

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет природоохоронний  
Кафедра загальної та теоретичної фізики

**Бакалаврська кваліфікаційна робота**

на тему: Фракційні моделі дифузійних процесів у довкіллі

Виконала студентка 4 року навчання  
групи ПЕ-44 (радіо)  
Напряму підготовки 6.040106  
«Екологія, охорона навколишнього  
середовища та збалансоване  
природокористування»  
Шеховцева Єлизавета Олексіївна

Керівник д.ф.-м. н., професор  
Герасимов Олег Іванович

Рецензент к.ф.-м.н. доц.  
Худинцев Миколай Миколайович

Одеса 2019

## МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ

## ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет \_\_\_\_природоохоронний\_\_\_\_  
 Кафедра \_\_\_\_загальної та теоретичної фізики\_\_\_\_  
 Рівень вищої освіти бакалавр  
 Спеціальність \_\_\_\_ Напрямок підготовки 6.040106 «Екологія, охорона  
 навколишнього середовища та збалансоване природокористування»\_\_\_\_  
 (шифр і назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри загальної та  
 теоретичної фізики, професор Герасимов О.І.

“18” \_\_\_\_травня\_\_\_\_2019\_\_року

## З А В Д А Н Н Я

## НА БАКАЛАВРСЬКУ КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТУ

\_\_\_\_Шеховцевій Єлизаветі Олексіївні\_\_\_\_  
 (прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Фракційні моделі дифузійних процесів у довкіллі

керівник роботи Герасимов Олег Іванович д.ф-м.н, проф.  
 ( прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом закладу вищої освіти від “\_7\_” \_\_грудня\_\_2018\_\_ року  
 №\_343 – «С»\_\_

2.Строк подання студентом роботи\_\_08.06.2019р.\_\_\_\_

3. Вихідні дані до роботи\_\_\_\_

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)

1.Моделювання процесів та розв'язки рівнянь дифузії, які описують міграційні процеси у довкіллі (дифузія на необмеженої осі, на півосі, на відрітку прямої в одновимірному випадку і т.д.). 2. Опис фракційної кінетики, порівняльний аналіз розв'язків дифузійних рівнянь .які сформульовані в евклідовський і фракційних формах. 3. Формулювання та розв'язок задачі дифузії у фракціонному середовищі в термінах мероморфної функції( Міттаг – Леффлера).4.Розбудова ґраткової моделі дифузійних процесів та аналіз можливості її застосувань в задачах проміграційні процеси у довкіллі

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень)  
 Рис 1.1., 1.2. – Графіки автотомельних розв'язків у послідовні моменти часу.

Рис. 2.1. Графік функції  $G(\xi, \tau)$  для різних значень аргументів. Рис. 3.1—  
Графіки спеціальних функцій  $Q_\beta(z)$  для різних значень індексів  $\beta=0,65 - 0,95$

#### 6. Консультанти розділів роботи

| Розділ | Прізвище, ініціали та посада консультанта | Підпис, дата   |                  |
|--------|-------------------------------------------|----------------|------------------|
|        |                                           | завдання видав | завдання прийняв |
|        | Немає                                     |                |                  |
|        |                                           |                |                  |
|        |                                           |                |                  |
|        |                                           |                |                  |

7. Дата видачі завдання \_\_\_\_\_ 18.04.2019 р. \_\_\_\_\_

### КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

| № з/п    | Назва етапів кваліфікаційної роботи                                                                                                                         | Термін виконання етапів роботи | Оцінка виконання етапу |                       |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|------------------------|-----------------------|
|          |                                                                                                                                                             |                                | у %                    | за 4-х бальною шкалою |
| <b>1</b> | Огляд базових літературних джерел за темою дипломного проекту                                                                                               | 18.04.19 –                     | <b>85</b>              | <b>4</b>              |
|          |                                                                                                                                                             | 29.04.19                       |                        |                       |
| <b>2</b> | Узагальнення основних теоретичних положень проекту                                                                                                          | 30.04.19 -                     | <b>80</b>              | <b>4</b>              |
|          |                                                                                                                                                             | 12.05.19                       |                        |                       |
| <b>3</b> | Рубіжна атестація                                                                                                                                           | 13.05.19-                      | <b>83</b>              | <b>4</b>              |
|          |                                                                                                                                                             | 19.05.19                       |                        |                       |
| <b>4</b> | Узагальнення отриманих результатів. Оформлення електронної версії роботи. Перевірка на плагіат. Складання протоколу та авторського договору                 | 27.05.19 -                     | <b>85</b>              | <b>4</b>              |
|          |                                                                                                                                                             | 04.06.19                       |                        |                       |
| <b>5</b> | Підготовка паперової версії і презентаційного матеріалу до процедури предзахисту. Внесення коректив. Рецензування роботи. Підготовка до публічного захисту. | 05.06.19                       | <b>87</b>              | <b>4</b>              |
|          |                                                                                                                                                             | 08.06.19                       |                        |                       |
|          | <b>Інтегральна оцінка виконання етапів календарного плану (як середня по етапам)</b>                                                                        |                                | <b>85,0</b>            | <b>4</b>              |

Студент \_\_\_\_\_ **Шеховцева Є. О.**  
(підпис) (прізвище та ініціали)

Керівник роботи \_\_\_\_\_ **Герасимов О.І.**  
(підпис) (прізвище та ініціали)

## АНОТАЦІЯ

### «Фракційні моделі дифузійних процесів у довкіллі»

Мета кваліфікаційної бакалаврської роботи – є опис складених і зокрема фракційних моделей дифузійних процесів у довкіллі.

Задачею бакалаврської кваліфікаційної роботи є:

- Проаналізування моделей та типів дифузійної кінетики;
- детальна характеристика ґраткової моделі переносу у складених матрицях;
- визначення фрактальної розмірності деяких типових фізичних об'єктів навколишнього середовища і їх зв'язок з енергетичними характеристиками систем;
- надання порівняльної характеристики пористому та суцільному середовищам.

**Ключові слова:** фрактали, дифузія, пористе середовище, фракційна кінетика, функція Міттаг-Леффльора, суцільне середовище .

Науковий керівник: д.ф-м.н, проф. Герасимов О.І.

Робота містить:

Сторінок – 43;

Рисунків – 3;

Літературних посилань – 20.

## ЗМІСТ

|                                                                                                                |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| ВСТУП.....                                                                                                     | 6  |
| 1 ТИПИ ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ, ВІДПОВІДНІ МОДЕЛІ ТА КЕРУЮЧІ<br>РІВНЯННЯ ТА ЇХНІ РОЗВ'ЯЗКИ.....                    | 8  |
| 1.1 Дифузія на необмеженій осі.....                                                                            | 10 |
| 1.2 Дифузія на півосі.....                                                                                     | 11 |
| 1.3 Дифузія на відрізку прямої в одновимірному випадку.....                                                    | 14 |
| 1.4 Дифузія в паралельних каналах.....                                                                         | 17 |
| 1.5 Дифузія при послідовній морфології каналів.....                                                            | 20 |
| 1.6 Рішення диференціальних похідних за допомогою задач Коші.....                                              | 23 |
| 2 ФРАКЦІЙНА КІНЕТИКА У НАВКОЛИШНЬОМУ СЕРЕДОВИЩІ.....                                                           | 27 |
| 2.1 Загальні характеристики фрактальних множин та об'єктів.....                                                | 27 |
| 2.2 Поняття розмірності фракталів.....                                                                         | 28 |
| 2.3 Порівняльний аналіз розв'язків дифузійних рівнянь в евклідовській<br>і фракційній формах.....              | 30 |
| 3 РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ДИФУЗІЇ У ФРАКЦІОННОМУ СЕРЕДОВИЩІ В<br>ТЕРМІНАХ МЕРОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ( МІТТАГ-ЛЕФФЛЕРА) ..... | 33 |
| 3.1 Розв'язок рівняння аномальної дифузії у фракційному середовищі<br>за допомогою метода функцій Гріна.....   | 33 |
| 3.2 Розв'язок біофраційного рівняння дифузії .....                                                             | 35 |
| ВИСНОВКИ.....                                                                                                  | 41 |
| ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ.....                                                                                          | 42 |

## ВСТУП

Процеси, які відбуваються у навколишньому середовищі, або ж супроводжують технології маніпулювання складовими елементами, при намаганні їхнього послідовного моделювання та наступної параметризації у багатьох випадках вимагають застосування методів неевклідовського аналізу. Такі наприклад процеси, як міграція домішкових елементів у пористих середовищах (грунтах), чи еволюційна динаміка зондів у складних системах в задачах моніторингу систем довкілля, строго кажучи, мають спиратися саме на апарат, що складається з методів неевклідовського аналізу. Задачі адекватного захисту систем довкілля для їхнього коректного розв'язку мають спиратися на адекватні моделі процесів, що супроводжують взаємодію зондів та екранів безпосередньо із матеріалами та системами. З другого боку, розвиток сучасної фізики (як теоретичної, так і експериментальної) привів до базового уявлення про властивості множин, що володіють нецілою розмірністю. Фрактали, як приклади множин, що володіють так званої канторовою мірою, перетворилися на звичайний елемент математичного аналізу.

За традицією основою інтуїтивного розуміння геометрії природи служили евклідові прямі, кола, з яких будували простір з чисельною розмірністю. Однак класичний набір геометричних фігур: прямих, кіл і тому подібних, стає придатним для опису довжини річок, периметра озер, форми хмар і ще величезної кількості інших природних об'єктів. Але для опису об'єктів, яких об'єднує назва – фрактал, тобто об'єкт дробової розмірності, необхідне введення не цілочисельних, а дрібнорозмірних просторів.

Метою кваліфікаційної роботи є опис складених і зокрема фракційних моделей дифузійних процесів у довкіллі. Проаналізовані моделі та типи дифузійної кінетики та детально розглянута ґраткова модель переносу у складених матрицях. Були визначені фрактальні розмірності деяких типових

фізичних об'єктів навколишнього середовища і їх зв'язок з енергетичними характеристиками систем, при цьому виявлені закономірності, відмінні від висновків звичайної моделі дифузії. Для розв'язків рівняння аномальної дифузії у фракційному середовищі зокрема, був застосований метод функції Гріна. За допомогою цього методу була розв'язана відповідна задача Коші. На цьому шляху показано, що для опису міграції домішкових частинок у дрібно-розмірній фракційній матриці раціонально використовувати мероморфні функції типу Міттаг-Леффльора.

