безперервності функції $f(x)$;
- 2) якщо точка $x = c$ є точкою розриву $f(x)$, то сума ряду Фур'є

$$S(x) = \frac{f(c+0) + f(c-0)}{2}.$$

VI ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

6.1 Елементи комбінаторики

Комбінаторика - розділ математики, предметом якого є теорія скінченних множин.

Множина - сукупність об'єктів довільної природи, які мають спільну для всіх них характеристичну властивість. Наприклад, множина учнів даного класу, множина дерев у даному саду, множина парних чисел і т.ін. Кожен об'єкт, який входить до множини, називають *елементом* цієї множини. Множину, яка не містить жодного елемента, називають *порожньою* множиною.

Нехай $A, B, C, \dots$ - множини; a, b, c - їх елементи. Запис $a \in A$ означає, що елемент a належить множині A , а запис $b \notin A$ означає, що елемент b не належить множині A . Множини бувають скінченні та нескінченні. Наприклад, множина літер українського алфавіту скінченна. Множина всіх дійсних чисел, множина цілих чисел - нескінченні множини. Для скінченної множини A через $N(A)$ позначають кількість її елементів. Число елементів порожньої множини дорівнює 0. Якщо $N(A)=n$, то казатимемо, що A - n -множина.

В основі комбінаторики лежать два елементарних правила – суми і добутку.

Правило суми. Якщо елемент A можна обрати m способами, а елемент B – n - способами, то вибір елемента A або елемента B можна здійснити $(m + n)$ способами.

Правило добутку (основне правило комбінаторики). Якщо елемент A можна вибрати m способами, а після кожного такого вибору елемент B можна вибрати n способами, то вибір пари $(A;B)$ в указаному порядку можна здійснити $m \cdot n$ способами.

Перестановками з n елементів (P_n) називають будь-які впорядковані множини, кожна з яких містить усі n цих елементів і які відрізняються одна від одної лише порядком розміщення елементів. Кількість усеможливих перестановок з n елементів обчислюють за формулою:

$$P_n = n!. \quad (6.1)$$

Наприклад, з елементів множини $A=\{3,8,5\}$ можна утворити перестановки $(5,8,3), (5,3,8), (3,8,5), (3,5,8), (8,3,5), (8,5,3)$, усього $P_3 = 3! = 6$.

Розміщеннями (A_n^k), утвореними з множини n різних елементів по k елементів ($k \leq n, n > 0$), називають будь-які впорядковані підмножини цієї множини, які містять k елементів. Розміщення відрізняються одне від

одного або елементами, або порядком розташування елементів. Кількість розміщень з n елементів по k обчислюють за формулою:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} . \quad (6.2)$$

Приклад. Кількість розміщень з трьох елементів множини $A=\{1,2,3\}$ по 2 елементи складає $A_3^2 = \frac{3!}{1!} = 6$. Справді, можливі розміщення такі: (1;2), (1;3), (2;1), (2;3), (3;1), (3;2) - всього шість.

Комбінацією з n елементів по k (C_n^k) називають k -елементну підмножину n -елементної множини ($k \leq n$). Кількість усяких можливих комбінацій з n елементів по k обчислюють за формулою:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} . \quad (6.3)$$

Приклад. Кількість комбінацій з трьох елементів множини $A=\{1,2,3\}$ по 2 елементи складає $C_3^2 = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$. Справді, можливі комбінації такі: {1;2}, {1;3}, {2;3} - всього три.

Приклад. Із восьми чоловіків і шести жінок потрібно утворити таку комісію, щоб до її складу входило два чоловіки і три жінки. Скількома способами це можна зробити?

Розв'язання. Нехай C_8^2 - кількість способів утворення чоловічої частини комісії, C_6^3 - кількість способів утворення жіночої частини комісії. За правилом добутку: $C_8^2 \cdot C_6^3 = \frac{8!}{2! \cdot 6!} \cdot \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6! \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 6!} \cdot \frac{3! \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{6 \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 8}{2} \cdot \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{6} = 560$ - способів утворення комісії.

6.2 Випадкові події та їх ймовірності

6.2.1. Випадкова подія. Ймовірність події

У повсякденному житті нам часто доводиться зустрічатися з різними явищами і фактами, які ми називаємо *випадковими*. Зокрема, інформація, на основі якої розв'язуються практичні задачі в економіці, зазвичай носить *наближений, неточний, випадковий* характер. Наприклад, власник магазину не знає, скільки буде покупців, бізнесмен – яким буде завтра курс гривні, банкір – чи повернуть йому позику. Але й у випадкових фактах за певних умов можуть бути виявлені певні закономірності. Ці

закономірності вивчає теорія ймовірностей. Для розв'язання задач, пов'язаних з аналізом економічної інформації, використовують ймовірнісні та статистичні методи, оскільки характерною особливістю теорії ймовірностей є те, що вона розглядає явища, в яких в тій чи іншій формі присутня невизначеність. Широко розповсюджене уявлення пов'язує невизначеність і, отже, ймовірність з такими ситуаціями, як гра в кості, в рулетку, витягування карт з колоди і т.п. Саме потреба у розв'язуванні практичних задач, пов'язаних з азартними іграми, а також з питаннями страхування і демографії, якими в середині XVII ст. займалися такі відомі вчені, як Гюйгенс, Паскаль, Ферма і Яків Бернуллі, зумовила виникнення теорії ймовірностей як самостійної науки. Як і в кожній математичній дисципліні, в теорії ймовірностей існують деякі *початкові, первісні* поняття, покладені в її основу. Першим таким поняттям є поняття *випадкової події*. До нього приходимо так.

По-перше, під *подією* розуміємо таку *дію*, про яку можна сказати, що вона відбулась, або відбувається, або може відбутись, або неможлива.

Приклади: 1) Першого вересня почалось навчання в ЛНУ ім. І.Франка (подія відбулась).

2) При киданні монети герб випаде зверху (може відбутись, може не відбутись).

3) Витягнути зелену кульку зі скриньки, яка містить 1 білу і 1 чорну кульку (неможлива подія).

По-друге, поняття випадкової події пов'язане із завданням *певного комплексу умов*.

Процес реалізації певного комплексу умов називається *експериментом*. Тепер можемо дати означення випадкової події.

Випадкова подія – це подія, яка може відбутись або не відбутись в результаті здійснення деякого експерименту, тобто в результаті реалізації певного комплексу умов. Наприклад: випадіння грані кубика з парною кількістю очок, попадання в даний об'єкт при стрільбі по цьому об'єкту з даного знаряддя, витягування трьох тузів з колоди карт і т.ін. Якщо під час кожної реалізації заданого комплексу умов подія *обов'язково* відбувається, то вона називається *достовірною*. Якщо ж в результаті експерименту подія *обов'язково* не відбудеться, то це - *неможлива* подія.

Очевидно, що після одноразового здійснення експерименту ми не виявимо закономірностей, які властиві для конкретної випадкової події. Однак закономірності можна виявити, якщо здійснювати експеримент багаторазово в однакових умовах. Отже, другим з початкових понять теорії ймовірностей є поняття *масовості явищ (подій)*. Масові явища розглядаються як протилежність до одиничних і масовість може проявлятися: 1) в часі; 2) в просторі; 3) і в часі, і в просторі. Таким чином, *предметом теорії ймовірностей* є вивчення кількісних закономірностей, характерних для масових однорідних випадкових подій.

Нехай деякий експеримент здійснюється n разів і при цьому в результаті m випробувань відбувається подія A . Відношення m/n називається *відносною частотою* появи події A в серії з n випробувань. Теорія ймовірностей вивчає лише такі події, для яких має місце властивість *стійкості частот*. Вона полягає в тому, що частота появи події A при великій кількості випробувань мало відрізняється від деякого числа. Наприклад, якщо багато разів підкидати монету, то частота випадання герба буде мало відрізнятися від $1/2$. Звідси, логічно міркуючи, отримуємо так зване *статистичне означення* ймовірності. *Ймовірністю* події називається об'єктивно існуюча величина, навколо якої групуються відносні частоти цієї події при великій кількості випробувань. Позначаємо $P(A)$ - ймовірність події A . Легко зрозуміти, що за значеннями відносних частот можна отримати лише наближене значення ймовірності, тому з точки зору математики таке означення є недосконалим. Якщо формулювати досконале статистичне означення з точки зору математики, то можна сказати, що *ймовірністю події* є границя, до якої прямує відносна частота появи події при необмеженому зростанні кількості випробувань:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m(n)}{n}.$$

Це означення належить німецькому математику Р. Мізесу .

Нехай простір елементарних подій є скінченною множиною $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$, $N(\Omega) = N$, тобто є лише N можливих результатів випробування, отже, множина Ω є повною групою всіх попарно несумісних результатів випробування.

Події називають *попарно несумісними* в даному випробуванні, якщо поява однієї з них виключає появу інших подій у тому ж випробуванні.

Вважатимемо додатково, що всі елементарні події *рівноможливі*, тобто з міркувань симетрії або якихось інших впливає, що нема об'єктивних причин вважати одну з елементарних подій більш ймовірною порівняно з іншими. Наприклад, якщо експеримент полягає в одноразовому киданні грального кубика правильної форми, виготовленого з однорідного матеріалу, то всі 6 результатів цього випробування природно вважати рівноможливими.

Класичне означення ймовірності формулюють для подій, які є підмножинами множини Ω . Якщо $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_{N(A)}}\}$, де $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{N(A)} \leq N$, $N(A) = 0, 1, 2, \dots, N$, то ймовірність події A визначають за формулою:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}, \quad (6.4)$$

де $N(A)$ - кількість елементів множини A .

Отже, ймовірністю події A називається відношення кількості сприятливих для події A елементарних подій до кількості всіх рівноможливих і попарно несумісних результатів випробування.

З визначення ймовірності випливає, що вона задовольняє умові:

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Ймовірність достовірної події приймають як таку, яка дорівнює 1, оскільки для достовірної події $N(A) = N(\Omega)$: $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = 1$.

Ймовірність неможливої події дорівнює 0, бо для неможливих подій кількість $N(A)$ елементів множини A дорівнює нулю: $P(A) = \frac{0}{N(\Omega)} = 0$.

Приклад. Набираючи номер телефону, дівчинка забула дві останні цифри і, пам'ятаючи тільки те, що ці цифри різні, набрала їх навмання. Яка ймовірність того, що номер набраний правильно?

Розв'язання. Нехай подія A - номер набрано правильно. Дві останні цифри можна набрати A_{10}^2 способами. Тоді кількість можливих подій:

$$n = A_{10}^2 = \frac{10!}{(10-2)!} = 90.$$

Події A сприяє тільки одна з них, тобто $m=1$. Отже, ймовірність того, що номер набраний правильно:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{A_{10}^2} = \frac{1}{90}$$

Приклад. В учня є двадцять зошитів. Серед них – п'ять у лінійку, а решта – в клітинку. Яка ймовірність того, що серед шести випадково вибраних зошитів два будуть у клітинку?

Розв'язання. Нехай подія A – серед шести вибраних зошитів два будуть у клітинку. Тоді чотири зошити будуть у лінійку. Оскільки учень має $20-5=15$ зошитів у клітинку, то сприяють настанню події A число випадків $m = C_{15}^2 \cdot C_5^4$. Обрати шість зошитів серед двадцяти можна $n = C_{20}^6$ способами. Тому ймовірність настання події A дорівнює:

$$P(A) = \frac{C_{15}^2 \cdot C_5^4}{C_{20}^6} = \frac{105 \cdot 5}{38760} \approx 0,0135.$$

6.2.2 Теореми додавання ймовірностей. Протилежні випадкові події

Сумою подій A та B називають подію C , яка полягає у виконанні під час одиничного випробування події A або B , або обох подій разом (хоча б однієї з них). Нижче розглянемо ймовірності суми двох несумісних подій A та B . Сума цих подій позначається, як $A+B$ чи A або B . Справедлива наступна теорема, яка називається теоремою про додавання ймовірностей.

Теорема 1. Нехай при даному експерименті відбуваються випадкова подія A з ймовірністю $P(A)$ та подія B з ймовірністю $P(B)$. Події A і B несумісні. Тоді ймовірність суми подій, тобто того, що з'явиться або подія A або подія B , дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \quad (6.5)$$

Доведення. Нехай $P(A)=\frac{m_1}{n}$, $P(B)=\frac{m_2}{n}$. Оскільки події несумісні, то при загальному числі випадків n число випадків, що сприяють появі подій A і B одночасно, дорівнює нулю, а число випадків, що сприяють появі або події A або події B , дорівнює m_1+m_2 . Отже,

$$P(A+B)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}=P(A)+P(B).$$

Аналогічним чином можна доказати цю теорему для будь-якого числа несумісних подій:

$$P(A+B+C+D)=P(A)+P(B)+P(C)+P(D). \quad (6.6)$$

Приклад. Стріляють по деякій області, яка складається з трьох непересічних зон. Ймовірність влучення в першу зону $P(A)=0,05$, в другу зону $P(B)=0,1$, в третю зону $P(C)=0,17$. Яка ймовірність влучити в область?

Розв'язання. За формулою (6.6) маємо:

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)=0,05+0,1+0,17=0,32.$$

Дві події називаються *протилежними*, якщо вони несумісні та утворюють повну групу випадкових подій. Якщо одну подію позначають через A , тоді протилежна подія позначається через $\bar{A}$. Нехай ймовірність появи події A дорівнює p , ймовірність не появи події A , тобто

ймовірність появи події $\bar{A}$, позначимо через $P(\bar{A})=q$. Оскільки при випробуванні обов'язково станеться або подія A або подія $\bar{A}$, то сума цих подій є подія достовірна, тобто: $p+q=1$. Тобто сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці.

Приклад. Проводиться один постріл по мішені. Ймовірність влучення в мішень дорівнює $P(A)=0,35$. Тоді ймовірність промаху становить $P(\bar{A})=1-0,35=0,65$.

Наслідок. Якщо випадкові події $A_1, A_2, \dots, A_n$ створюють повну групу несумісних подій, то справедлива рівність:

$$P(A_1)+P(A_2)+\dots+P(A_n)=1.$$

Випадкові події A і B називають *сумісними*, якщо при даному випробуванні поява однієї з них не виключає можливості появи іншої, тобто відбудеться суміщення подій A і B . Подію, що полягає в суміщенні подій A і B , позначимо через $(A \text{ і } B)$ чи (AB) .

Теорема 2. Ймовірність появи принаймні однієї з двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх суміщення.

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \quad (6.7)$$

Аналогічним чином можна обчислити ймовірність суми будь-якого числа сумісних випадкових подій.

6.2.3. Теорема множення ймовірностей. Умовна ймовірність

Подію A називають *незалежною* від події B , якщо поява події B не змінює ймовірності появи події A .

Добутком двох подій A та B називають таку подію C , яка полягає у здійсненні під час одиничного випробування подій A і B одночасно. Добуток позначають, як $C=AB$.

Теорема 1. Якщо випадкові події A і B незалежні, тоді ймовірність добутку подій дорівнює добутку ймовірностей появи подій A і B :

$$P(AB)=P(A) \cdot P(B). \quad (6.8)$$

Доведення. Проведемо доведення теореми за допомогою задачі кошиків. Нехай в кожному з двох кошиків відповідно знаходяться n_1 і n_2 куль. В першому кошику m_1 червоних куль, а інші чорні. В другому кошику m_2 червоних куль, а інші чорні. З кожного кошика вийняли по

одній кулі. Яка ймовірність того, що обидві кулі будуть червоними?

Нехай подія A – виймання червоної кулі з першого кошика, а подія B – виймання червоної кулі з другого кошика. Ці події незалежні. Нехай $P(A) = \frac{m_1}{n_1}$, $P(B) = \frac{m_2}{n_2}$. Всього можливих випадків одночасного виймання по одній кулі з кожного кошика буде $n_1 \cdot n_2$. Число випадків, що сприяють появі червоних куль з обох кошиків, буде $m_1 \cdot m_2$. Ймовірність добутку подій A і B буде:

$$P(A \text{ і } B) = \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2} = \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = P(A) \cdot P(B).$$

Якщо маємо n незалежних подій $A_1, A_2, \dots, A_n$, тоді аналогічним чином можна довести виконання рівності:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n). \quad (6.9)$$

Дві події A і B називаються *залежними*, якщо ймовірність появи однієї з них залежить від того, відбулася чи не відбулася інша подія.

Умовною ймовірністю події A , залежної від події B , називають ймовірність, обчислену для події A в припущенні, що подія B вже відбулася і позначають $P(A/B)$. Наприклад, у коробці лежить три білих та дві чорних кулі. З коробки беруть одну кулю і не повертають її назад. Якщо вийняли білу кулю (подія B), тоді ймовірність появи білої кулі при другому випробуванні (подія A) дорівнює $P(A/B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Якщо при першому випробуванні вийняли чорну кулю (подія B не відбулась), тоді ймовірність появи білої кулі при другому випробуванні (подія A) дорівнює $P(A/\bar{B}) = \frac{3}{4}$. Бачимо, що

$$P(A/B) \neq P(A/\bar{B}).$$

Події A і B – залежні.

Теорема 2. Ймовірність спільної появи двох залежних подій дорівнює добутку ймовірностей однієї з цих подій на умовну ймовірність іншої, обчислену в припущенні, що перша подія вже настала:

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A/B). \quad (6.10)$$

Доведення. Нехай у кошику n куль, при цьому n_1 білих та n_2 чорних. Нехай серед n_1 білих куль n_1^* з дефектом, а решта нормальні. Нехай B - поява білої кулі, а A - поява білої кулі з дефектом. Отже, $P(B) = \frac{n_1}{n}$. Імовірність появи білої кулі з дефектом при умові, що з'явилась біла куля, буде $P(A/B) = \frac{n_1^*}{n_1}$. Імовірність появи білої кулі з дефектом є

$P(A \cap B)$. Отже, $P(A \cap B) = \frac{n_1^*}{n}$. Але $\frac{n_1^*}{n} = \frac{n_1}{n} \cdot \frac{n_1^*}{n_1}$. Звідки маємо:

$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$. З формули (6.10) маємо, що умовна імовірність події A при умові здійснення події B визначається за допомогою формули:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Зауваження. Застосуємо останню формулу до виразу $P(B \cap A)$:

$$P(B \cap A) = P(A) \cdot P(B/A). \quad (6.11)$$

У рівностях (6.10) і (6.11) ліві частини рівні тому, що це одна й та сама ймовірність, отже, рівні і праві частини:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B) = P(A) \cdot P(B/A). \quad (6.12)$$

Приклад. Ймовірність того, що Оленка розв'яже задачу, дорівнює 0,8, а ймовірність того, що її розв'яже Остап – 0,7. Знайти ймовірність того, що задачу не розв'яже жоден учень.

Розв'язання. Ймовірність того, що Оленка не розв'яже задачу, дорівнює $1 - 0,8 = 0,2$; ймовірність того, що Остап не розв'яже задачу, дорівнює $1 - 0,7 = 0,3$; ймовірність того, що задачу не розв'яжуть ані Оленка, ані Остап, дорівнює $0,2 \cdot 0,3 = 0,06$.

Приклад. У токаря є тринадцять конусних і сімнадцять циліндричних деталей. Він навмання взяв одну деталь, а потім іншу. Знайти ймовірність того, що перша деталь конусна, а друга – циліндрична.

Розв'язання. Нехай A – перша деталь конусна, B – друга деталь циліндрична. Ймовірність того, що перша деталь конусна $P(A) = \frac{13}{30}$. Ймовірність того, що друга деталь циліндрична, обчислимо за умови, що перша взята деталь є конусною: $P(B/A) = \frac{17}{29}$. Тоді шукана ймовірність

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{13}{30} \cdot \frac{17}{29} = \frac{221}{870}.$$

6.2.4. Формула повної ймовірності. Формула Байєса

Припустимо, що подія A може відбуватися в різних умовах, яким відповідають попарно несумісні події $B_1, B_2, \dots, B_n$, які утворюють повну групу і які назвемо *гіпотезами*. Нехай відомі ймовірності $P(B_1), P(B_2), \dots, P(B_n)$ та умовні ймовірності $P(A/B_1), P(A/B_2), \dots, P(A/B_n)$. Як знайти $P(A)$ в даній ситуації?

Теорема. Якщо $B_1, B_2, \dots, B_n$ - повна група попарно несумісних подій і $P(B_i) > 0, i = \overline{1, n}$, то для будь-якої події A справедлива рівність:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B_2) + \dots + P(B_n) \cdot P(A/B_n) = \sum_{i=1}^n P(B_i) P(A/B_i). \quad (6.13)$$

Рівність (6.13) називають *формулою повної ймовірності*. Вона виражає ймовірність події A за умови, що відбулася одна і тільки одна з попарно несумісних подій $B_1, B_2, \dots, B_n$.

Доведення. Подія A може відбуватися при виконанні будь-якого з сумісних подій: $(B_1 \text{ і } A), (B_2 \text{ і } A), \dots, (B_n \text{ і } A)$. Отже, за теоремою суми ймовірностей отримаємо:

$$P(A) = P(B_1 \text{ і } A) + P(B_2 \text{ і } A) + \dots + P(B_n \text{ і } A).$$

Замінюючи доданки правої частини за формулою (6.10), отримаємо рівність (6.13).

Приклад. Ймовірності влучення в ціль з двох гармат відповідно дорівнюють 0,6 і 0,9. Береться навмання одна гармата і з неї один раз стріляють. Знайти ймовірність того, що ціль була вражена.