# 1 ТИПИ ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ, ВІДПОВІДНІ МОДЕЛІ ТА КЕРУЮЧІ РІВНЯННЯ ТА ЇХНІ РОЗВ'ЯЗКИ

Дифузія – процес вирівнювання концентрації домішкових часток в середовищі (газі, рідині, твердому тілі). У деяких ситуаціях буває, що одна з речовин уже має вирівняну концентрацію, і говорять про дифузію, як про одну речовину в іншій. При цьому зазвичай перенесення речовини відбувається із області з високою концентрацією в область з низькою концентрацією (вздовж вектора градієнта концентрації).

Прикладом дифузії може служити перемішування газів (наприклад, поширення запахів) або рідин (якщо у воду капнути чорнила, то рідина через деякий час стане рівномірно пофарбованою). Інший приклад пов'язаний з твердим тілом: атоми дотичних металів перемішуються на кордоні дотику. Важливу роль дифузія частинок грає у фізиці плазми [1].

Зазвичай, під дифузією розуміють процеси, що супроводжуються переносом речовини, однак іноді дифузійними називають також інші процеси перенесення: теплопровідність, в'язке тертя тощо.

З рівняння неперервності (яке можна розуміти як закон збереження кількості частинок) можна вивести рівняння дифузії:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div} j = 0 \quad (1.1)$$

а використавши вираз для густини потоку, можна отримати феноменологічне рівняння дифузії:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \text{div} D \nabla n \quad (1.2)$$

що у випадку незмінного  $D$  перетворюється на другий закон Фіка:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \Delta n \quad (1.3)$$

де  $\Delta = \text{div} \nabla$  - оператор Лапласа

У більш загальному випадку систем часток, які взаємодіють між собою рівняння дифузії записується у вигляді:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \text{div}(Dn\nabla\mu) + f(x,t) \quad (1.4)$$

де  $\mu$  — хімічний потенціал а  $f$  — інтенсивність джерел речовини. Це рівняння виражає той факт, що умовою рівноваги за складом є рівність хімічного потенціалу у всій термодинамічній системі, а вирівнювання концентрації — це лише частковий випадок для однорідних систем, близьких до ідеального газу.

У найпростішому випадку розглядається одновимірна система з початковою концентрацією заданою дельта-функцією, що відповідає одноразовому миттєвому внесенню речовини у середовище (наприклад, крапля чорнил, що потрапляє всередину трубки з водою).

$$n(r,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \quad (1.5)$$

У випадку довільної початкової функції  $\phi(x)$ :

$$n(r,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,t) \phi(\xi) d\xi \quad (1.6)$$

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} \quad (1.7)$$

Таке рівняння називається фундаментальним розв'язком рівняння дифузії при заданих початкових умовах [2].

Найбільш складні випадки включають коефіцієнт дифузії, що залежить від часу, температури або концентрації речовини, змінну геометрію середовища, хімічні реакції між речовиною і середовищем, тощо. З математичної точки зору, рівняння дифузії є частковим випадком рівняння Нав'є — Стокса. Також, у загальному вигляді, вони є аналогічними рівнянням теплопровідності.

## 1.1 Дифузія на необмеженої осі

Як і кожне диференціальне рівняння, рівняння дифузії має нескінченну кількість розв'язків. Для того, щоб отримати один певний розв'язок, необхідно задати додаткові умови

Наприклад, розподіл концентрації буде різним в залежності від початкового розподілу, заданого для певного моменту часу  $t_0$ .

Усі зміни, які відбуваються з концентрацією після  $t_0$ , підпорядковуються рівнянню (із коефіцієнтами, які виражені через параметри системи, й неоднорідним членом, який описує вплив джерел) та крайовим умовам [3].

Проблема визначенням класу функції, які описують задані процеси за допомогою конкретних початкових умов носить назву задачі Коші. Запишемо рівняння дифузії в одновимірному випадку, яке має наступний вигляд:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad (1.8)$$

та яке задовольняє початковій умові:

$$C|_{t=t_0} = C_0(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (1.9)$$

Унаслідок лінійності рівняння дифузії розв'язок  $C(x,t)$  залежить від початкової умови  $C_0(x)$  за лінійним законом. Тому, при побудові розв'язку можна скористатися загальним методом, який базується на побудові функції впливу (функції Гріна). Для цього позначимо через  $G(x,t;\xi,t_0)$  розв'язок рівняння (1.8) при початковій умові  $C|_{t=t_0} = \delta(x-\xi)$ . Функція Гріна описує сумарну одиничну масу частинок, яка в момент часу  $t=t_0$  була сконцентрована в точці  $x=\xi$ . Тому при  $t_0=0$ ,  $\xi=0$  вираз для неї має вигляд:

$$G(x,t;0,0) = C(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-x^2/4Dt}. \quad (1.10)$$

При довільних  $t_0$  і  $\xi$  можна отримати вираз за допомогою додаткового зсуву по  $t$  і  $x$ , що допустимо внаслідок однорідності в часі та просторі системи, яка розглядається при:

$$G(x, t; \xi, t_0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D(t-t_0)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4D(t-t_0)}}. \quad (1.11)$$

Знання функції Гріна дозволяє записати розв'язок при довільній початковій умові (1.9):

$$C(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, t; \xi, t_0) C_0(\xi) d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\pi D(t-t_0)}} \int_{-\infty}^{+\infty} C_0(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4D(t-t_0)}} d\xi. \quad (1.12)$$

Формула (1.12) надає можливість в окремих випадках отримувати розв'язки розглянутої задачі.

Розглянемо асимптотичну поведінку отриманого розв'язку при  $t \rightarrow \infty$ . Виділимо в правій частині множник, який не залежить від  $\xi$ :

$$C(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D(t-t_0)}} e^{-\frac{x^2}{4D(t-t_0)}} \int_{-\infty}^{+\infty} C_0(\xi) e^{-\frac{(2x\xi - \xi^2)}{4D(t-t_0)}} d\xi. \quad (1.13)$$

При  $t \rightarrow \infty$  експонента під знаком інтеграла залишається кінцевою і прямує до 1. Значення всього інтегралу прямує до  $\int C_0(\xi) d\xi = M$ , тобто до загальної маси частинок, дифузія яких розглядається.

Таким чином, внаслідок (1.13) розв'язок має асимптотичний вигляд:

$$C(x, t) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi D(t-t_0)}} e^{-\frac{x^2}{4D(t-t_0)}} = MG(x, t; 0, t_0) \quad (1.14)$$

Отримано автотомодельний розв'язок, оскільки початковий розподіл частинок стає несуттєвим через достатньо великий проміжок часу. Суттєвою залишається тільки сумарна маса частинок [4].

## 1.2 Дифузія на півосі

Дифузія на півосі здійснюється, коли частинки блукають вздовж половини осі. В цьому випадку закон, за яким змінюється концентрація залежить не

тільки від початкового розподілу частинок, але й від граничної умови в цій точці:

1. Вважаємо, що частинки, які потрапили в точку  $x=0$ , назавжди покидають вісь. При такому припущенні, концентрація частинок повинна задовольняти рівнянню дифузії:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (1.15)$$

та граничній умові першого роду:

$$C|_{x=0} = 0. \quad (1.16)$$

З рівняння дифузії та граничної умови випливає, що кількість частинок системи не буде залишатися постійною, як у попередньому випадку, а буде безперервно зменшуватися:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} C(x,t) dx = \int_0^{\infty} \frac{\partial C}{\partial t} dx = \int_0^{\infty} D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} dx = D \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_0^{\infty} = 0 - D \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad (1.17)$$

та оскільки  $C|_{x=0} = 0$ , а  $C|_{x>0} > 0$ , то  $\frac{\partial C}{\partial x} \Big|_{x=0} \geq 0$ , а  $\frac{dM}{dt} < 0$ .

Рівність (1.17) є балансом кількості частинок у системі.

Другий тип граничної умови для рівняння дифузії відповідає випадку, коли частинки не можуть проникнути крізь кінець (точку  $x=0$ ). Тоді потік маси в точці  $x=0$  буде дорівнювати нулю, тобто:

$$\frac{\partial C}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0. \quad (1.18)$$

Рішення (1.18) є граничною умовою другого роду [5].

Тоді функція Гріна для розглянутої задачі на півосі  $0 \leq x \leq \infty$  з граничною умовою (1.18) і довільним початковим розподілом має вид:

$$G_1(x,t;\xi,t_0) = G(x,t;\xi,t_0) + G(x,t;-\xi,t_0). \quad (1.19)$$

Аналогічно можна записати розв'язок задачі при заданій початковій умові  $C|_{t=t_0} = C_0(x)$ .

$$C(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D(t-t_0)}} \int_0^{\pm\infty} \left( e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4D(t-t_0)}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4D(t-t_0)}} \right) C_0(\xi) d\xi. \quad (1.20)$$

Представимо інтеграл (1.20) через інтеграл ймовірностей:

$$\Phi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x e^{-s^2/2} ds. \quad (1.21)$$

Після застосування (1.21) отримуємо:

$$\begin{aligned} c(x, t) &= \frac{C_0}{2\sqrt{\pi D(t-t_0)}} \left( \int_0^{\pm\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4D(t-t_0)}} d\xi - \int_0^{\pm\infty} e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4D(t-t_0)}} d\xi \right) = \\ &= \left[ \begin{array}{l} s = \frac{x \mp \xi}{\sqrt{2D(t-t_0)}}; \\ ds = \mp \frac{d\xi}{\sqrt{2D(t-t_0)}}; \\ d\xi = \mp \sqrt{2D(t-t_0)} ds; \\ \xi = 0; s = \frac{x}{\sqrt{2D(t-t_0)}}; \\ \xi = \pm\infty; s = \mp\infty. \end{array} \right] = -\frac{C_0}{2\sqrt{\pi D(t-t_0)}} \cdot \sqrt{2D(t-t_0)} \left[ \int_{x/\sqrt{2D(t-t_0)}}^{-\infty} e^{-s^2/2} ds + \int_{x/\sqrt{2D(t-t_0)}}^{\infty} e^{-s^2/2} ds \right] = \\ &= -\frac{C_0}{\sqrt{2\pi}} \left[ -\int_0^{\infty} e^{-s^2/2} ds - \int_0^{x/\sqrt{2D(t-t_0)}} e^{-s^2/2} ds + \int_0^{\infty} e^{-s^2/2} ds - \int_0^{x/\sqrt{2D(t-t_0)}} e^{-s^2/2} ds \right] = \\ &= C_0 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{x/\sqrt{2D(t-t_0)}} e^{-s^2/2} ds = C_0 \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2D(t-t_0)}}\right) \end{aligned} \quad (1.22)$$

Отримали розв'язок носить чітко виражений авто модельний характер, графіки якого у послідовні моменти часу зображені на Рис.1.2.