Розв'язання. Нехай A і B – обрання гармати, з якої стріляють. Ймовірності обрання відповідно дорівнюють $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$. Нехай C - влучення в ціль одним пострілом. З умови задачі умовні ймовірності влучення в ціль відповідно дорівнюють: $P(C/A) = 0,6$ і $P(C/B) = 0,9$. Підставляючи отримані ймовірності в формулу (6.13), визначимо ймовірність влучення в ціль одним пострілом:

$$P(C) = P(A) \cdot P(C/A) + P(B) \cdot P(C/B) = \frac{1}{2} \cdot 0,6 + \frac{1}{2} \cdot 0,9 = 0,75.$$

Припустимо тепер, що подія A відбулась. Це змінить ймовірності гіпотез $P(B_1), P(B_2), \dots, P(B_n)$. Необхідно визначити умовні ймовірності здійснення цих гіпотез в припущенні, що подія A відбулась, тобто

визначити $P(B_1/A), P(B_2/A), \dots, P(B_n/A)$. За формулою множення ймовірностей (6.12) знайдемо ймовірність $P(A|B_1)$:

$$P(A|B_1) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) = P(A) \cdot P(B_1/A).$$

Звідки

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1) \cdot P(A/B_1)}{P(A)}.$$

Підставляючи замість $P(A)$ формулу повної ймовірності, отримаємо:

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1) \cdot P(A/B_1)}{\sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P(A/B_i)}.$$

Аналогічним чином визначаються і $P(B_2/A), P(B_3/A), \dots, P(B_n/A)$. Отже

$$P(B_k/A) = \frac{P(B_k) \cdot P(A/B_k)}{\sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P(A/B_i)}. \quad (6.14)$$

Формули (6.14) називаються *формулами Байєса (формулами ймовірностей гіпотез)*.

Приклад. 30% приладів збирає фахівець високої кваліфікації і 70% - середньої кваліфікації. Надійність роботи приладу, зібраного фахівцем високої кваліфікації - 0,9, надійність приладу, зібраного фахівцем середньої кваліфікації - 0,8. Взятий прилад виявився надійним. Знайти ймовірність того, що прилад зібраний фахівцем високої кваліфікації.

Розв'язання. Нехай A – безвідмовна робота приладу. До перевірки приладу можливі такі гіпотези:

B_1 – прилад зібраний фахівцем високої кваліфікації,

B_2 – прилад зібраний фахівцем середньої кваліфікації.

Ймовірності цих гіпотез відповідно: $P(B_1)=0,3$ і $P(B_2)=0,7$. Умовні ймовірності подій $P(A/B_1)=0,9$ і $P(A/B_2)=0,8$. Визначимо ймовірності гіпотез B_1 і B_2 при умові, що подія A відбулася. За формулою (6.14) маємо:

$$P(B_1/A) = \frac{0,3 \cdot 0,9}{0,3 \cdot 0,9 + 0,7 \cdot 0,8} = \frac{0,27}{0,83} = 0,325,$$

$$P(B_2/A) = \frac{0,7 \cdot 0,8}{0,3 \cdot 0,9 + 0,7 \cdot 0,8} = \frac{0,56}{0,83} = 0,675.$$

6.2.5 Випробування Бернуллі

Серія повторних незалежних випробувань, у кожному з яких дана подія A має одну і ту ж саму ймовірність $P(A)=p$, яка не залежить від номера випробування, називається *схемою Бернуллі*. У схемі для кожного випробування можливі тільки два результати: 1) подія A відбулась – «успіх», 2) подія A не відбулась – «невдача» - подія $\bar{A}$ з ймовірністю $P(\bar{A})=q$, причому $p+q=1$. Знайдемо у схемі Бернуллі ймовірність $P_{m,n}$ того, що при n випробуваннях подія A , яка має одну і ту ж саму ймовірність $P(A)=p$ для кожного випробування, відбудеться m разів. Подія A зустрічається рівно m разів, а подія $\bar{A}$ рівно $(n-m)$ разів в серії випробувань, оскільки випробування незалежні, тоді ймовірність реалізації однієї такої сприятливої серії дорівнює $p^m q^{n-m}$. Всі сприятливі серії виходять в результаті вибору різних m номерів випробувань із загальної кількості n номерів і відповідно число їх $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$. Звідки отримаємо *формулу Бернуллі*:

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}. \quad (6.15)$$

Приклад. Знайти ймовірність того, що в родині, яка має 5 дітей, буде дві дівчинки і три хлопчика. Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,7.

Розв'язання. Ймовірність народження хлопчика $p=0,7$, тоді ймовірність народження дівчинки дорівнює $q=1-0,7=0,3$. Тоді ймовірність того, що серед п'яти дітей буде три хлопчики, за формулою (6.15) дорівнює:

$$P_{3,5} = C_5^3 p^3 q^2 = \frac{5!}{3!2!} (0,7)^3 (0,3)^2 = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5}{3! \cdot 2} \cdot 0,343 \cdot 0,09 = 0,309.$$

6.2.6 Локальна та інтегральна теореми Лапласа

Якщо число випробувань n велике, тоді обчислення за формулою Бернуллі (6.15) стає скрутним. Лаплас отримав наближену формулу для ймовірності $P_{m,n}$ появи події A рівно m разів, якщо n – достатньо велике.

Теорема 1. Нехай $P(A)=p$ - ймовірність події A , причому $0 < p < 1$ в кожному випробуванні стала, тоді ймовірність того, що в умовах схеми Бернуллі подія A при n випробуваннях відбудеться рівно m разів,

дорівнює:

$$P_{m,n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot e^{-t^2/2}, \text{ де } t = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}, \quad (6.16)$$

де np - середнє значення числа появи m разів події A при n випробуваннях; $m - np$ - відхилення числа появи події A від його середнього значення. При цьому чим більше n , тим розрахована ймовірність буде краще наближатися до точного значення $P_{m,n}$, отриманого за формулою Бернуллі. Також тим локальна теорема краще працює, чим ймовірність $P(A) = p$ ближче до 0,5, і навпаки, дає суттєву погрішність при ймовірності близької до 0 або 1.

Приклад. Ймовірність влучення в ціль стрільцем при одиничному пострілі дорівнює $p = 0,2$. Яка ймовірність того, що при ста пострілах в ціль буде влучено рівно двадцять разів?

Розв'язання. Знайдемо ймовірність за формулами (6.16):

$$\sqrt{npq} = 4, \quad t = \frac{20 - 100 \cdot 0,2}{\sqrt{4}} = 0, \quad P_{20,100} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} = 0,1.$$

Теорема 2. Якщо ймовірність $P(A) = p$ появи події A в кожному випробуванні незмінна, тоді ймовірність $P_n(m_1 < m < m_2)$ того, що в n випробуваннях подія відбудеться не менше ніж m_1 і не більше ніж m_2 разів, наближено дорівнює:

$$P_n(m_1 < m < m_2) = F(x_2) - F(x_1),$$

де

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-x^2/2} dx, \quad x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}. \quad (6.17)$$

Приклад. Ймовірність влучення в ціль дорівнює $p = 0,7$. Знайти ймовірність того, що при ста пострілах в ціль буде влучено від 65 до 80 разів.

Розв'язання. Ймовірність промаху при кожному пострілі дорівнює $q = 0,3$. Обчислимо значення аргументів:

$$x_1 = \frac{65 - 100 \cdot 0,7}{\sqrt{100 \cdot 0,7 \cdot 0,3}} = \frac{-5}{\sqrt{21}} \approx -1,09; \quad x_2 = \frac{80 - 70}{\sqrt{100 \cdot 0,7 \cdot 0,3}} = \frac{10}{\sqrt{21}} \approx 2,18.$$

Підставляючи знайдені аргументи в інтегральну функцію Лапласа, отримаємо інтеграли, що не беруться. Тут необхідно скористатися таблицею значень інтегральної функції Лапласа. Отримаємо для наших значень: $F(2,18)=0,4854$, $F(-1,09)=-F(1,09)=-0,3621$. Тоді ймовірність того, що при 100 пострілах в ціль буде влучено від 65 до 80 разів:

$$P_{100}(65 < m < 80) = F(2,18) - F(-1,09) = 0,4854 + 0,3621 = 0,8475.$$

6.3 Випадкові величини та їх властивості

6.3.1. Дискретна випадкова величина. Закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини

Розглянемо такий простір елементарних подій, в якому кожній елементарній події $\omega_i \in \Omega$ відповідає одне і лише одне число x або набір чисел $(x_1, x_2, \dots, x_k)$, тобто на множині Ω визначена певна функція $\alpha(\omega_i)$, яка кожній елементарній події ω_i ставить у відповідність певний елемент одновимірного простору R_1 або n -вимірного простору R_n . Цю функцію називають *випадковою величиною*. У разі, коли $\alpha(\omega_i)$ відображує множину Ω на одновимірний простір R_1 , випадкову величину називають *одновимірною*. Якщо відображення здійснюється на R_n , то випадкову величину називають *n -вимірною*. Величина X , яка приймає в результаті випробування одне з кінцевої або нескінченної послідовності значень $x_1, x_2, \dots, x_n$ називається *дискретною випадковою величиною*, якщо кожному значенню x_n відповідає певна ймовірність p_n того, що змінна величина x прийме значення x_n . З визначення випливає, що кожному значенню x_n відповідає ймовірність p_n . Співвідношення, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини та відповідними їм ймовірностями, називають *законом розподілу дискретної випадкової величини*.

Закон розподілу дискретної випадкової величини X можна задати в табличній формі або за допомогою ймовірнісного многокутника.

У разі табличної форми запису закону подається послідовність можливих значень випадкової величини X , розміщених у порядку зростання, та відповідних їм ймовірностей:

Таблиця 6.1

$X = x_i$	x_1	x_2	x_3		x_n
$P(X = x_i) = p_i$	p_1	p_2	p_3		p_n

Те, що випадкова величина X прийме одне із значень послідовності $x_1, x_2, \dots, x_n$, є подією достовірною, і тому повинна виконуватися умова:

$$\sum_{i=1}^N p_i = 1 \quad (6.18)$$

у випадку кінцевої послідовності значень, або

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$$

у випадку нескінченної послідовності значень.

Закон розподілу ймовірностей можна подати ще в одній формі, як функцію розподілу ймовірностей випадкової величини $F(x)$, так звану інтегральну функцію. Функцію аргументу x , що визначає ймовірність випадкової події $X < x$, називають *функцією розподілу ймовірностей*

$F(x) = P(X < x)$. Цю функцію можна тлумачити так: внаслідок експерименту випадкова величина може набути значення, менше за x . Наприклад,

$F(5) = P(X < 5)$ означає, що в результаті експерименту дискретна випадкова величина X може набути значення, яке міститься ліворуч від $x = 5$, що ілюструє рис.6.1.

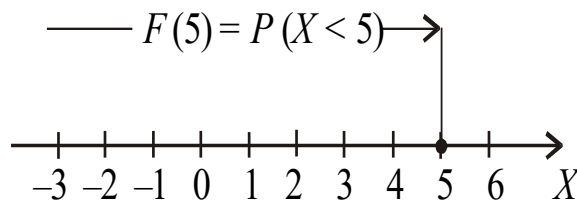


Рисунок 6.1

Розглянемо властивості $F(x)$:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$. Ця властивість випливає з означення функції розподілу.