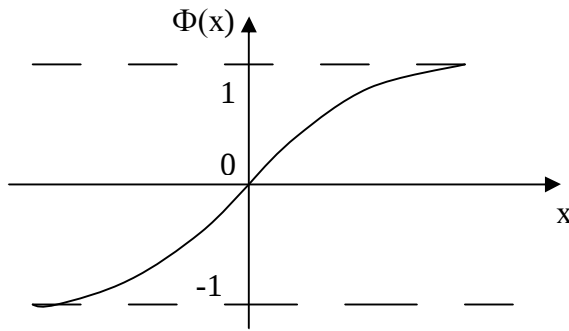


Рис. 1.1.

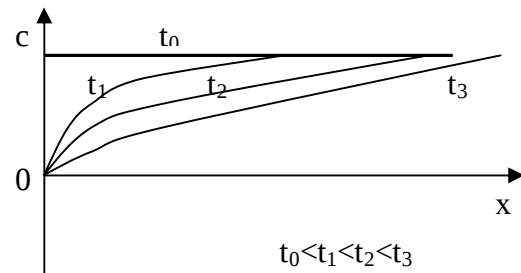


Рис. 1.2.

Рис 1.1., 1.2. – Графіки автомодельного розв’язку у послідовні моменти часу.

Розв’язок такого типу, продовжений у непарний спосіб, описує асимптотичну поведінку характеризуючої функції  $c$  при будь-якій початковій концентрації, яка має точку кінцевого розриву  $x_p$ . При таких малих  $t - t_0$ , у яких асимптотично далекі значення початкової концентрації не встигли вплинути на концентрацію в околі точки  $x_p$  [2].

Можна розглянути так би мовити випадок „проникнення”, коли частинки можуть виходити з півосі  $0 \leq x \leq \infty$  крізь граничну точку  $x = 0$ , після чого зникають (концентрація занурюється до нуля).

В цьому випадку з формули для потоку маси маємо так звану граничну умову третього роду:

$$D \left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{x=0} = bC|_{x=0}, \quad (1.23)$$

де  $b$ - коефіцієнт пропорційності.

Гранична умова (1.23) поглинає в собі умови як першого (при  $b \rightarrow \infty$ ), так і другого (при  $b \rightarrow 0$ ) роду.

### 1.3 Дифузія на відрізку прямої в одновимірному випадку

Розглянемо випадок міграції частинок вздовж відрізка прямої  $0 \leq x \leq l$ . При цьому будемо вважати, що виконуються завдані граничні умови на кожному з кінців цього відрізка. Беремо випадок, коли обидві ці умови 1-го роду:

$$C|_{x=0} = 0 \quad \text{та} \quad C|_{x=l} = 0, \quad (1.24)$$

тобто, через обидва кінця, частинки можуть вільно залишати діючий відрізок. Функцію впливу для побудови рішення з детерміновано - заданими початковими умовами можна побудувати користуючись методом відображення. Для цього, необхідно відобразити джерело, яке розташоване у точці  $\xi$  (тобто відокремлено від кінців відрізка) [6].

Тобто перетворення відбувається за схемою:

$$G(x, t; \xi, t_0) - G(x, t; -\xi, t_0) - G(x, t; 2l - \xi, t_0) \quad (1.25)$$

Тепер в точці  $x = 0$  вплив джерела в  $\xi$  і в  $-\xi$  взаємно знищуються, але виникає вплив джерела в  $2l - \xi$ . Відобразимо його відносно точки  $x = 0$ , одночасно змінивши знак. Аналогічно треба відобразити джерело в  $-\xi$  від точки  $l$ . На цьому шляху отримуємо вираз для функції впливу:

$$\begin{aligned} G(x, t; \xi, t_0) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} [G(x, t; 2jl + \xi, 0) - G(x, t; 2jl - \xi, 0)] = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi x t}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[ e^{-(-x-2jl-\xi)^2/4xt} - e^{-(-x-2jl+\xi)^2/4xt} \right] \end{aligned} \quad (1.26)$$

За допомогою виразу (1.26) закон щільності, при заданому її початковому розподілі  $C_0(x)$ , можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} C(x, t) &= \int_0^L G(x, t; \xi, t_0) p_0(\xi) d\xi = \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_0^L G(x, t; 2jl + \xi, 0) - G(x, t; 2jl - \xi, 0) C_0(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (1.27)$$

Це рішення можна переписати в іншому вигляді, якщо непарним чином продовжити функцію  $C_0(x)$  через точку  $x = 0$ , а потім з відрізка  $l \leq x \leq l$  на всю вісь  $x$  як  $2l$  (як періодичну функцію). Продовжену функцію будемо позначати, як  $C_0(x)$ . Так як:

$$\begin{aligned} \int_0^l G(x, t; 2jl + \xi, 0) \rho_0(\xi) d\xi &= \int_{2jl}^{(2j+1)l} G(x, t; \xi, 0) \rho_0(\xi) d\xi \\ - \int_0^l G(x, t; 2jl - \xi, 0) \rho_0(\xi) d\xi &= - \int_{2jl}^{(2j-1)l} G(x, t; \xi, 0) \rho_0(\xi) d\xi = \int_{(2j-1)l}^{2jl} G(x, t; \xi, 0) \rho_0(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (1.28)$$

То від (1.26) отримуємо вираз:

$$c(x, t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{il}^{(i+1)l} G(x, t; \xi, 0) c_0(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, t; \xi, 0) c_0(\xi) d\xi \quad (1.27)$$

Отриманий вираз більш адекватний процесам, які протікають на малих часах  $t$ , так як, різні члени в сумі мають різний порядок малості: один з них (з  $i=0$ ) є головним, один із сусідніх (в залежності від значення  $x$ ) - надає поправку до нього і т. ін. Наближена формула для щільності, придатна для малих значень  $t$  має вигляд:

$$c(x, t) = \int_0^l G(x, t; \xi, 0) c_0(\xi) d\xi \quad (1.28)$$

де під  $c_0(x)$  розуміється початкова щільність. Якщо, наприклад, скористатися ступеневим розподілом:

$$c_0(x) = \begin{cases} c_0(x) & (0 \leq x \leq l), \\ 0 & (-\infty < x < 0, l < x < \infty), \end{cases} \quad (1.29)$$

то наближення (1.28) можна переписати у вигляді:

$$c(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, t; \xi, 0) \tilde{c}_0(\xi) d\xi \quad (1.30)$$

Сенс цього наближення полягає в тому, що при його застосуванні вплив процесів, які відбуваються на границях відрізка не враховується. Якщо  $x$  близький до  $0$ ,  $l$ , або якщо  $c_0(x)$  лінійна, то функція дає неправильний результат і головний член розкладу (1.27) повинен бути доповнений наступними внесками.

Розглянемо тепер закон зміни сумарної маси  $M$  частинок при малих  $t$ . Користуючись (1.28), маємо:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_0^l dx \int_0^l G(x, t; \xi, 0) c_0(\xi) d\xi = \int_0^l dx \int_0^l \frac{\partial G}{\partial t} c_0(\xi) d\xi \quad (1.31)$$

Так як, функція  $G$  задовольняє рівнянням дифузії (1.29), то, змінюючи порядок інтегрування, отримуємо:

$$\frac{dM}{dt} = x \int_0^l c_0(\xi) d\xi \int_0^l \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = x \int_0^l [G'_x(l, t, \xi, 0) - G'_x(0, t, \xi, 0)] c_0(\xi) d\xi \quad (1.32)$$

Для  $G$  отримуємо, що  $G'_x = G_\xi$ , звідки, інтегруючи по частинах, знаходимо:

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} = & -x[G(l, t, l, 0) - G(0, t, l, 0)]c_0(l) + x[G(l, t, 0, 0) - G(0, t, 0, 0)]c_0(0) + \\ & + x \int_0^l [G(l, t, \xi, 0) - G(0, t, \xi, 0)]c'_0(\xi) d\xi = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{\pi t}} [c_0(0) + c_0(l)] + \dots, \end{aligned} \quad (1.33)$$

де виключені члени вищого порядку малості.

При малих  $t$  отримуємо:

$$\frac{dM}{dt} = -\sqrt{\frac{x}{\pi t}} [c_0(0) + c_0(l)], \quad (1.34)$$

звідки, інтегруючи, приходимо до формули:

$$M(t) = M(0) - 2\sqrt{\frac{x}{\pi}} [c_0(0) + c_0(l)]\sqrt{t}, \quad (1.35)$$

справедливої із точністю до членів нижчого порядку малості [7].

#### 1.4 Дифузія в паралельних каналах

Модель дифузії в паралельних каналах представляє собою механізм дифузії домішок, яка реалізується в пористих шарових системах. Прошарки речовин в таких системах розташовані всюди паралельно напрямку головного струму. Така композиція може бути притаманна середовищам з постійно неоднорідною структурою, які пронизують всю товщу зразка. Якщо всі вони являють собою взаємонезалежні та взаємо переплетені сітки каналів по яким можливо здійснювати незалежну міграцію гамма-радіонуклідів.