2. $F(x)$ є неспадною функцією, а саме $F(x_2) \geq F(x_1)$, якщо $x_2 > x_1$.

3. $F(-\infty) = 0$, оскільки подія $X < -\infty$ полягає в тому, що випадкова величина набуває значення, яке міститься ліворуч від $-\infty$, а така подія є неможливою.

4. $F(+\infty) = 1$, оскільки подія $X < +\infty$ полягає в тому, що випадкова

величина X набуває числового значення, яке міститься ліворуч від $+\infty$. Ця подія є достовірною, оскільки будь-яке число $X = x < \infty$.

Приклад. Змінна величина X є число очок, що випадають на верхній грані гральної кістки при її одноразовому киданні. Побудувати закон розподілу цієї випадкової величини.

Розв'язання. Змінна величина X може приймати одне з наступних значень: 1,2,3,4,5,6. Ймовірність випадання кожного значення дорівнює $1/6$. Отже, закон розподілу цієї випадкової величини буде мати вигляд:

Таблиця 6.2

X	1	2	3	4	5	6
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Приклад. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею 6.3. Знайти функцію розподілу ймовірності цієї випадкової величини.

Таблиця 6.3

$X = x_i$	-4	-1	2	6	9	13
$P(X = x_i) = p_i$	0,1	0,2	0,1	0,3	0,1	0,2

Розв'язання. Згідно з властивостями $F(x)$, дістаємо наведені далі співвідношення.

$$1) F(-4) = P(X < -4) = 0;$$

$$2) F(-1) = P(X < -1) = P(X = -4) = 0,1;$$

$$3) F(2) = P(X < 2) = P(X = -4) + P(X = -1) = 0,1 + 0,2 = 0,3;$$

$$4) F(6) = P(X < 6) = P(X = -4) + P(X = -1) + P(X = 2) = 0,1 + 0,2 + 0,1 = 0,4;$$

$$5) F(9) = P(X < 9) = P(X = -4) + P(X = -1) + P(X = 2) + P(X = 6) = 0,1 + 0,2 + 0,1 + 0,3 = 0,7;$$

$$6) F(12) = P(X < 13) = P(X = -4) + P(X = -1) + P(X = 2) + P(X = 6) + P(X = 9) = 0,1 + 0,2 + 0,1 + 0,3 + 0,1 = 0,8;$$

$$7) F(x)|_{x > 13} = P(X > 13) = P(X = -4) + P(X = -1) + P(X = 2) + P(X = 6) + P(X = 9) + P(X = 13) = 0,1 + 0,2 + 0,1 + 0,1 + 0,3 + 0,1 + 0,2 = 1.$$

6.3.2 Математичне сподівання та дисперсія дискретної випадкової величини

Нехай маємо дискретну випадкову величину X , закон розподілу якої задається таблицею 1.1. Математичним сподіванням $M(X)$ дискретної випадкової величини X , називається сума добутків усіх можливих значень випадкової величини на ймовірності цих значень:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i. \quad (6.19)$$

При цьому, як раніше вказувалося, $\sum_{i=1}^N p_i = 1$. Покажемо, що середнє арифметичне спостережуваних значень випадкової величини при необмеженому зростанні числа випробувань прямує до її математичного сподівання. Нехай проводиться N незалежних випробувань. Припустимо, що

значення x_1 з'явилося n_1 разів,
значення x_2 з'явилося n_2 разів,
.....
значення x_k з'явилося n_k разів.

Випадкова величина X набуде значень $x_1, x_2, \dots, x_k$. Обчислимо середнє арифметичне значення отриманих значень величини X (позначимо через $m(X)$):

$$m(X) = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_k n_k}{N} = x_1 \frac{n_1}{N} + x_2 \frac{n_2}{N} + \dots + x_k \frac{n_k}{N}.$$

Але оскільки при великій кількості випробувань N відносна частота $\frac{n_i}{N}$

прямує до ймовірності появи значення x_i , тоді $\sum_{i=1}^k x_i \frac{n_i}{N} \approx \sum_{i=1}^k x_i p_i$. Отже, $M(X) = m(X)$.

Математичне сподівання випадкової величини X називається також *центром розподілу ймовірностей випадкової величини X* . Термін «центр розподілу ймовірностей» введений за аналогією з назвою «центр ваги». Якщо на осі Ox в точках з абсцисами $x_1, x_2, \dots, x_n$ розміщені маси $p_1, p_2, \dots, p_n$, то з аналітичної геометрії відомо, що абсциса центра ваги таких мас визначається за формулою

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n x_k p_k}{\sum_{k=1}^n p_k}.$$

Якщо $\sum_{k=1}^n p_k = 1$, тоді $x_C = \sum_{k=1}^n x_k p_k$. Ця формула співпадає по вигляду з формулою (6.19) для математичного сподівання.

Розглянемо далі різницю між випадковою величиною та її математичним сподіванням $X - M(X)$. Цю випадкову величину назовемо *центрованою випадковою величиною* або *відхиленням*. Знайдемо математичне сподівання центрованої випадкової величини:

$$\begin{aligned} M(X - M(X)) &= \sum_{k=1}^n (X_k - M(X)) p_k = \sum_{k=1}^n X_k p_k - \sum_{k=1}^n M(X) p_k = \\ &= M(X) - M(X) \sum_{k=1}^n p_k = M(X) - M(X) \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

Отже, математичне сподівання центрованої випадкової величини дорівнює нулю.

Іноді буває доцільно достовірну постійну величину c розглядати як випадкову величину, яка з ймовірністю 1 приймає значення c , а інші значення приймає з ймовірністю 0. Тоді має сенс говорити про математичне сподівання сталої $M(c) = c \cdot 1 = c$, тобто математичне сподівання сталої дорівнює самій цій сталій.

Крім математичного сподівання випадкової величини X , кількісною характеристикою розподілу випадкової величини є дисперсія випадкової величини X . Слово «дисперсія» означає розсіювання. Дисперсія є *кількісною характеристикою розсіювання значень випадкової величини навколо її математичного сподівання*.

Дисперсією випадкової величини X називається математичне сподівання квадрата відхилення цієї величини:

$$D(X) = M(X - M(X))^2 \quad (6.20)$$

або

$$D(X) = \sum_{k=1}^n (x_k - M(X))^2 p_k. \quad (6.21)$$

Дисперсія має розмірність квадрата випадкової величини. Іноді, для характеристики розсіювання, зручніше користуватися величиною, розмірність якої співпадає з розмірністю випадкової величини. Такою величиною є середнє квадратичне відхилення.

Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини X називають корінь квадратний з її дисперсії:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \quad (6.22)$$

При обчисленні дисперсії формулу (6.21) зручніше перетворити так:

$$\begin{aligned} D(X) &= \sum_{k=1}^n (x_k - M(X))^2 p_k = \sum_{k=1}^n x_k^2 p_k - 2 \sum_{k=1}^n x_k M(X) p_k + \sum_{k=1}^n M^2(X) p_k = \\ &= \sum_{k=1}^n x_k^2 p_k - 2M(X) \sum_{k=1}^n x_k p_k + M^2(X) \sum_{k=1}^n p_k = M(X^2) - 2M(X) \cdot M(X) + \\ &+ M^2(X) \cdot 1 = M(X^2) - M^2(X). \end{aligned}$$

Отже,

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X), \quad (6.23)$$

тобто дисперсія дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата випадкової величини та квадрата математичного сподівання випадкової величини.

Розглянемо властивості дисперсії:

1. Якщо C — стала величина, то $D(C) = 0$. Справді:

$$D(C) = M(C - M(C))^2 = M(C - C)^2 = M(0) = 0.$$

2. $D(CX) = C^2 D(X)$. Маємо:

$$\begin{aligned} D(CX) &= M(CX - M(CX))^2 = M(CX - CM(X))^2 = \\ &= M(C(X - M(X)))^2 = C^2 M(X - M(X))^2 = C^2 D(X). \end{aligned}$$

Приклад. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею 6.4. Обчислити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Таблиця 6.4

x_i	-4	-2	1	2	4	6
p_i	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1

Розв'язання. Згідно з формулами (6.19), (6.22), (6.23) маємо:

$$M(X) = \sum_{i=1}^6 x_i p_i = -4 \cdot 0,1 - 2 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,1 + 6 \cdot 0,1 =$$

$$= -0,4 - 0,4 + 0,3 + 0,4 + 0,4 + 0,6 = 0,9;$$

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 p_i = 16 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,2 + 16 \cdot 0,1 + 36 \cdot 0,1 =$$

$$= 1,6 + 0,8 + 0,3 + 0,8 + 1,6 + 3,6 = 8,7;$$

$$D(X) = 8,7 - (0,9)^2 = 8,7 - 0,81 = 7,89;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{7,89} \approx 2,8.$$

6.3.3 Неперервна випадкова величина і її закон розподілу ймовірностей

Якщо значення, які може приймати дана величина X , заповнюють кінцевий або нескінченний інтервал (α, β) числової осі Ox , то така випадкова величина називається *неперервною*. Для неперервних випадкових величин закон розподілу ймовірностей зручно описувати за допомогою густини ймовірностей $f(x)$.

Теорема. Нехай $f(x)$ є густиною розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини X . Тоді імовірність того, що значення випадкової величини X потрапляє у деякий інтервал (α, β) , дорівнює визначеному інтегралу від функції $f(x)$ в границях від α до β , тобто справедлива рівність:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx. \quad (6.24)$$

Таким чином, знаючи густину розподілу ймовірностей випадкової величини, можна визначити ймовірність того, що значення неперервної випадкової величини потрапило у заданий інтервал. Геометрично ця ймовірність дорівнює площі відповідної криволінійної трапеції, яка обмежена кривою функції $f(x)$, віссю Ox та прямими $x = \alpha$, $x = \beta$.

Функція густини ймовірностей $f(x)$ має наступні *властивості*:

1. $f(x) \geq 0$.
2. Умова нормування неперервної випадкової величини X :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

3. Якщо неперервна випадкова величина X визначена лише на проміжку $[\alpha, \beta]$, то умова нормування має такий вигляд:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 1.$$

Нехай $f(x)$ є густина розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини X , тоді функція

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx \quad (6.25)$$

називається *функцією розподілу ймовірностей* неперервної випадкової величини. З рівності (6.25) випливає, що

$$f(x) = F'(x).$$

Таким чином, можна надати наступне визначення: *густиною ймовірностей* неперервної випадкової величини X називається перша похідна від функції розподілу ймовірностей $F(x)$. Іноді функцію $f(x)$ називають *диференціальною функцією розподілу ймовірностей*, а $F(x)$ – *інтегральною функцією розподілу ймовірностей*. Функція розподілу ймовірностей $F(x)$ для неперервної випадкової величини має такі ж властивості, як і функція розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини (див. 1.2.1).