Механізм звичайної паралельної дифузії зустрічається також в режимі газопроникності мембран змінної товщини для гранульованих матеріалів [8]. Коли частинка зонду цього матеріалу, що потрапила в один з транспортних каналів, не може перейти в інший канал, то кінетика встановлення потоку газу, крізь мембрану може бути представлена сумою елементарних потоків  $J_i$  по кожному з каналів за формулою:

$$J = J_1 + J_2 + \dots = \sum_{i=1}^n J_i \quad (1.36)$$

або

$$S \frac{D_f \Gamma}{L} = \sum_{i=1}^n \frac{D_i \Gamma_i}{l_i} S_i \quad (1.37)$$

де  $S$  площа поверхні  $i$ -тої трубки струму на поверхні мембрани (повна поверхня мембрани  $S = \sum s_i$ ). Зазвичай вважають, що  $l_i = L$ , тоді:

$$P = \sum_{i=1}^n P_i = \sum_{i=1}^n D_i \Gamma_i \Phi_i \quad (1.38)$$

де  $n$  – кількість дифузійних каналів. Розчинність  $\Gamma = \sum \Gamma_i \Phi_i$ .

Нестационарні режими дифузії задовольняють системи рівнянь:

$$\frac{\partial C_1}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} \quad (1.39)$$

$$\frac{\partial C_2}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 C_2}{\partial x^2} \quad (1.40)$$

$$\frac{\partial C_n}{\partial t} = D_n \frac{\partial^2 C_n}{\partial x^2} \quad (1.41)$$

при відповідних початкових та граничних умовах для багатоканальної моделі середовища.

Можна ввести характерний параметр — час запізнення при дифузійному характері проникнення в багатоканальних системах для прошарків:

$$\frac{1}{\tau_{зан}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\tau_{зан\ i}} \quad (1.42)$$

Наприклад, для двохшарового модуля ця величина має вигляд:

$$\tau_{зан} = \frac{L^2}{6(D_1\Phi_1 + D_2\Phi_2)} \quad (1.43)$$

Загальна формула, що надана для визначення параметру  $\tau$  процесу паралельної дифузії має вигляд:

$$\tau_{зан} = \frac{L^2}{6(D_1\Phi_1 + D_2\Phi_2)} \quad (1.44)$$

$$\frac{1}{\tau_{зан}} = \frac{1}{\tau_{зан\ 1}} + \frac{1}{\tau_{зан\ 2}} = \frac{6D_1\Phi_1}{L_1} + \frac{6D_2\Phi_2}{L_2} \quad (1.45)$$

тоді:

$$\frac{1}{\tau_{зан}} = \frac{6D_1\Phi_1 \cdot L_2 + 6D_2\Phi_2 \cdot L_1}{L_1 \cdot L_2} \quad (1.46)$$

а також:

$$\tau_{зан.пар.} = \frac{L_1 \cdot L_2}{6(D_1\Phi_1 \cdot L_2 + 6D_2\Phi_2 \cdot L_1)} \quad (1.47)$$

Можна показати, що цей параметр для 2-х шарового модуля гранульованих матеріалів, у випадку послідовної морфології має вигляд:

$$\tau_{зан} = \frac{\frac{l_1^2}{D_1} \left( \frac{l_1}{6\Gamma_1 D_1} + \frac{l_2}{2\Gamma_2 D_2} \right) + \frac{l_2^2}{D_2} \left( \frac{l_1}{2\Gamma_1 D_1} + \frac{l_2}{6\Gamma_2 D_2} \right)}{\frac{l_1}{\Gamma_1 D_1} + \frac{l_2}{\Gamma_2 D_2}} \quad (1.48)$$

Загальна формула за якою визначається час запізнення при комбінації паралельної та послідовної морфології каналів:

$$\begin{aligned} \tau_{зан.1} + \tau_{зан.2} = \\ = \frac{L_1 + L_2}{6(D_1\Phi_1 L_2 + D_2\Phi_2 L_1)} + \frac{\frac{l_1^2}{D_1} \left( \frac{l_1}{6\Gamma_1 D_1} + \frac{l_2}{2\Gamma_2 D_2} \right) + \frac{l_2^2}{D_2} \left( \frac{l_1}{2\Gamma_1 D_1} + \frac{l_2}{6\Gamma_2 D_2} \right)}{\frac{l_1}{\Gamma_1 D_1} + \frac{l_2}{\Gamma_2 D_2}} \end{aligned} \quad (1.49)$$

### 1.5 Дифузія при послідовній морфології каналів.

Послідовна дифузія зонда реалізується в шаруватих системах. Шари в таких системах розташовані перпендикулярно напрямку основного потоку. Процеси розчинення та дифузії в багатошарових системах можуть бути описані за допомогою закону Генрі (відношення концентрацій на межі шарів дорівнює відношенню констант розчиненості зонда в речовинах суміжних шарів, а на вхідний і вихідний поверхнях шаруватого зразка, виконуються граничні умови 1-го роду). Тому, стаціонарний потік зонда через багатошарову систему, що складається з  $m$  - різних верств, можна буде записати у вигляді:

$$\frac{1}{J_{cm}} = \sum_{n=1}^m \frac{1}{J_i} = \sum_{n=1}^m \frac{l_i}{D_i \Gamma_i} \quad (1.50)$$

де  $\Gamma_i$  і  $D_i$  коефіцієнт Генрі і коефіцієнт дифузії в кожному шарі,  $l_i$  - товщина конкретного шару. Товщина збірної мембрани дорівнює:

$$L = \sum_{i=1}^m l_i \quad (1.51)$$

Константа проникності  $P = J_{cm} = p_0$  пов'язана з парціальними константами проникності шарів співвідношенням:

$$\frac{L}{P} = \frac{l_1}{P_1} + \frac{l_2}{P_2} + \dots \quad (1.52)$$

або

$$\frac{1}{P} = \frac{\sum_{n=1}^m \frac{l_i}{P_i}}{L} \quad (1.53)$$

а константа розчинності:

$$\Gamma = \frac{\sum_{n=1}^m l_i \Gamma_i}{\sum_{n=1}^m l} \quad (1.54)$$

Для опису процесу нестационарної проникності зонда через шарувату мембрану необхідно записати рішення системи рівняння:

$$D_i \frac{\partial C_i}{\partial x^2} = \frac{\partial C_i}{\partial t} \quad (1.55)$$

при звичайних умовах, наприклад, методу газопроникності  $C_i(x, t = 0) = 0$  при  $l_{i-1} \leq x \leq l_m$ :

$$D_i \frac{\partial C_i(t)}{\partial x^2} = D_{i+1} \frac{\partial C_{i+1}(t)}{\partial x}, \quad x = l_i; \quad (1.56)$$

$$C_1(x = 0, t) = \Gamma_i p_0; \quad C_m(x = L, t) = 0$$

$$\frac{C_i(t)}{C_{i+1}(t)} = \frac{\Gamma_i}{\Gamma_{i+1}}, \quad x = l_i$$

$$\begin{aligned} \tau_{зан} = & \frac{\frac{l_1^2}{D_1} \left( \frac{l_1}{6\Gamma_1 D_1} + \frac{l_2}{2\Gamma_2 D_2} + \frac{l_3}{2\Gamma_3 D_3} \right) + \frac{l_2^2}{D_2} \left( \frac{l_1}{2\Gamma_1 D_1} + \frac{l_2}{6\Gamma_2 D_2} + \frac{l_3}{6\Gamma_3 D_3} \right)}{\frac{l_1}{\Gamma_1 D_1} + \frac{l_2}{\Gamma_2 D_2} + \frac{l_3}{\Gamma_3 D_3}} + \\ & + \frac{\frac{l_3^2}{D_1} \left( \frac{l_1}{2\Gamma_1 D_1} + \frac{l_2}{2\Gamma_2 D_2} + \frac{l_3}{6\Gamma_3 D_3} \right) + \left( \frac{\Gamma_1 l_1 l_2 l_3}{D_1 D_3 \Gamma_1 \Gamma_3} \right)}{\frac{l_1}{\Gamma_1 D_1} + \frac{l_2}{\Gamma_2 D_2} + \frac{l_3}{\Gamma_3 D_3}} \end{aligned} \quad (1.57)$$

Час запізнювання не залежить від зміни шарів 1 і 3, тобто від напрямку дифузійного потоку, але змінюється при зміні шарів 1 і 2 або 2 та 3. Величини стаціонарного потоку зонда крізь константи проникності і мембрану не залежить від перестановки шарів. Ефективний коефіцієнт дифузії, наприклад, для складовою тришарової мембрани складає:

$$D_{эф} = \frac{L^2}{6\tau_{зан}} \quad (1.58)$$

У разі шаруватої системи константа розчинності зонда, визначена за формулою  $\Gamma = P / Def$  не співпадатиме із значенням константи розчинності, отриманої з рівноважних сорбційних експериментів. Ця обставина дозволить відрізнити шарувату середу від однорідної.

Час запізнювання для двошарової мембрани складає:

$$\tau_{zan} = \frac{\frac{l_1^2}{D_1} \left( \frac{l_1}{6\Gamma_1 D_1} + \frac{l_2}{2\Gamma_2 D_2} \right) + \frac{l_2^2}{D_2} \left( \frac{l_1}{2\Gamma_1 D_1} + \frac{l_2}{6\Gamma_2 D_2} \right)}{\frac{l_1}{\Gamma_1 D_1} + \frac{l_2}{\Gamma_2 D_2}} \quad (1.59)$$

З формули (1.59) видно, що величина часу запізнювання не залежить від напрямку потоку. Для тонкого шару 1, нанесеного на підкладку 2,  $\tau_{zan}$  прагне до  $\tau_{zan2}$  при досить великих коефіцієнтах дифузії і розчинності зонда в шарі 1. У разі багатошарового композиту типу 121212 ... вираз для часу запізнювання набирає вигляду:

$$\tau_{zan,n} = \frac{\varsigma_1 D_2 + K_1 \varsigma_2 D_1}{6D_1 D_2} \left( \varsigma_1 + \frac{\varsigma_2}{K_1} \right) l_2^2 \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) + \frac{l^2}{n^2} \left[ \frac{\varsigma_1^3 D_2^2 + K_1 \varsigma_2^3 D_1^2 + 3\varsigma_1 \varsigma_2 D_1 D_2 (K_1 \varsigma_1 + \varsigma_2)}{6D_1 D_2 (\varsigma_1 D_2 + K_1 \varsigma_2 D_1)} \right] \quad (1.60)$$