Теорема. Ймовірність попадання випадкової величини X у заданий інтервал (α, β) дорівнює приросту функції розподілу на цьому інтервалі:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} dF(x) = F(x)|_{\alpha}^{\beta} = F(\beta) - F(\alpha). \quad (6.26)$$

Розглянемо далі випадкову величину із *законом рівномірного розподілу ймовірностей*. Закон розподілу або густина розподілу $f(x)$ такої випадкової величини задається наступним чином:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \text{ при } x < \alpha, \\ f(x) &= c \text{ при } \alpha < x < \beta, \\ f(x) &= 0 \text{ при } \beta < x. \end{aligned}$$

На інтервалі (α, β) густина $f(x)$ має незмінне значення c , а поза цим інтервалом дорівнює нулю. Такий розподіл також називають *законом рівномірної густини*. З умови $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ знаходимо значення c :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} cdx = c(\beta - \alpha) = 1,$$

отже,

$$c = \frac{1}{\beta - \alpha}, \quad \beta - \alpha = \frac{1}{c}.$$

З останньої рівності випливає, що інтервал (α, β) , на якому визначений рівномірний розподіл, обов'язково кінцевий. Визначимо ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення, що лежить в інтервалі (a, b) :

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{\beta - \alpha} dx = \frac{b - a}{\beta - \alpha}.$$

Знайдемо інтегральний закон розподілу $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$.

Якщо $x < \alpha$, тоді $f(x) = 0$ і, відповідно,

$$F(x) = 0.$$

Якщо $\alpha < x < \beta$, тоді $f(x) = \frac{1}{\beta - \alpha}$ і, відповідно

$$F(x) = \int_{\alpha}^x \frac{1}{\beta - \alpha} dx = \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}.$$

Якщо $\beta < x$, тоді $f(x) = 0$ і, відповідно, $\int_b^x f(x)dx = 0$, звідки

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\beta - \alpha} dx = \frac{\beta - \alpha}{\beta - \alpha} = 1.$$

Приклад. Закон розподілу неперервної випадкової величини X такий:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ \frac{(x+1)^3}{64}, & -1 < x \leq 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Знайти $f(x)$ і ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $(0,2)$.

Розв'язання. $f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ \frac{3}{64}(x+1)^2, & -1 < x \leq 3; \\ 0, & x > 3. \end{cases}$

Ймовірність події $P(0 < X < 2)$ обчислимо за формулою (6.26):

$$P(0 < X < 2) = F(2) - F(0) = \frac{27}{64} - \frac{1}{64} = \frac{26}{64} = \frac{13}{32}.$$

Або згідно з формулою (6.24) маємо також:

$$\begin{aligned} P(0 < X < 2) &= \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \frac{3}{64} (x+1)^2 dx = \\ &= \frac{3}{64} \int_0^2 (x+1)^2 dx = \frac{3}{64} \frac{(x+1)^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{27}{64} - \frac{1}{64} = \frac{26}{64} = \frac{13}{32}. \end{aligned}$$

6.3.4 Числові характеристики неперервної випадкової величини

Аналогічно тому, як це було зроблено раніше для дискретної випадкової величини, розглянемо числові характеристики неперервної випадкової величини X із щільністю розподілу $f(x)$. Математичне сподівання неперервної випадкової величини X із густиною розподілу $f(x)$ визначається виразом:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx. \quad (6.27)$$

Якщо неперервна випадкова величина X може приймати значення тільки на кінцевому відрізку $[\alpha, \beta]$, математичне сподівання $M(X)$

визначається формулою:

$$M(X) = \int_{\alpha}^{\beta} x f(x) dx. \quad (6.28)$$

Математичне сподівання $M(X)$ називають центром розподілу ймовірностей випадкової величини X . Якщо крива розподілу симетрична відносно осі Oy , тобто $f(x)$ - функція парна, тоді очевидно, що

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = 0.$$

В цьому випадку центр розподілу ймовірностей співпадає з початком координат. Розглянемо центровану випадкову величину $X - M(X)$. Знайдемо її математичне сподівання:

$$\begin{aligned} M(X - M(X)) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X)) f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx - M(X) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \\ &= M(X) - M(X) \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

Як і для дискретної величини, математичне сподівання неперервної центрованої випадкової величини дорівнює нулю.

Дисперсією неперервної випадкової величини X називається математичне сподівання квадрата відхилення цієї величини:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x) dx. \quad (6.29)$$

Якщо неперервна випадкова величина X може приймати значення тільки на кінцевому відрізку $[\alpha, \beta]$, тоді дисперсія дорівнює:

$$D(X) = \int_{\alpha}^{\beta} (x - M(X))^2 f(x) dx. \quad (6.30)$$

При обчисленні дисперсії формулу (6.30) краще перетворити так:

$$\begin{aligned} D(X) &= \int_{\alpha}^{\beta} (x - M(X))^2 f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} x^2 f(x) dx - \int_{\alpha}^{\beta} 2x \cdot M(X) f(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} M^2(X) f(x) dx = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} x^2 f(x) dx - 2M(X) \int_{\alpha}^{\beta} x \cdot f(x) dx + M^2(X) \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} x^2 f(x) dx - 2M^2(X) + M^2(X) \cdot 1 = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} x^2 f(x) dx - M^2(X). \end{aligned}$$

$$D(X) = \int_{\alpha}^{\beta} x^2 f(x) dx - M^2(X). \quad (6.31)$$

Слід пам'ятати, що дисперсія не може бути від'ємною величиною ($D(x) \geq 0$). Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини X називають корінь квадратний з дисперсії

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Як і у випадку дискретної випадкової величини, дисперсія та середнє квадратичне відхилення характеризують розсіювання значень неперервної випадкової величини.

Приклад. За заданою функцією розподілу ймовірностей

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -3; \\ \frac{\sqrt{x+4}}{3}, & -3 < x \leq 6; \\ 1, & x > 6. \end{cases}$$

обчислити $M(X)$, $D(X)$.

Розв'язання. Для обчислення $M(X)$ та $D(X)$ необхідно знайти густину ймовірностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -3; \\ \frac{1}{6\sqrt{x+4}}, & -3 < x \leq 6; \\ 0, & x > 6. \end{cases}$$

Тоді:

$$\begin{aligned} M(X) &= \int_{-3}^6 x f(x) dx = \int_{-3}^6 x \frac{1}{6\sqrt{x+4}} dx = \frac{1}{6} \int_{-3}^6 \frac{x}{\sqrt{x+4}} dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} x+3 = z^2 \\ x = z^2 - 3 \\ dx = 2z dz \end{array} \right. \rightarrow \left. \begin{array}{l} -3 \leq x \leq 6 \\ 0 \leq z \leq 3 \end{array} \right| = \frac{1}{6} \int_0^3 \frac{z^2 - 3}{z} 2z dz = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^3 (z^2 - 3) dz = \frac{1}{3} \left(\int_0^3 z^2 dz - 3 \int_0^3 dz \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left(\left. \frac{z^3}{3} \right|_0^3 - 3z \Big|_0^3 \right) = \frac{1}{3} (9 - 9) = 0; \end{aligned}$$

Знайдемо $D(x)$:

$$\begin{aligned}
 D(X) &= \int_{-3}^6 x^2 f(x) dx - 0 = \int_{-3}^6 x^2 \frac{1}{6\sqrt{x+3}} dx = \frac{1}{6} \int_{-3}^6 \frac{x^2}{\sqrt{x+3}} dx = \\
 &= \left. \begin{array}{l} x+3 = z^2 \\ x = z^2 - 3 \\ dx = 2z dz \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3 \leq x \leq 6 \\ 0 \leq z \leq 3 \end{array} = \frac{1}{6} \int_0^3 \frac{(z^2 - 3)^2}{z} 2z dz = \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^3 (z^2 - 3)^2 dz = \frac{1}{3} \left(\int_0^3 z^4 dz - 6 \int_0^3 z^2 dz + 9 \int_0^3 dz \right) = \\
 &= \frac{1}{3} \left(\frac{z^5}{5} \Big|_0^3 - 6 \frac{z^3}{3} \Big|_0^3 + 9z \Big|_0^3 \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{243}{5} - 54 + 9 \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{243 - 270 + 45}{5} = \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{18}{5} = \frac{6}{5}.
 \end{aligned}$$

6.3.5. Мода та медіана випадкової величини

Модю M_o дискретної випадкової величини X називають те її можливе значення, якому відповідає найбільша ймовірність його появи.

Модю для неперервної випадкової величини X називають те її можливе значення, якому відповідає максимальна щільність ймовірності $f(M_o) = \max$.

Якщо випадкова величина має одну моду, то такий розподіл ймовірностей називають *одномодальним*; якщо розподіл має дві моди — *двомодальним* і т. ін. Існують і такі розподіли, які не мають моди. Їх називають *антимодальними*.

Медіаною M_e неперервної випадкової величини X називають те її значення, для якого виконуються рівність ймовірностей подій:

$$\int_{-\infty}^{M_e} f(x) dx = \int_{M_e}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{2}$$

або

$$P(-\infty < X < M_e) = P(M_e < X < \infty) = \frac{1}{2},$$

тобто рівноймовірно, що випадкова величина X прийме значення, менше

ніж M_e і більше ніж M_e . Зауважимо, що сама випадкова величина X може значення M_e і не приймати.

Приклад. Робітник під час роботи обслуговує три верстати-автомати. Ймовірність того, що верстат-автомат потребує уваги робітника за певний проміжок часу, — величина стала і дорівнює 0,8. Побудувати закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X — числа верстатів, які потребують уваги робітника за певний проміжок часу. Знайти M_0 .

Розв'язання. Можливі значення випадкової величини: $X = 0, 1, 2, 3$.

Ймовірності цих можливих значень такі:

$$\begin{aligned}p_1 &= (0,2)^3 = 0,008; \\p_2 &= 3p q^2 = 3 \cdot 0,8 \cdot 0,04 = 0,096; \\p_3 &= 3p^2 q = 3 \cdot 0,64 \cdot 0,2 = 0,384; \\p_4 &= p^3 = (0,8)^3 = 0,512.\end{aligned}$$

Визначаємо, що $M_0 = 3$. Отже, дістаємо одномодальний розподіл.

6.4 Системи випадкових величин

6.4.1. Системи дискретних випадкових величин та їх числові характеристики

На одному й тому самому просторі елементарних подій Ω можна визначити не одну, а кілька випадкових величин. Така потреба постає, наприклад, коли досліджуваний об'єкт характеризується кількома випадковими параметрами. Так, у разі виготовлення валів такі їх параметри, як діаметр, довжина, овальність є випадковими величинами, значення яких наперед не можна передбачити. Або, скажімо, структура витрат випадково взятої окремої сім'ї на їжу, одяг, взуття, транспорт, задоволення духовних потреб також є випадковими величинами, визначеними на одному й тому самому просторі елементарних подій. На багатовимірні випадкові величини поширюються майже без змін основні означення, які були розглянуті для одновимірної випадкової величини. Одночасна поява внаслідок проведення експерименту n випадкових величин $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ з певною ймовірністю являє собою n -вимірну випадкову величину, яку називають також *системою n випадкових величин*, або *n -вимірним випадковим вектором*.

Законом розподілу системи двох дискретних випадкових величин називають перелік можливих значень $X = x_i$, $Y = y_j$ та відповідних їм ймовірностей спільної появи. Цей закон представлений у вигляді табл.6.5.

Таблиця 6.5

$Y = y_i \backslash X = x_j$	y_1	y_2	y_3	$\dots$	y_k
x_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	$\dots$	p_{1k}
x_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	$\dots$	p_{2k}
x_3	p_{31}	p_{32}	p_{33}	$\dots$	p_{3k}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	p_{m3}	$\dots$	p_{mk}

Тут $x_1 < x_2 < \dots < x_m$, $y_1 < y_2 < \dots < y_k$, p_{ij} – ймовірність події, яка полягає в одночасному виконанні рівностей $X = x_i$, $Y = y_j$. При цьому

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k p_{ij} = 1.$$

Таблиця може містити нескінченну множину рядків і стовпців.

Математичні сподівання дискретних випадкових величин X і Y , які входять в систему, визначаються за формулами:

$$M(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k x_i p_{ij}, \quad M(Y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k y_j p_{ij}. \quad (6.32)$$

Точка $(M(X), M(Y))$ називається *центром розсіювання* системи випадкових величин X та Y .

Дисперсії дискретних випадкових величин X і Y визначаються за формулами:

$$D(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k (x_i - M(X))^2 p_{ij}, \quad D(Y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k (y_j - M(Y))^2 p_{ij}. \quad (6.33)$$

Також для обчислення дисперсій можуть бути застосовані формули:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X), \quad D(Y) = M(Y^2) - M^2(Y). \quad (6.34)$$

Середні квадратичні відхилення випадкових величин X і Y визначаються за формулами:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}, \quad \sigma(Y) = \sqrt{D(Y)}. \quad (6.35)$$

Під час вивчення системи двох і більше випадкових величин доводиться з'ясовувати наявність зв'язку між цими величинами та характер цього зв'язку. З відповідною метою застосовують так званий *кореляційний момент*:

$$K_{xy} = M[(X - M(X))(Y - M(Y))]. \quad (6.36)$$

Для дискретних випадкових величин кореляційний момент обчислюється за формулою:

$$K_{xy} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k (x_i - M(X))(y_j - M(Y))p_{ij}. \quad (6.37)$$

Кореляційний момент також можна знайти за формулою:

$$K_{xy} = M(XY) - M(X)M(Y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k x_i y_j p_{ij} - M(X)M(Y). \quad (6.38)$$

Випадкові величини X і Y називаються *незалежними*, якщо ймовірність однієї з них набути певне значення не залежить від того, яке значення набула інша величина. В цьому випадку:

$$M(XY) = M(X)M(Y), \quad K_{xy} = 0.$$

Тісноту кореляційного зв'язку характеризує *коефіцієнт кореляції*:

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}, \quad (6.39)$$

який є безрозмірною величиною і задовольняє умову

$$-1 \leq r_{xy} \leq 1.$$

Отже, якщо випадкові величини X та Y є незалежними, то $K_{xy} = 0$ та

$r_{xy} = 0$. Умова $r_{xy} = 0$ є необхідною, але не достатньою умовою незалежності випадкових величин. Справді, може існувати система залежних випадкових величин, у якій коефіцієнт кореляції дорівнює нулю. Прикладом такої системи є система двох випадкових величин (X, Y) , яка рівномірно розподілена всередині кола радіусом R із центром у початку координат. Дві випадкові величини X і Y називають *некорельованими*, якщо $r_{xy} = 0$, і *корельованими*, якщо $r_{xy} \neq 0$. Отже, якщо X і Y незалежні, то вони

будуть і некорельованими. Але з некорельованості випадкових величин у загальному випадку не впливає їх незалежність.

Приклад. Задано закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин (X, Y) . Обчислити $M(X)$; $D(X)$; $M(Y)$; $D(Y)$; K_{xy} ; r_{xy} .

Таблиця 6.6

$X = x_i \backslash Y = y_j$	5,2	10,2	15,2
2,4	0,01	0,2	0,09
4,4	0,2	0,02	0,18
6,4	0,19	0,08	0,03

Розв'язання. Знайдемо спочатку ймовірності:

$$\begin{aligned}
 p_{x_i}(5,2) &= 0,01 + 0,2 + 0,19 = 0,4; & p_{x_i}(10,2) &= 0,2 + 0,02 + 0,08 = 0,3; \\
 p_{x_i}(15,2) &= 0,09 + 0,18 + 0,03 = 0,3; & p_{y_j}(2,4) &= 0,01 + 0,2 + 0,09 = 0,3; \\
 p_{y_j}(4,4) &= 0,2 + 0,02 + 0,18 = 0,4; & p_{y_j}(6,4) &= 0,19 + 0,08 + 0,03 = 0,3.
 \end{aligned}$$

Основні числові характеристики обчислюємо за формулами (6.32), (6.34), (6.35), (6.38) і (6.39):

$$\begin{aligned}
 M(X) &= \sum_{i=1}^3 x_i p_{x_i} = 5,2 \cdot 0,4 + 10,2 \cdot 0,3 + 15,2 \cdot 0,3 = \\
 &= 2,08 + 3,06 + 4,56 = 9,7;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M(X^2) &= \sum_{i=1}^3 x_i^2 p_{x_i} = (5,2)^2 0,4 + (10,2)^2 0,3 + (15,2)^2 0,3 = \\
 &= 10,816 + 31,212 + 69,312 = 111,34;
 \end{aligned}$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 111,34 - 94,09 = 17,25;$$

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)} = 4,15;$$

$$\begin{aligned}
 M(Y) &= \sum_{j=1}^3 y_j p_{y_j} = 2,4 \cdot 0,3 + 4,4 \cdot 0,4 + 6,4 \cdot 0,3 = \\
 &= 0,72 + 1,76 + 1,92 = 4,4;
 \end{aligned}$$

$$M(Y^2) = \sum_{j=1}^3 y_j^2 p_{y_j} = (2,4)^2 0,3 + (4,4)^2 0,4 + (6,4)^2 0,3 =$$

$$= 1,728 + 7,744 + 12,288 = 21,76;$$

$$D(Y) = M(Y^2) - M^2(Y) = 21,76 - 19,36 = 2,4;$$

$$\sigma_y = \sqrt{D(Y)} = 1,55;$$

$$M(XY) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_i y_j p_{ij} = 2,4 \cdot 5,2 \cdot 0,01 + 2,4 \cdot 10,2 \cdot 0,2 +$$

$$+ 2,4 \cdot 15,2 \cdot 0,09 + 4,4 \cdot 5,2 \cdot 0,2 + 4,4 \cdot 10,2 \cdot 0,02 +$$

$$+ 4,4 \cdot 15,2 \cdot 0,18 + 6,4 \cdot 5,2 \cdot 0,19 + 4 \cdot 10,2 \cdot 0,08 +$$

$$+ 6,4 \cdot 15,2 \cdot 0,03 = 0,1248 + 4,896 + 3,2832 + 4,576 +$$

$$+ 0,8976 + 12,0384 + 6,3232 + 5,2224 + 2,9184 = 40,28;$$

$$K_{xy} = M(XY) - M(X) M(Y) = 40,28 - 9,7 \cdot 4,4 =$$

$$= 40,28 - 42,68 = -2,4.$$

Оскільки $K_{xy} \neq 0$, то між відповідними величинами існує кореляційний зв'язок. Для вимірювання тісноти кореляційного зв'язку обчислимо коефіцієнт кореляції

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{-2,4}{4,15 \cdot 1,55} \approx -0,37.$$

6.4.2 Умовні закони розподілу системи двох дискретних випадкових величин

Умовним законом розподілу дискретної випадкової величини X при фіксованому значенні $Y = y_j$ називається перелік можливих значень випадкової величини $X = x_i$ та відповідних їм умовних ймовірностей, обчислених при фіксованому значенні $Y = y_j$. У табличній формі запису умовний закон $X / Y = y_j$ має такий вигляд (табл.6.7):

Таблиця 6.7

$X = x_i$	x_1	x_2	x_3	...	x_m
$P(X = x_i / Y = y_j) = \frac{P((X = x_i) \cap (Y = y_j))}{P(Y = y_j)} = \frac{P_{ij}}{P_{y_j}}$	P_{1j} / P_{y1}	P_{2j} / P_{y2}	P_{3j} / P_{y3}	...	P_{mj} / P_{ym}

При цьому має виконуватись умова нормування:

$$\sum_{i=1}^m P(X = x_i / Y = y_j) = \sum_{i=1}^m \frac{P_{ij}}{P_{y_j}} = \frac{1}{P_{y_j}} \sum_{i=1}^m P_{ij} = \frac{P_{y_j}}{P_{y_j}} = 1. \quad (\sum_{i=1}^m P_{ij} = P_{y_j}).$$

Числові характеристики для цього закону називають умовними.

Умовне математичне сподівання:

$$\begin{aligned} M(X / Y = y_j) &= \\ &= \sum_{i=1}^m x_i P(X = x_i / Y = y_j) = \sum_{i=1}^m x_i \frac{P_{ij}}{P_{y_j}} = \frac{1}{P_{y_j}} \sum_{i=1}^m x_i P_{ij}. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Умовна дисперсія і середнє квадратичне відхилення:

$$D(X / Y = y_j) = \frac{1}{P_{y_j}} \sum_{i=1}^m x_i^2 P_{ij} - M^2(X / Y = y_j); \quad (6.41)$$

$$\sigma(X / Y = y_j) = \sqrt{D(X / Y = y_j)}. \quad (6.42)$$

Умовним законом розподілу випадкової величини Y при фіксованому значенні $X = x_i$ називається перелік можливих значень випадкової величини

$Y = y_j$ і відповідних їм умовних ймовірностей, обчислених при фіксованому значенні $X = x_i$. Форма запису умовного закону має такий вигляд (табл.6.8):

Таблиця 6.8

$Y = y_j$	y_1	y_2	y_3	$\dots$	y_m
$P(Y = y_j / X = x_i) =$ $= \frac{P((Y = y_j) \cap (X = x_i))}{P(X = x_i)} = \frac{P_{ij}}{P_{x_i}}$	P_{i1} / P_{x1}	P_{i2} / P_{x2}	P_{i3} / P_{x3}	$\dots$	P_{im} / P_{xm}