де  $n$  - число пар шарів типу 12. Якщо  $n = 1$ , то отримуємо вираз:

$$\tau_{zan,n} = \frac{l^2}{6} \left[ \frac{\varsigma_1^3 D_2^2 + K_1 \varsigma_2^3 D_1^2 + 3\varsigma_1 \varsigma_2 D_1 D_2 (K_1 \varsigma_1 + \varsigma_2)}{D_1 D_2 (\varsigma_1 D_2 + K_1 \varsigma_2 D_1)} \right] \quad (1.61)$$

Таким чином [9]:

$$\tau_{zan} = \tau_{L\infty} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) + \tau_{zan,n} \frac{1}{n^2} \quad (1.62)$$

Системи з запізнілим зворотним зв'язком часто моделюються реакційно-дифузійними рівняннями, в яких кінетична функція  $F$  (швидкість протікання хімічних і біохімічних реакцій) залежить як від шуканої функції  $u = u(x, t)$ , так і від тієї ж функції з запізнілим аргументом  $w = u(x, t-\tau)$ . У деяких випадках запізнення може бути заданою функцією часу  $\tau = \tau(t)$ . Такі

рівняння називають функціонально-диференціальними [4]. Розглянемо деякі типи рівнянь масо і теплопереносу з запізненням. Найбільш простим є узагальнення рівняння дифузії, що включає реакційний член з запізненням (реакційно-дифузійне рівняння з запізненням). В одновимірному випадку воно записується у вигляді:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u, w), \quad w = u(x, t - \tau) \quad (1.63)$$

де  $u = u(x, t)$  - шукана функція;  $F(u, w)$  - кінетична функція;  $\tau$  - час запізнювання.

Іншим рівнянням з запізненням є диференційно-різницеве реакційно-дифузійне рівняння:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( G(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(u, v), \quad v = u(x, t + \tau) \quad (1.64)$$

Такі рівняння впливають з диференційно-різницевої моделі для потоку. Фізичний сенс моделі полягає в тому, що процес перенесення в локально-нерівноважних середовищах володіє інерційними властивостями: система реагує на вплив не в той же момент часу  $t$ , як в класичному локально-рівноважному випадку, а пізніше на час релаксації  $\tau$  [8].

## 1.6 Рішення диференціальних похідних за допомогою задач Коші

Однією з основних задач теорії диференціальних рівнянь це задача Коші. Суть її полягає в тому, щоб знайти таке рішення диференціального рівняння (інтеграла), яке б задовольняло детерміновано завданим початковим умовам.

Задача Коші зазвичай виникає при аналізі процесів, обумовлених диференціальним законом та початковим станом, математичним виразом яких і є рівняння та початкова умова (звідси й термінологія та вибір позначень: початкові дані задаються при  $t = 0$ , а розв'язок шукають для  $t > 0$ ).

Зазвичай, в задачі Коші визначений шуканий розв'язок в області, заздалегідь не вказується. Це одна її відмінність від крайових задач.

Однак, задачу Коші також можна розглядати і як одну з крайових задач.

Розглянемо постановки задачі Коші:

1) Диференціальне рівняння першого порядку, розв'язане шляхом відносної похідної:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (1.65)$$

2) Система  $n$  звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язана відносно похідних (нормальна система  $n$ -го порядку):

$$\left\{ \begin{array}{l} y'_1 = f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ y'_n = f_n(x, y_1, \dots, y_n) \\ y_1(x_0) = y_{01} \\ y_n(x_0) = y_{0n} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (1.66)$$

3) Звичайне диференціальне рівняння  $n$ -го порядку, розв'язане відносно старшої похідної :

$$\left\{ \begin{array}{l} y^{(n)} = f(x, y_1, \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_{01} \\ \dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} y'_1 = y_2 (= y') \\ \dots\dots\dots \\ y'_{n-1} = y_n (= y^{(n-1)}) \\ y'_n = f(x, y_1, \dots, y_n) \\ y_1(x_0) = y_{01} (= y(x_0)) \\ \dots\dots\dots \\ y_n(x_0) = y_{0n} (= y^{(n-1)}(x_0)) \end{cases} \quad (1.67)$$

Відповідь на питання про єдність та існування розв'язку звичайного диференціального рівняння має цілком вичерпну відповідь (теорема Пікара — Лінде́лефа). Однозначної відповіді для рівняння з частинними похідними на це питання немає. Є теорема яка стверджує, що задача Коші для будь-якого рівняння з частинними похідними, має єдиний аналітичний розв'язок

аналітичного щодо невідомих функцій і їх похідних (теорема Коші-Ковалевської). Проте, існують приклади лінійних рівнянь з частинними похідними, що не мають розв'язку. Їх коефіцієнти мають похідні всіх порядків. Навіть якщо розв'язок існує і є єдиним, він може мати небажані властивості.

Розглянемо послідовність задач Коші (залежну від  $n$ ) для рівняння Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1.68)$$

з початковими умовами:

$$u(x, 0) = 0 \quad (1.69)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \frac{\sin nx}{n} \quad (1.70)$$

де  $n$  — ціле число. Похідна від функції  $u$  по змінній  $y$  рівномірно прямує до 0 по  $x$  при зростанні  $n$ , проте розв'язком рівняння є :

$$u(x, y) = \frac{(\sinh ny)(\sin nx)}{n^2} \quad (1.71)$$

Розв'язок прямує до нескінченності, якщо  $nx$  не кратно  $\pi$  для будь-якого ненульового значення  $y$  у задачі Коші для рівняння Лапласа називається некоректною, оскільки немає неперервної залежності розв'язку від початкових даних. Наведемо приклади:

#### 1) Одновимірне рівняння теплопровідності

Рівняння, що описує розповсюдження тепла в однорідному стрижні має вигляд:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.72)$$

де  $u(t, x)$  - температура, і  $\alpha$  — додатна константа, що описує швидкість розповсюдження тепла. Задача Коші ставиться таким чином:

$$u(0, x) = f(x) \quad (1.73)$$

де  $f(x)$  — довільна функція.

## 2) Рівняння коливання струни

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.74)$$

Тут  $u(t, x)$  - зсув струни з положення рівноваги, або надмірний тиск повітря в трубі, або амплітуда електромагнітного поля в трубі, а  $c$  — швидкість розповсюдження хвилі. Для того, щоб сформулювати задачу Коші в початковий момент часу, слід задати зсув і швидкість струни в початковий момент часу:

$$\begin{aligned} u(0, x) &= f(x) \\ u_t(0, x) &= g(x) \end{aligned} \quad (1.75)$$

## 3) Двовимірне рівняння Лапласа

Рівняння Лапласа для невідомої функції двох змінних має вигляд:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1.76)$$

Його розв'язки називаються гармонічними функціями.

## 4) Зв'язок з аналітичними функціями

Дійсна і уявна частини будь-якої голоморфної функції  $f$  комплексної змінної  $z = x + iy$  є спряжено гармонічними функціями: вони обидві задовольняють рівнянню Лапласа і їх градієнти ортогональні. Якщо  $f = u + iv$ , то умови Коші — Рімана стверджують наступне:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad (1.77)$$

Додаючи і віднімаючи рівняння один з одного, одержуємо:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \quad (1.78)$$

Також можна показати, що будь-яка гармонічна функція є дійсною частиною деякої аналітичної функції.

## 2 ФРАКЦІЙНА КІНЕТИКА У НАВКОЛИШНЬОМУ СЕРЕДОВИЩІ

### 2.1 Загальні характеристики фрактальних множин та об'єктів

Поняття фрактал і фрактальна геометрія, з'явилися в кінці 70-х рр. ХХ ст.. Слово фрактал утворене від латинського *fractus* і в перекладі означає, що складається з фрагментів. Вперше, цей термін був запропонований Бенуамоном Мандельбротом у 1975 р. для позначення самоподібних структур. Народження фрактальної геометрії прийнято пов'язувати з виходом в 1977 г. книги Мандельброта «The Fractal Geometry of Nature». У його роботах використані наукові результати інших вчених, які працювали в період 1875-1925 рр. в тій же області (Пуанкаре, Фату, Жюліа, Кантор, Хаусдорф). У своїх книгах Мандельброт навів яскраві приклади застосування фракталів до пояснення деяких природних явищ. Він приділив велику увагу цікавому властивості, яким володіють багато фракталів. Справа в тому, що фрактал можна розбити на скільки завгодно малих частини так, що кожна частина виявиться просто зменшеною копією цілого. Інакше кажучи, дивитися на фрактал в мікроскоп, то можна побачити ту ж саму картину, що і без мікроскопа. Це властивість самоподібності різко відрізняє фрактали від об'єктів класичної геометрії. Визначення фрактала, дане Мандельбротом, звучить так: "фракталом називається структура, що складається з частин, які в якому - то сенсі подібні цілому" [10].

Фрактали, як приклади множин, що володіють, так званої, канторовою структурою, були дуже популярні в кінці позаминулого і початку минулого століть у зв'язку з класичною проблемою математичного аналізу. Такі множини привертати увагу видатних математиків, серед яких Вейерштрасс, Ріман, Ерміт, Кантор, Пеано. Приклад безперервної функції, яка ніде не диференціюється, побудованої Вейерштрассом, має вид:

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x); \quad (2.1)$$

$$a < 1, b < 1, ab < 1$$

Модель визначила напрямок багатьох досліджень, що в кінцевому підсумку призвело до підвищення вимог до строгості математичних міркувань.

Інтуїтивно геометричні моделі різних природних об'єктів традиційно будувалися на основі порівняно простих геометричних фігур: прямих, кіл, сфер, багатогранників. Однак очевидно, що цей класичний набір, цілком достатній, наприклад, для опису структури щільних кристалічних і аморфних твердих тіл, недостатній при розгляді пухких пористих структур. Тому в останні 15-20 років для опису складних об'єктів і систем самих різних розмірів вчені все частіше використовують нові геометричні уявлення. Число різних масштабів довжин в структурах завжди нескінченно. Існування цих структур кидає виклик у вигляді складного завдання вивчення тих форм, які Евклід відкинув як безформні. Фрактали оточують нас всюди, як в системах, створених природою (обрис гір, річок, морського берега, дерев і судинної системи), так і штучним шляхом (кластери). Для характеристики фрактальних структур фундаментальним параметром є так звана фрактальна розмірність. Остання показує ступінь заповнювання простору об'єктом або структурою [11].