При цьому має виконуватись умова нормування:

$$\sum_{j=1}^m P(Y = y_j / X = x_i) = \sum_{j=1}^m \frac{P_{ij}}{P_{x_i}} = \frac{1}{P_{x_i}} \sum_{j=1}^m P_{ij} = \frac{P_{x_i}}{P_{x_i}} = 1. \quad (\sum_{j=1}^m P_{ij} = P_{x_i}).$$

Умовне математичне сподівання дорівнює:

$$\begin{aligned} M(Y / X = x_i) &= \\ &= \sum_{j=1}^m y_j P(Y = y_j / X = x_i) = \sum_{j=1}^m y_j \frac{P_{ij}}{P_{x_i}} = \frac{1}{P_{x_i}} \sum_{j=1}^m y_j P_{ij}. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Умовна дисперсія і середнє квадратичне відхилення обчислюються відповідно за формулами:

$$D(Y / X = x_i) = \frac{1}{P_{x_i}} \sum_{j=1}^m y_j^2 P_{ij} - M^2(Y / X = x_i). \quad (6.44)$$

$$\sigma(Y / X = x_i) = \sqrt{D(Y / X = x_i)}. \quad (6.45)$$

6.4.3. Системи неперервних випадкових величин та їх закон розподілу ймовірностей

Закон розподілу системи двох неперервних випадкових величин (X, Y) задають за допомогою функції розподілу ймовірностей $F(x, y)$ або функції густини ймовірностей $f(x, y)$. Функцією розподілу ймовірностей системи двох випадкових величин (X, Y) називають таку функцію двох аргументів x та y , яка визначає ймовірність одночасної появи подій $(X < x)$ та $(Y < y)$:

$$F(x, y) = P((X < x) \cap (Y < y)). \quad (6.46)$$

Функція $F(x, y)$ має такі властивості:

1. $0 \leq F(x, y) \leq 1$, оскільки $0 \leq P((X < x) \cap (Y < y)) \leq 1$.
2. Якщо один з аргументів $F(x, y)$ прямує до $+\infty$, то функція розподілу системи прямує до функції розподілу одного аргументу, що не прямує до $+\infty$, а саме:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y) = F(x, \infty) = F(x); \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x, y) = F(\infty, y) = F(y).$$

3. $\lim_{\substack{y \rightarrow \infty, \\ x \rightarrow \infty}} F(x, y) = F(\infty, \infty) = P(x < \infty, y < \infty) = 1$.

$$4. \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ y \rightarrow -\infty}} F(x, y) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, y) = \lim_{y \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0.$$

5. $F(x, y)$ є неспадною функцією аргументів x і y .

6. Ймовірність влучення точки (X, Y) у довільний прямокутник $(a < X < b, c < Y < d)$ обчислюється за формулою:

$$P(a < x < b, c < y < d) = F(b, d) + F(a, c) - F(a, d) - F(b, c).$$

Розглянемо прямокутник зі сторонами Δx та Δy (рис.6.2). Ймовірність розміщення системи (X, Y) у прямокутній області $(x < X < x + \Delta x, y < Y < y + \Delta y)$ обчислюється за формулою

$$P(x < X < x + \Delta x, y < Y < y + \Delta y) = F(x + \Delta x, y + \Delta y) + F(x, y) - F(x + \Delta x, y) - F(x, y + \Delta y).$$

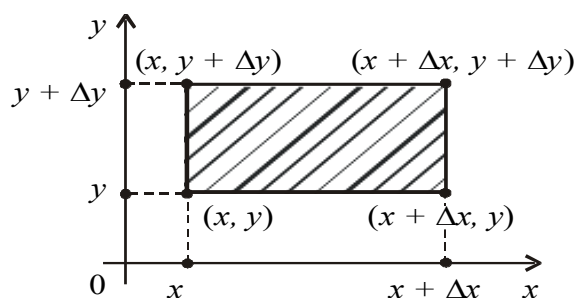


Рисунок 6.2

Поділивши цю ймовірність на площу прямокутника $\Delta x \Delta y$ і спрямувавши $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$, дістанемо ймовірність у точці, тобто густину:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x, y < Y < y + \Delta y)}{\Delta x \Delta y} &= \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \frac{(F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y + \Delta y)) - (F(x + \Delta x, y) - F(x, y))}{\Delta x \Delta y} = \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y} \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y + \Delta y)}{\Delta x} - \right. \\ &\quad \left. - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x, y) - F(x, y)}{\Delta x} \right) = \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{F'_x(x, y + \Delta y) - F'_x(x, y)}{\Delta y} = F''_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y). \end{aligned}$$

Отже,

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

Функція $f(x, y)$ може існувати лише за умови, що $F(x, y)$ є

неперервною за аргументами x і y та двічі диференційовною. Функції $f(x, y)$ у тривимірному просторі відповідає певна поверхня — так звана *поверхня розподілу ймовірностей системи двох неперервних випадкових величин* (X, Y) .

Тоді $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy$ — ймовірність розміщення системи двох випадкових величин у прямокутнику зі сторонами dx, dy .

Властивості функції густини ймовірностей $f(x, y)$:

1) Функція $f(x, y) \geq 0$, оскільки $F(x, y)$ є неспадною відносно аргументів x і y .

Умова нормування системи двох неперервних випадкових величин (X, Y) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1. \quad (6.47)$$

2) Якщо всі випадкові точки (X, Y) належать кінцевій області D , то умова нормування набуває вигляду:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = 1.$$

3) Ймовірність розміщення системи випадкових величин (X, Y) в області D обчислюється так:

$$P((x, y) \in D) = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (6.48)$$

4) Ймовірність розміщення системи змінних (X, Y) у прямокутній області $D = (a < x < b, c < y < d)$:

$$P(a < x < b, c < y < d) = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy.$$

5) Функція розподілу ймовірностей системи двох змінних (X, Y) визначається з рівняння:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy.$$

6.4.4 Числові характеристики системи неперервних випадкових величин

Математичні сподівання неперервних випадкових величин X і Y , які входять в систему, визначаються за формулами:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, y) dx dy; \quad M(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f(x, y) dx dy. \quad (6.49)$$

Дисперсії неперервних випадкових величин X і Y визначаються за формулами:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x, y) dx dy; \quad D(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y - M(Y))^2 f(x, y) dx dy; \quad (6.50)$$

або

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x, y) dx dy - M^2(X); \quad D(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(x, y) dx dy - M^2(Y). \quad (6.51)$$

Середні квадратичні відхилення неперервних випадкових величин X і Y визначаються за такими ж формулами, що і для дискретних величин, тобто

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}, \quad \sigma(Y) = \sqrt{D(Y)}.$$

Кореляційний момент для неперервних випадкових величин X і Y дорівнює:

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f(x, y) dx dy - M(X)M(Y). \quad (6.52)$$

Коефіцієнт кореляції для неперервних випадкових величин X і Y визначається за формулою (6.39), як і для дискретних випадкових величин, причому також виконується умова $-1 \leq r_{xy} \leq 1$.

Приклад. Система випадкових величин X і Y підпорядкована закону розподілу з густиною

$$f(x, y) = \begin{cases} a(x + y), & \text{в області } D; \\ 0, & \text{поза області } D. \end{cases}$$

Область D – квадрат, обмежений прямими $x = 0, x = 3, y = 0, y = 3$. Знайти:

- 1) коефіцієнт a ;
- 2) імовірність попадання випадкової точки (X, Y) в квадрат Q , обмежений прямими $x = 1, x = 2, y = 1, y = 2$;
- 3) математичні сподівання $M(X)$ і $M(Y)$;
- 4) середні квадратичні відхилення $\sigma(X)$ і $\sigma(Y)$.

Розв'язання.

- 1) Коефіцієнт a знаходимо з умови нормування: $a \int_0^3 \int_0^3 (x + y) dx dy = 1$.

Звідси

$$\begin{aligned} a \int_0^3 \int_0^3 (x+y) dx dy &= a \int_0^3 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^3 dx = a \int_0^3 \left(3x + \frac{9}{2} \right) dx = \\ &= a \left[\frac{3}{2} x^2 + \frac{9}{2} x \right]_0^3 = a \left(\frac{27}{2} + \frac{27}{2} \right) = 27a = 1, \end{aligned}$$

тобто $a = \frac{1}{27}$.

2) Імовірність попадання випадкової точки (X, Y) в квадрат Q :

$$\begin{aligned} P[(X, Y) \subset Q] &= \frac{1}{27} \int_1^2 \int_1^2 (x+y) dx dy = \frac{1}{27} \int_1^2 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_1^2 dx = \frac{1}{27} \int_1^2 \left(2x + 2 - x - \frac{1}{2} \right) dx = \\ &= \frac{1}{27} \int_1^2 \left(x + \frac{3}{2} \right) dx = \frac{1}{27} \left[\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} x \right]_1^2 = \frac{1}{27} \left(2 + 3 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \right) = \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

3) Знаходимо математичні сподівання $M(X)$ і $M(Y)$:

$$\begin{aligned} M(X) &= \frac{1}{27} \int_0^3 \int_0^3 x(x+y) dx dy = \frac{1}{27} \int_0^3 \left[x^2 y + \frac{xy^2}{2} \right]_0^3 dy = \frac{1}{27} \int_0^3 \left(3x^2 + \frac{9}{2} x \right) dy = \\ &= \frac{1}{27} \left(x^3 + \frac{9}{4} x^2 \right)_0^3 = \frac{1}{27} \left(27 + \frac{81}{4} \right) = \frac{7}{4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(Y) &= \frac{1}{27} \int_0^3 \int_0^3 y(x+y) dx dy = \frac{1}{27} \int_0^3 \left[\frac{yx^2}{2} + y^2 x \right]_0^3 dy = \frac{1}{27} \int_0^3 \left(\frac{9}{2} y + 3y^2 \right) dy = \\ &= \frac{1}{27} \left(\frac{9}{4} y^2 + y^3 \right)_0^3 = \frac{1}{27} \left(\frac{81}{4} + 27 \right) = \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

Бачимо, що $M(X) = M(Y)$.

4) Щоб знайти $\sigma(X)$ і $\sigma(Y)$, спочатку знайдемо дисперсії $D(X)$ і $D(Y)$:

$$\begin{aligned} D(X) &= \frac{1}{27} \int_0^3 \int_0^3 \left(x - \frac{7}{4} \right)^2 (x+y) dx dy = \frac{1}{27} \int_0^3 \int_0^3 \left(x - \frac{7}{4} \right)^2 \left(x - \frac{7}{4} + y + \frac{7}{4} \right) dx dy = \\ &= \frac{1}{27} \int_0^3 \int_0^3 \left(x - \frac{7}{4} \right)^3 dx dy + \frac{1}{27} \int_0^3 \int_0^3 \left(x - \frac{7}{4} \right)^2 \left(y + \frac{7}{4} \right) dx dy = \frac{1}{27} \int_0^3 \left(x - \frac{7}{4} \right)^3 \cdot y \Big|_0^3 dx + \\ &+ \frac{1}{27 \cdot 2} \int_0^3 \left(x - \frac{7}{4} \right)^2 \cdot \left(y + \frac{7}{4} \right)^2 \Big|_0^3 dx = \frac{1}{9} \frac{\left(x - \frac{7}{4} \right)^4}{4} \Big|_0^3 + \frac{1}{27 \cdot 2} \cdot \frac{1}{3} \left(x - \frac{7}{4} \right)^3 \cdot \left(\frac{361}{16} - \frac{49}{16} \right) \Big|_0^3 = \frac{11}{16}. \end{aligned}$$

Відповідно, і $D(Y) = \frac{11}{16}$.