## 2.2 Поняття розмірності фракталів

Наведемо приклад утворення конденсованих середовищ, перша з яких має звичайну компакту структуру, а друга - пухку, фрактальну. Розглянемо утворення зародків нової фази в твердому стані. Якщо таке перетворення є компактным, то число структурних елементів (атомів, молекул або частинок), що містяться в зародку нової фази розміром  $R$ , визначається співвідношенням:

$$N \sim R^d \quad (2.2)$$

де  $d$  - розмірність простору. Такий же вид функціональної залежності

характерний для обсягу виділення:

$$V = A^d R^d \quad (2.3)$$

де  $A^d$  - геометричний фактор, що враховує форму виділення. При розмірності  $d = 1, 2$  і  $3$ ,  $A_d = 2, \pi$  і  $4\pi/3$  відповідно, щільність компактного виділення  $\rho = N / V$  виявляється величиною, що не залежить від розміру. Зовсім інша ситуація спостерігається у некомпактного середовища. Перші спостереження фрактальної структури речовини були пов'язані з утвореннями, які формуються в атмосфері інертних газів і складаються з мікроскопічних кластерів (скупчень) твердої фази [12]. Такі кластери утворюються в результаті випаровування, наприклад, заліза, цинку, оксиду кремнію і т. д. і подальшої конденсації парів цих речовин при охолодженні в навколишньому газі, що гасить кінетичну енергію атомів. Дифундуючи та стикаючись, атоми з'єднуються між собою і утворюють малі кластери, які потім злипаються в агрегати, які осідають на стінках реакційної камери. Середній розмір кластерів перебуває в межах 2-8 Нм. Такі перетворення є відносно аморфними і пористими. Число частинок у фрактальному агрегаті розміром:

$$R N \sim R^D \quad (2.4)$$

де  $D$  - фрактальна розмірність. Аномальний характер залежності (2.4) обумовлений тим, що фрактальна розмірність  $D$  не збігається з розмірністю простору  $d$  в співвідношенні (2.2) та для щільного виділення. Відповідно до цього щільність

$$\rho \sim R^{-(d-D)}, d > D \quad (2.5)$$

є степеневою функцією розміру, що і відображає некомпактний характер фрактала. Очевидно, що чим більше розрізняються топологічна розмірність  $d$  і фрактальна розмірність  $D$ , тим більше пухкою є фрактальна система. Таким чином, однією з основних характеристик фрактальної системи є фрактальна розмірність, яка не збігається з розмірністю того простору, в якому утворюється фрактал [10].

Фрактальна розмірність,  $D$  — поняття фрактальної геометрії, що означає статистичну величину, яка говорить про те, наскільки повно фрактал заповнює простір, коли збільшувати його до дрібніших деталей.

Згідно з поняттям фрактальна розмірність  $n$  - вимірного простору може бути визначена за допомогою формули:

$$D = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_{\varepsilon}}{\ln \varepsilon} \quad (2.6)$$

де  $N_{\varepsilon}$  — число само подібних структур лінійного розміру  $\varepsilon$ , необхідних для покриття всієї структури;

Існує багато специфічних визначень фрактальної розмірності. Найважливішими теоретичними фрактальними розмірностями є розмірність Реній, розмірність Хаусдорфа, компактна розмірність. На практиці, розмірність Мінковського і кореляційна розмірність широко застосовуються через їхню простоту використання. Хоч для деяких фракталів всі ці розмірності збігаються, загалом вони не є еквівалентними.

Прийнято розрізняти регулярні і нерегулярні фрактали, з яких перші є плодом уяви, подібним кривої Коха, а другі - продуктом природи або діяльності людини [13].

### 2.3 Порівняльний аналіз розв'язків дифузійних рівнянь в евклідовській і фракційній формах

За традицією основою інтуїтивного розуміння геометрії природи служили евклідові прямі, кола, з яких будували простір з чисельною розмірністю. Однак класичний набір геометричних фігур: прямих, кіл і тому подібних, стає придатним для опису довжини річок, периметра озер, форми хмар і ще величезної кількості інших природних об'єктів. Але для опису об'єктів, яких об'єднує назва - фрактал необхідне введення не цілочисельних, дрібно розмірних просторів.

Фрактальна геометрія, як математична наука має обмеження на дослідження об'єктів і вивчає форми в таких розгалужених системах, як берегові лінії, гірські ланцюги, турбулентність, форми хмар, блискавок, дерев і т.д. Основою фрактальної геометрії є афінна геометрія. Поняття афінного простору передбачає, що цей простір позбавлене метрики, тобто способу вимірювання довжин і кутів. Афінний простір стане цілком ідентичним (у всякому разі для дво- і тривимірний випадків) звичайному простору лише після введення в ньому відповідної метрики. У звичайному тривимірному просторі метрика вводиться як твір довжин векторів, помножене на косинус кута між ними. Тоді таке векторне простір з введеної метрикою називається евклідовим простором [12].

Звідси бачимо головну відмінність фрактальної геометрії від евклідової, що вона не займається вивченням звичайних об'ємних тіл і, звичайно, зміною їх обсягу; афінна геометрія також не займається природою фрактальних форм. Сутність фрактального аналізу полягає в тому, що в ньому розглядаються сукупності точок в якості основних об'єктів. Ця особливість афінної геометрії узгоджується з фундаментальної структурою фрактальної фізики, в якій частинки, електрони, ядра представляються електричними зарядами. Положення істотно змінилося після того, як була встановлена нова наука про світобудову зв'язків фрактальних структур і їх розмірностей з енергетичними характеристиками системи. Були знайдені форми опису всіх ефектів взаємодій об'єктів єдиної, електромагнітної природи, для яких простір основних станів описується в термінах фракталів. При розвитку теорії фракталів введено фрактальне диференціювання (інтегрування), так як фрактальна геометрія відмовляє в диференціюванні деяких фрактальних рухів, бо використовує класичне наближене обчислення, і визначені фрактальні розмірності фізичних об'єктів і їх зв'язок з енергетичними характеристиками систем, а також виявлені нові, невідомі раніше закономірності [11].

Дійсно, фрактальна фізика - це наука про світ в цілому - виявила і

встановила, що всі явища і процеси мають єдину фундаментальну взаємодію, електромагнітну по своїй суті, і проявляються вони в формі різних фрактальних, електричних структур, які можуть бути і не самоподібні. Тому простір взаємодій фізичних об'єктів описується як евклідової, так і афінної геометрією. Така відмінність пов'язана з тим, що при аналізі процесів мікросвіту значення збільшень простору не слід, на відміну від геометрії Евкліда, вибирати довільно. Мікроструктура простору утворюється комбінаціями елементарних електричних зарядів. Ось чому нова наука описує адекватно реальності взаємодії частинок мікросвіту в афінному просторі, де відсутні вимірювання довжини і площин. Крім того, досягнуті фрактальною фізикою результати вказують на те, що фрактальна геометрія не знала про них і тому, не могла вивчати ці фізичні об'єкти зважаючи на свою обмеженість.

Для опису процесів аномальної дифузії запропоновано кілька підходів, що використовують змінні коефіцієнти дифузії, кореляції дробового порядку, дробові Лапласіана, стрибкоподібні блукання, узагальнення рівнянь Ланжевена, Фоккера-Планка і ін. Найпростіший спосіб опису процесу переносу на фрактальних (самоподібних) об'єктах полягає в модернізації коефіцієнта дифузії шляхом включення в нього показника фрактала при залишенні традиційної форми другого закону Фіка [14].

### З РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ДИФУЗІЇ У ФРАКЦІОННОМУ СЕРЕДОВИЩІ В ТЕРМІНАХ МЕРОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ( МІТТАГ-ЛЕФФЛЕРА)

#### 3.1 Метод функції Гріна для рівняння аномальної дифузії у фракційних середовищі

В даний час все більший інтерес викликає теорія масопереносу у фракційних середовищах, яка розглядається в рамках фізики відкритих систем. Цей інтерес викликаний тим, що численні геофізичні та експериментальні дані вказують на те, що геосередовище є нелінійним, має блочну структуру або володіє фракційними властивостями. В таких середовищах процес масопереносу може відбуватися або більш інтенсивно, або навпаки, менш інтенсивно, ніж в середовищах з однорідною структурою. Механізми масопереносу в середовищах з фракційною структурою називаються аномальними, а математичні моделі, які описують такі механізми, нелокальними. Математичний апарат для опису переносу в таких середовищах досить добре розроблений і заснований на дробовому обчисленні [8].

Розглянемо для рівняння аномальної дифузії у фракційному середовищі метод функції Гріна рішення задачі Коші. Знайдемо рішення задачі Коші за допомогою функції Гріна для рівняння (3.1):

$$\frac{\partial^\beta (\xi, \tau)}{\partial \tau^\beta} = \bar{D} \frac{\partial^\alpha (\xi, \tau)}{\partial \tau^\alpha} + \bar{v} \frac{\partial^\gamma (\xi, \tau)}{\partial \tau^\gamma} - \bar{\lambda} (u(\xi, \tau) - u_0(\xi, \tau)) \quad (3.1)$$

Вираз (3.1) є основним рівнянням дифузії-адвекції, яке володіє фракційними властивостями.

Підставивши для простоти  $u_0(\xi, \tau) = \bar{v} = \bar{\lambda} = 0$  у рівняння (3.1) отримаємо:

$$\frac{\partial^\beta G(\xi, \tau)}{\partial \tau^\beta} = \bar{D} \frac{\partial^\alpha G(\xi, \tau)}{\partial \tau^\alpha}, \quad \xi \geq 0, \quad \tau \geq 0. \quad (3.2)$$

$$G(\xi, 0) = \delta(\xi).$$

Рівняння (3.2) є рівнянням аномальної дифузії. Коли  $\beta=1$  та  $\alpha=1$ , то воно переходить в класичне рівняння математичної фізики, яке використовується в задачах тепломасипереносу [9].

Знаходимо фундаментальне рішення завдання (3.2) для  $1 < \alpha < 2$ . Для цього зробимо перетворення Фур'є по просторовій координаті  $\xi$ . Приходимо до наступної задачі Коші:

$$\partial_{0\tau}^\beta F(k, \tau) = \overline{D}|k|^\alpha F(k, \tau), \quad F(\xi, 0) = 1 \quad (3.3)$$

Запишемо вираз (3.3) наступним чином:

$$F(k, \tau) = E_\beta(-\overline{D}|k|^\alpha \tau^\beta), \quad (3.4)$$

де  $E_\beta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n / \Gamma(\beta n + 1)$  - функція Міттаг-Леффлера. Рішення також можна представити через функцію Фокса:

$$F(k, \tau) = E_\beta(-\overline{D}|k|^\alpha \tau^\beta) = H_{12}^{11} \left( \overline{D}|k|^\alpha \tau^\beta \left| \begin{smallmatrix} (0,1) \\ (0,1), (0, \beta) \end{smallmatrix} \right. \right), \quad (3.5)$$

де  $H_{p,q}^{m,n}(z)$ - функція Фокса. Виконуючи зворотне перетворення Фур'є виразу (3.5), отримаємо:

$$\begin{aligned} G(\xi, \tau) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\xi} H_{12}^{11} \left( \overline{D}|k|^\alpha \tau^\beta \left| \begin{smallmatrix} (0,1) \\ (0,1), (0, \beta) \end{smallmatrix} \right. \right) dk = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \sqrt{k\xi} J_{-1/2}(k, \xi) H_{12}^{11} \left( \overline{D}|k|^\alpha \tau^\beta \left| \begin{smallmatrix} (0,1) \\ (0,1), (0, \beta) \end{smallmatrix} \right. \right) dk = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi\xi}} H_{32}^{12} \left( \frac{2^\alpha \overline{D}\tau^\beta}{|\xi|^\alpha} \left| \begin{smallmatrix} (1/2, 1), (0,1), (0,1) \\ (0,1), (0, \beta) \end{smallmatrix} \right. \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi\xi}} H_{23}^{21} \left( \frac{|\xi|^\alpha}{2^\alpha \overline{D}\tau^\beta} \left| \begin{smallmatrix} (1,1), (1, \beta) \\ (1/2, 1), (1,1), (1,1) \end{smallmatrix} \right. \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi\xi}} H_{12}^{20} \left( \frac{|\xi|^\alpha}{2^\alpha \overline{D}\tau^\beta} \left| \begin{smallmatrix} (1, \beta) \\ (1/2, 1), (1,1) \end{smallmatrix} \right. \right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Рішення (3.6) є функцією Гріна  $G(\xi, \tau)$  для завдання (3.2).

Нехай початкова умова для рівняння (3.2)  $u(\xi, 0) = \phi_0(\xi)$ , тоді рішення такої задачі Коші можна записати в такий спосіб:

$$u(\xi, \tau) = \int_0^\xi G(\xi - \zeta, \tau) \phi_0(\zeta) d\zeta \quad (3.7)$$

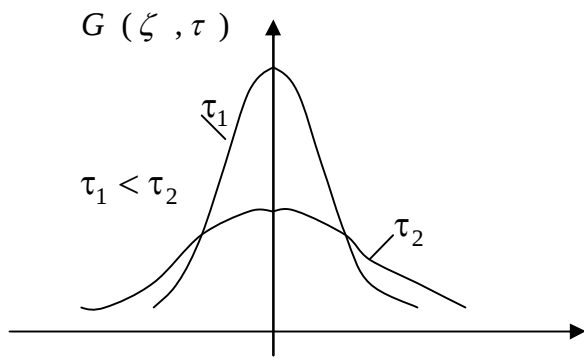


Рис. 2.1.- Графік зображення функції  $G(\xi, \tau)$  для різних  $\tau$

Функція Гріна  $G(\xi, \tau)$  при значеннях параметрів  $\alpha = 2$  та  $\beta = 1$  переходить в функцію Гріна для класичної задачі дифузії. Можна показати, що:

$$G(\xi, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi\xi}} H_{12}^{20} \left( \frac{\xi^2}{4D\tau} \middle| \begin{matrix} (1,1) \\ (1/2,1), (1,1) \end{matrix} \right) = \frac{1}{2\sqrt{D\tau}} e^{-\frac{\xi^2}{4D\tau}}. \quad (3.8)$$

За допомогою функції Міттаг-Леффлера отриманні результати (3.8), які наведені на рисунку 2.1 (зображення функції  $G(\xi, \tau)$ , для різних  $\tau$ ). Саме функція Міттаг-Леффлера надає рішення фракційному рівнянню дифузії [15].

### 3.2 Розв'язок біофракційного рівняння дифузії

Функція  $W(x; t)$  – це питомий вираз вірогідного розподілу координати частинки, що дорівнює зворотній трансформації Фур'є та Лапласа від функції  $\hat{\theta}_{-(u;s)}$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x; t) dx = 1 \quad (3.9)$$

Рівняння  $g(0; s) = \hat{f}(s)$ , має вигляд  $\hat{\theta}(0, s) = 1/s$  – це є Лаплас – вираз від одиниці.

Аналогічно Лаплас – вираз середнього квадрату частинки, який отримали завдяки відповідній формулі:

$$\hat{X}^2(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \hat{X}^2(t) \rangle e^{-zt} dt = - \frac{\partial^2 \hat{\theta}(u, s)}{\partial u^2} \bigg|_{u=0} \quad (3.10)$$

Прорахувавши вираз Лапласа, підставивши перші складові розподілу функції в ряд Тейлора в районі значень  $u=0$ , для більшої простоти вважаємо, що  $v=0$ , а в разі  $(v)^2 = \sigma^2$ . Тоді в цьому випадку будемо мати вираз:

$$g(u, s) = \hat{f}(s) - \frac{\sigma^2}{2} u^2 \hat{f}''(s) + \dots \quad (3.11)$$

Для Лаплас виразу середнього квадрату отримаємо формулу:

$$\hat{X}_-^2(s) = \frac{\sigma^2}{s\varphi(s)}, \quad \varphi(s) = \frac{1 - \hat{f}(s)}{\hat{f}''(s)} \quad (3.12)$$

Розглянемо вираз асимптотичного поведіння середнього квадрату  $\langle \hat{X}_-^2(t) \rangle$  за умови, що  $t \rightarrow \infty$ . Воно визначено асимптотичною формулою Лаплас-виразу (3.11) за умови, що  $s \rightarrow 0$  [16]. Необхідно дослідити вказану асимптотику до (3.11). Розглянемо стандартну ситуацію дізнавшись, наскільки швидко розповсюдження функції  $f(\tau)$  йде до нуля, за умови коли  $t \rightarrow \infty$  а перші два моменти інтервалів зіткнення настільки обмежені, що:

$$\langle \tau \rangle < \infty, \quad \langle \tau^2 \rangle < \infty \quad (3.13)$$

це є обмеження моментів зіткнення частинки. В цьому випадку для функції виразів є позначення та розклад, який описується наступною формулою (3.13):

$$\hat{f}(s) = 1 - \langle \tau \rangle s + \frac{1}{2} \langle \tau^2 \rangle s^2 + \dots \Rightarrow \hat{f}''(s) = \langle \tau^2 \rangle + \dots \quad (3.14)$$

Підставив вираз (3.14) в формулу (3.11) одержуємо наступну формулу в вигляді:

$$\hat{X}_-^2(s) \approx \sigma^2 \frac{\langle \tau^2 \rangle}{\langle \tau \rangle} \cdot \frac{1}{s^2}, \quad s \rightarrow \infty \quad (3.15)$$

Тоді, використовуючи табличну формулу трансформації Лапласа одержуємо наступний вигляд формули:

$$\frac{1}{s^\gamma} \Leftrightarrow \frac{f^{\gamma-1}}{(\gamma)} \quad (3.16)$$

У випадку стандартних дифузійних процесів лінійний тип дифузії частинки, характеризується співвідношенням:

$$\hat{X}_-^2(s) \approx D(t), \quad t \rightarrow \infty \quad D = \sigma^2 \frac{\langle \tau^2 \rangle}{\langle \tau \rangle} \quad (3.17)$$

Однак пористе середовище, а точніше процеси міграції показують наявність розподілу інтервалів між зіткненнями зі степеневою асимптотикою, яка має вигляд [17]:

$$f(\tau) \approx k^\beta \tau^{-\beta-1}, \quad \tau \rightarrow \infty, \quad 0 < \beta \leq 2 \quad (3.18)$$

За умовами  $0 < \beta \leq 2$  та  $1 < \beta \leq 2$ :

$$\hat{f}(s) \approx 1 - k^\beta \frac{\Gamma(1-\beta)}{\beta} s^\beta, \quad s \rightarrow \infty, \quad 0 < \beta \leq 2 \quad (3.19)$$

Для другої похідної для функції  $\hat{f}(\beta)$ , яка дорівнює:

$$\hat{f}(s) \approx k^\beta \Gamma(2-\beta) s^{\beta-2}, \quad s \rightarrow 0, \quad 0 < \beta \leq 1 \quad (3.20)$$

Підставивши вираз (3.9), (3.10) в вираз (3.17) отримуємо:

$$\hat{X}_-^2(s) \approx \sigma^2 \beta(1-\beta) \frac{1}{s^\beta}, \quad \tau \rightarrow \infty, \quad 0 < \beta \leq 1 \quad (3.21)$$

Після зворотного перетворення отримаємо:

$$X(t) \approx vt, \quad \langle X^2(t) \rangle \approx \tau^2 t^2 \quad (3.22)$$

Фізичний зміст (3.21) полягає в тому, що в разі різних зіткнень, можна вважати, що частинка рухається майже рівномірно.