Отже, маємо середні квадратичні відхилення $\sigma(X) = \sigma(Y) = \sqrt{D(X)} = \frac{\sqrt{11}}{4}$.

6.4.5 Умовні закони розподілу неперервних випадкових величин

Як і в системі двох дискретних випадкових величин, у системі двох неперервних випадкових величин розглядаються умовні закони розподілу.

Можна записати

$$F(x) = F(x, \infty) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy; \quad F(y) = F(\infty, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy. \quad (6.53)$$

Звідси

$$f(x) = F'(x) = \left(\int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \right) dx \right)'_x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy; \quad (6.54)$$

$$f(y) = F'(y) = \left(\int_{-\infty}^y \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \right) dy \right)'_y = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx. \quad (6.55)$$

Умовні закони розподілу для неперервних випадкових величин X і Y , що утворюють систему (X, Y) , визначаються умовними густинами ймовірностей

$f(x/y), f(y/x)$:

$$f(x/y) = \frac{f(x, y)}{f(y)} = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx}; \quad f(y/x) = \frac{f(x, y)}{f(x)} = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy}. \quad (6.56)$$

Із (6.56) дістаємо

$$f(x, y) = f(x) f(y/x) = f(y) f(x/y). \quad (6.57)$$

Для умовних законів розподілу неперервних випадкових величин умова нормування має такий вигляд:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x/y) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(y/x) dy = 1.$$

Якщо випадкові величини X та Y є незалежними, тоді

$$f(x/y) = f(x), \quad f(y/x) = f(y).$$

У цьому разі (6.57) набуває вигляду:

$$f(x, y) = f(x) f(y).$$

Для незалежних випадкових величин X та Y виконується рівність:

$$F(x, y) = F(x) F(y).$$

Числові характеристики для умовних законів розподілу ймовірностей дорівнюють:

$$M(X/y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x/y) dx; \quad (6.58)$$

$$M(Y/x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y/x) dy; \quad (6.59)$$

$$D(X/y) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x/y) dx - M^2(X/y); \quad (6.60)$$

$$D(Y/x) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(y/x) dy - M^2(Y/x). \quad (6.61)$$

6.5 Елементи математичної статистики

6.5.1. Основні відомості з математичної статистики

Математична статистика – розділ математики, присвячений математичним методам систематизації, обробки і використання статистичних даних для наукових і практичних висновків. При цьому статистичними даними називаються дані про число об'єктів в якій-небудь більш-менш поширеній сукупності, які мають ті або інші ознаки.

Метод дослідження, що спирається на розгляд статистичних даних про ті або інші сукупності об'єктів, називається *статистичним*. Статистичний метод застосовується у різноманітних областях знання. Проте риси статистичного методу в застосуванні до об'єктів різної природи такі своєрідні, що було б безглуздо об'єднувати, наприклад, соціально-

економічну, фізичну статистику і тому подібне в одну науку.

Зв'язок математичної статистики з теорією ймовірностей. Зв'язок математичної статистики з теорією ймовірностей має в різних випадках різний характер. Теорія ймовірностей вивчає не будь-які явища, а явища випадкові і саме «ймовірнісні випадкові», тобто такі, для яких має сенс говорити про відповідні до них розподіли ймовірності. Проте, теорія ймовірності відіграє певну роль і при статистичному вивченні масових явищ будь-якої природи, які можуть не відноситися до категорії ймовірнісних випадкових. Це здійснюється через засновані на теорії ймовірностей теорію вибіркового методу і теорію помилок вимірювань. У цих випадках ймовірнісним закономірностям підпорядковані не самі явища, що вивчаються, а прийоми їх дослідження.

Найважливішу роль відіграє теорія ймовірностей і при статистичному дослідженні ймовірнісних явищ. Тут повною мірою знаходять застосування такі засновані на теорії ймовірності розділи математичної статистики, як теорія статистичної перевірки ймовірнісних гіпотез, теорія статистичної оцінки розподілів ймовірності і входних до них параметрів і так далі. Область же застосування цих глибших статистичних методів значно вужча, оскільки тут потрібно, щоб самі явища, що вивчаються, були підпорядковані достатньо визначеним ймовірнісним закономірностям. Проте застосування тієї ж теорії до аналізу економічних тимчасових рядів може призвести до грубих помилок з огляду на те, що входить у визначення стаціонарного процесу. Припущення наявності незмінних розподілів ймовірності, що зберігаються протягом тривалого часу, в цьому випадку, як правило, абсолютно неприйнятно.

6.5.2. Генеральна та вибірка сукупності

Вихідними поняттями математичної статистики є поняття генеральної сукупності і вибірки.

Під *генеральною сукупністю* розуміють множину всіх реально існуючих або навіть тільки умовно можливих однорідних об'єктів, які вивчають під кутом зору їхнього розподілу за деякою ознакою. Наприклад, це можуть бути множини людей за віком, множини тварин певного виду за вагою, множини виробів певного найменування за якістю і т. ін. Тобто *генеральною сукупністю* називається сукупність всіх однорідних об'єктів, з яких проводиться вибірка.

Вибірковою сукупністю (або *вибіркою*) називається сукупність випадково відібраних однорідних об'єктів. Для того щоб за вибіркою можна було судити про властивості генеральної сукупності, вибірка має бути репрезентативною.

Вибірка називається *репрезентативною* (представницькою), якщо у вибірці присутні всі випадково відібрані однорідні об'єкти в тих самих

пропорціях, що й у генеральній сукупності.

Оскільки практично будь-яка ознака генеральної сукупності допускає кількісну оцінку, то замість того, щоб говорити про розподіл одиниць сукупності за ознакою, можна говорити про розподіл деякої випадкової величини X . Експеримент, з яким пов'язана випадкова величина X , полягає у обранні одного представника даної сукупності, а значення x , якого набуває X , є значенням ознаки для цього представника.

Отже, з теоретико - ймовірнісного погляду *генеральна сукупність* – це випадкова величина $X(\omega)$, задана на просторі елементарних подій Ω . Зрозуміло, що повний опис закону розподілу випадкової величини X можна отримати, з'ясувавши значення ознаки для всіх без винятку представників даної сукупності. В окремих ситуаціях так і роблять: наприклад, дані про розподіл мешканців тієї чи іншої країни щодо статі, віку, освіти і т. д. отримують у результаті загальних переписів населення, які проводяться один раз на кілька десятиліть. Однак такий спосіб суцільного обстеження всієї досліджуваної сукупності пов'язаний із низкою завад. Одна з них – це великий обсяг сукупності. У деяких випадках є ще й завада принципового характеру, яка полягає в тому, що сукупність, яку ми розглядаємо, не існує в готовому вигляді, а є лише визначеною в уяві. Наприклад, якщо нас цікавить розподіл похибки, яку допускає вимірювальний прилад, то досліджувана сукупність становитиме перелік усіх можливих вимірювань, які можна здійснити за допомогою даного приладу. Зрозуміло, що обстежити всі елементи такої сукупності неможливо. В такому випадку кажуть, що генеральна сукупність є нескінченною.

Щоб подолати або обійти вказані труднощі, найчастіше чинять так: обстеження всієї сукупності замінюють обстеженням невеликої (до того ж вибраної навмання) її частини. Таку частину генеральної сукупності і називають *вибіркою*.

З теоретико-ймовірнісного погляду, вибірка з даної генеральної сукупності – це результати обмеженого ряду спостережень $x_1, x_2, \dots, x_n$ випадкової величини X . Число n , яке відповідає кількості спостережень, що утворюють вибірку, називають *обсягом вибірки*, а числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ – *елементами* або *варіантами вибірки*.

У статистиці інтерпретація вибірки та її окремих елементів допускає, залежно від контексту, два різних варіанти.

У першому (практичному) варіанті інтерпретації під $x_1, x_2, \dots, x_n$ розуміють фактично спостережувані в даному конкретному n -кратному експерименті значення досліджуваної випадкової величини X , тобто конкретні числа.

Згідно з другим (теоретичним) варіантом інтерпретації під вибіркою $x_1, x_2, \dots, x_n$ розуміють послідовність випадкових величин, i -тий член якої лише означає результат спостереження, який ми могли б отримати на i -му

кроці

n -кратного експерименту, пов'язаного із спостереженням досліджуваної випадкової величини X .

Якщо умови експерименту не змінюються від спостереження до спостереження і якщо n -кратний експеримент організований у такий спосіб, що результати спостереження на кожному (i -му) кроці ніяк не залежать від попередніх і не впливають на майбутні результати спостережень, то очевидно, що ймовірнісні закономірності поведінки i -го спостереження теоретичної вибірки залишаються одними і тими ж для всіх $i=1, 2, \dots, n$ і цілковито визначаються законом розподілу ймовірностей спостережуваної випадкової величини, тобто

$$P \{x_i < x\} = P \{X < x\} = F(x) .$$

При цьому із взаємної незалежності спостережень вибірки впливає незалежність випадкових величин $x_1, x_2, \dots, x_n$. Якщо в межах теоретичного варіанту інтерпретації вибірки ряд спостережень $x_1, x_2, \dots, x_n$ утворює послідовність незалежних і однаково розподілених випадкових величин, то вибірка називається *випадковою*. Надалі, використовуючи теоретичний варіант інтерпретації вибірки, завжди будемо вважати, що ця вибірка є випадковою.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления Т.1,2 – М.: «Наука», 1978.
2. М.І. Шкіль, Т.В.Колесник, „Вища математика у трьох книгах”. Київ, „Либідь”, 1994, 720 с
3. Г.Л. Кулініч, Л.О. Максименко „Вища математика в 2-х книгах”. Київ, „Либідь”, 1994, 554 с.
4. Кулініч Г.Л., Таран Є.Ю., Бурим В.М. та ін. Вища математика. Спеціальні розділи. Кн. 1, 2. – К.: Либідь, 2003.
5. Овчинников П.Ф., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика. Ч.1,2. – К.: Техніка, 2000.
6. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высш. шк., 1977.
7. Гнеденко В. В. Курс теории вероятностей. — М.: Наука, 1965.
8. Фукс Б.А., Шабат Б.В., Функции комплексного переменного и некоторые их приложения, «Наука», 1964.
9. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Т.1,2 – М.: «Высшая школа», 1986.
10. Сборник задач по математике. Под ред. Ефимова А.В., Демидовича Б.П. ,Т.1,2 – М. «Наука», 1986.
11. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М. «Наука», 1972.
12. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 2001.