У випадку коли  $1 < \beta \leq 2$ , справедлива наступна асимптотика:

$$\hat{f}(s) \approx 1 - \langle \tau \rangle s + k^\beta \frac{\Gamma(2-\beta)}{\beta(\beta-1)} s^\beta, \quad s \rightarrow 0, \quad 1 < \beta \leq 2 \quad (3.23)$$

Аналогічно попередньому випадку отримаємо:

$$\hat{X}_-^2(s) \approx \sigma^2 \frac{k^\beta}{\langle \tau \rangle} \frac{\Gamma(2-\beta)}{\Gamma(4-\beta)} t^{3-\beta} \quad (3.24)$$

Таким чином, за умови  $1 < \beta \leq 2$  середній квадрат координати частинки підпорядковується, так званому супердифузійному закону, який має вигляд:

$$\langle \hat{X}_-^2(t) \rangle \approx f^\gamma, \quad \gamma = 3 - \beta \quad (3.25)$$

У низці робіт, пов'язаних з міграцією домішкових частинок у дрібно-розмірній фракційній матриці характеризується функцією Міттаг-Леффльора,  $E_\beta(z)$  [9]:

$$E_{\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n\beta + 1)} \quad (3.26)$$

Можна показати, що функція  $E_{\beta}(-(t/\tau)^{\beta})$  є рішенням рівняння виду:

$$\frac{d^{\beta}\Phi(t)}{dt^{\beta}} + \tau^{-\beta}\Phi(t) = \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}x(t) \quad 0 < \beta \leq 1 \quad (3.27)$$

Це рівняння є дрібно-розмірним узагальненням звичайного кінетичного рівняння:

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau}\Phi(t) \quad (3.28)$$

розв'язком якого є експонента  $e^{-1/\tau} = E_1\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ .

Вираз для Лапас-образу  $Q(\sigma, t)$ :

$$Q(\sigma, t) = \langle e^{-\gamma\sigma(t)} \rangle = E_{\beta}(-\gamma t^{\beta}) \quad (3.29)$$

Розглянемо ймовірний процес, що описується мірою  $X(t) = \sigma(t)$  з густинністю вигодностей:

$$W(x, t) = \frac{1}{t^{\beta}} Q_{\beta}\left(\frac{\sigma}{t^{\beta}}\right) \quad (3.30)$$

З характеристичною функцією:

$$\theta(u, t) = \langle e^{iu\sigma(t)} \rangle = E_{\beta}(iut^{\beta}) \quad (3.31)$$

Співвідношення (3.27) підпорядковується рівнянню:

$$\frac{\partial^{\beta}\theta}{\partial t^{\beta}} = iu\theta + \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}x(t) \quad (3.32)$$

Подіавши на перше з них похідною порядку  $\beta(t)$  та виключивши непарну компоненту, перейдемо до замкнутого рівняння відносно  $\theta_{even}(u, t)$ :

$$W_{even}(x, t) = \frac{1}{2}[W(x, t) + W(-x, t)] = \frac{1}{2}W(|x|, t) \quad (3.33)$$

Воно підпорядковується рівнянню, яке надається нижче:

$$\frac{\partial^{2\beta}W_{even}}{\partial t^{2\beta}} = \frac{\partial^2 W_{even}}{\partial x^2} + \frac{t^{-2\beta}}{\Gamma(1-2\beta)}x(t)\delta(x) \quad (3.34)$$

яке зводиться до (3.21) заміною  $\beta$  на  $\gamma/2$ . Таким чином, одержуємо, що згідно з (3.31), (3.32) рішення рівняння дрібної дифузії (3.22) можна записати в належному вигляді [18]:

$$W(x,t) = \frac{1}{2t^{\frac{\gamma}{2}}} Q_{\frac{\gamma}{2}}\left(\frac{|x|}{t^{\frac{\gamma}{2}}}\right) \quad (3.35)$$

Розподіл  $Q_{\gamma/2}(z)$  можна знайти за допомогою зворотної трансформації Фур'є, зробленої від  $E_{\gamma/2}(iu)$ , за умови, що  $1 < \lambda < 2$ . Завдяки властивостям функції Міттаг – Леффлера, робимо висновок, що:

$$Q_{\gamma/2}(z) = \frac{2}{\pi\gamma} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \exp(izx + x^{2/\gamma} e^{-i\pi/\gamma}) dx \quad (3.36)$$

Отриманні результати задають параметри процесу супердифузії. Зображення функції  $Q_{\beta}(z)$ , для різних  $\beta$ , наведенні на Рис 3.1.

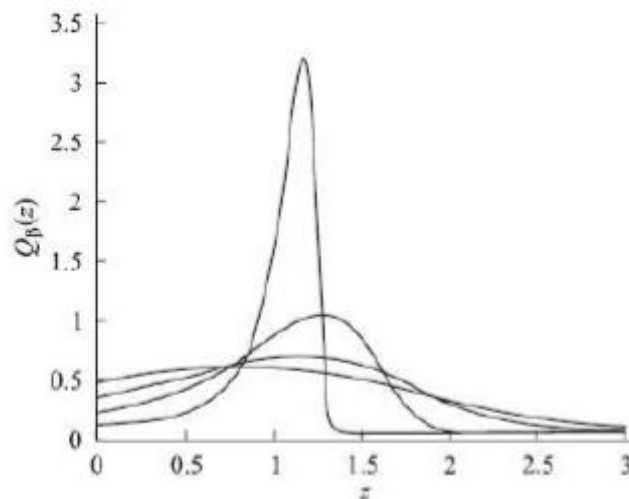


Рис. 3.1— Графіки розподілу  $Q_{\beta}(z)$  для різних значень  $\beta=0,65 - 0,95$ .

Вони експоненціально спадають зі зростом  $z$ , що забезпечує обмеженість моментів [16].

Твердий скелет пористого тіла робить істотний вплив на дифузійне перенесення речовини. Дискусійним є питання про можливість застосування закону Фіка і диференціального рівняння дифузії для встановлення потоку речовини і концентраційного поля в пористому середовищі. Пористе

середовище — середовище, об'єм пор якого під дією тиску не змінюється або зміною його можна нехтувати.

Розглянемо найпростішу схему пористої структури, де всі циліндричні пори паралельні один одному. У застосуванні до одиначної порі закон Фіка і диференціальне рівняння дифузії запишуться в незмінному вигляді. У застосуванні до всього пористого тіла диференціальне рівняння збереже свій вигляд [19]:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (3.37)$$

а закон Фіка запишеться наступним чином:

$$j = -m_p D \text{grad} C \quad (3.38)$$

$$D_m = m_p D$$

Шляхом більш загального висновку це співвідношення було отримано для ізотропних тіл з довільної пористою структурою. Дифузійне перенесення в пористом середовищі уповільнення на відміну, від суцільного, зумовлене механічним блокуванням дифузійного потоку твердим скелетом, подовженням шляху дифузії внаслідок звивистості капілярів, гальмуванням молекулярного руху стінками капіляра, підвищенням в'язкості рідини через можливу розчинності речовини скелета. Суцільне середовище — фізична система з нескінченним числом внутрішніх ступенів свободи. Тобто, в суцільному середовищі кінетична енергія протікає швидше [20].

## ВИСНОВКИ

На даний теорія масопереносу у складених та фракційних середовищах, яка розвивається в рамках фізики складних відкритих систем, починає все частіше застосовуватися для опису процесів у навколишньому середовищі. Цей процес викликаний тим, що численні екологічні експериментальні дані вказують на те, що навколишнє середовище є нелінійним, має неоднорідну структуру або навіть володіє фракційними властивостями.

Механізми масопереносу в середовищах з фракційною структурою називаються аномальними, а математичні моделі, які описують такі механізми, нелокальними. Математичний апарат для опису переносу в таких середовищах достатньо розроблений і заснований на дробовому обчисленні.

У бакалаврській роботі було розглянуто дифузійні процеси фракційних моделей у навколишньому середовищі. Надали порівняльну характеристику пористому та суцільному середовищі та з'ясували, що кінетична енергія протікає швидше у суцільному середовищі, ніж у пористому. Тому, що дифузійне перенесення в пористом середовищі заміджується механічним блокуванням дифузійного потоку твердим скелетом, подовженням шляху дифузії внаслідок звивистості капілярів, гальмуванням молекулярного руху стінками капіляра, підвищенням в'язкості рідини через можливу розчинності речовини скелета.

## ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д. Элементы математической физики. Среда из невзаимодействующих частиц.- 2-е изд.,- М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 368 с.
2. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1 - М. Л. : Гостехиздат, 1951. 23 с.
3. Герасимов О.І. Фізична кінетика в задачах та прикладах. Одеса, ОГМІ, 1998. 56 с.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. Часть 1. Издание 5-е. — М.: Физматлит, 2005. 616 с. — («Теоретическая физика», том V).
5. Герасимов О.І. Теоретичні основи технологій захисту навколишнього середовища: навчальний посіб. / Одеськ. держ. екол. ун-т. Одеса: ТЕС, 2018. 228 с.
6. Рід М., Саймон Б. Методы современной и математической физики. - М. : Світ, 1977. Т.Т. 1, 2. 175 с.
7. Д.А Франк - Каменецкий. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М., Наука. 1967. 113 с.
8. Базаров И.П., Геворкян Е. В., Николаев П.Н. Неравновесная термодинамика и физическая кинетика. М., Наука, 1972. 45с.
9. Климонтович Ю.Л. Статистична фізика і термодинаміка. М., Наука, 1981. 234 с.
10. Адамян В.М., Сушко М.Я. Вступ до математичної фізики. Одеса, Астропринт, 2003. 45 с.
11. О.И. Герасимов. Рассеяние излучений в статистических системах: Решаемые модели. – Одесса.: Маяк, 1999. 284 с.
12. Пайтген Х.-О., Рихтер П.Х. Краса фракталів. Комплексні динамічні системи. М. : Світ, 1993. 176с.

13. Фракталы в физике. Под ред. Л. Пьетронеро и Э. Тозатти. М.: Мир, 1988. 670 с.
14. Федер Е. Фрактали. М.: Світ, 1991. 262 с.
15. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: Постмаркет, 2000. 352 с.
16. Шабетник В.Д. Фрактальная физика. Наука о мироздании. М.: Тибр, 2000. 416 с.
17. Гольдберг А.А., Островський І.В., Розподіл значень мезоморфних функцій, М., 1970 86 с.
18. Falconer K.J. Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications J. Wiley & Sons, 1995. 288 p.
19. А.Н. Тихонов, А.Б. Васильева, А.Г. Свешников. Курс высшей математики и математической физики. Дифференциальные уравнения. — Физматлит, 2005. 243 с.
20. Ф. Хартман. Звичайні диференціальні рівняння. - Світ, 1972. 34 с.